YALE UNIVERSITY

LIBRARY

STERLING

CHEMISTRY LABORATORY

WITHDRAW

ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG
DER
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

VON

H. GEIGER

122. BAND

Mit 324 Textfiguren

SPRINGER-VERLAG, BERLIN

1944

Alle Rechte,
insbesondere das Recht der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Z 37
J.122

Inhalt des 122. Bandes.

---

1. bis 4. Heft.

(Abgeschlossen am 9. März 1944.)

Seite

R. Rompe, W. Thouret und W. Weizel, Zur Frage der Stabilisierung frei brennender Lichtbögen. (Mitteilung der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung und des Instituts für theoretische Physik der Universität Bonn.) Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 8. März 1943) 1

T. L. de Bruin, P. F. A. Klinkenberg und Ph. Schuurmans, Die Struktur des Th II-Spektrums. II. Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 23. Februar 1943) 23

O. Th. Hahn und W. Finkelnburg, Kontinuierliche Brems- und Rekombinationsstrahlung der Elektronen im Gasentladungsplasma. Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 5. März 1943) 36

A. Becker und Ilsemarie Schaper, Über die Lichtdurchlässigkeit des amorphen Selens. Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 12. April 1943) 49

W. Walcher, Über eine Ionenquelle für massenspektroskopische Isotopentrennung. Mit 18 Abbildungen. (Eingegangen am 18. Mai 1943) . . . 62

Walter Wunderlich, Zur Reflexion von Röntgenstrahlen an Kristallen. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 27. Mai 1943) 86

Karl Bollert, Eine neue Methode zur Quantelung der freien Strahlung mit einem Beitrag zur Neutrinotheorie des Lichtes. (Eingegangen am 1. Juni 1943) 98

A. und F. Sauter, Die Erzeugung von möglichst homogenen Magnetfeldern durch Stromsysteme. Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 5. Juni 1943) 120

M. Knoll, O. Hachenberg und J. Randmer, Zum Mechanismus der Sekundäremission im Inneren von Ionenkristallen. Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 9. April 1943) 137

G. Blass, Materieerzeugung in einem homogenen, zeitlich veränderlichen elektrischen Feld. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 14. Mai 1943) 163

Seite

E. Kinder, Das Jochlinsen-Kombinations-Übermikroskop für Durchstrahlungs- und Selbststrahlungsaufnahmen. (Aus dem Forschungs-Institut der AEG.) Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 14. Juli 1943) . . . 192

R. Seeliger, Bemerkung zur Theorie des Kathodenfalls. Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 17. Juli 1943) 209

W. Riemann, Untersuchung der Elektronenlawine mit der Nebelkammer. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 20. Juli 1943) 216

W. Finke, Das Periodische System der Elemente nach Quantenzahlen in flächenhafter Darstellung. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 19. Juni 1943) 230

H. Maier-Leibnitz, Koinzidenzmessungen an radioaktiven Natriumisotopen. Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 4. August 1943) 233

W. Kranert, K. H. Leise und **H. Raether,** Untersuchung elektrolytisch polierter Metallflächen mittels Elektroneninterferenzen. Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 15. September 1943) 248

W. Riemann, Bemerkung zur Ionisierungsdichte einer Elektronenbahn. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 20. Juli 1943) 262

K. H. Lauterjung und **H. Neuert,** Über einen Nachwirkungseffekt an Zählrohren. (Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Köln.) Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 26. Mai 1943) 266

---

5. bis 8. Heft.

(Abgeschlossen am 19. Mai 1944.)

Heinz Schmellenmeier, Messungen des Gradienten der positiven Säule von Edelgasniederdruckentladungen. Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 7. Juli 1943) 269

Fritz Rössler, Die kontinuierliche Strahlung der Quecksilberhochdruckentladung. (Mitteilung der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung.) Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 15. Juli 1943) 285

J. Mattauch und **H. Ewald,** Über eine neue Methode zur Messung relativer Häufigkeiten von Isotopen. Die Isotopenverteilung und das Atomgewicht von Hafnium. Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 31. August 1943) 314

Max Päsler, Zur Theorie der thermischen Dämpfung in festen Körpern. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 4. August 1943) 357

Peter Jensen, Die relativen Ausbeuten einiger $(n, 2n)$-Prozesse. (Eingegangen am 11. August 1943) 387

W. Walcher, Trennung der Thalliumisotope. I. Massenspektroskopische Trennung. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 28. August 1943) . . 401

F. Borgnis, Zum Resonanzverhalten elektromagnetisch erregter Hohlräume. (Eingegangen am 9. August 1943) 407

Seite

Z. Ozorai, Das zweite Maximum der Rossi-Kurve. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 16. August 1943) 413

H. Klumb und **H. Schwarz**, Über ein absolutes Manometer zur Messung niedrigster Gasdrucke. Mit 15 Abbildungen. (Eingegangen am 21. August 1943) 418

Helmut Schwarz, Gasaufzehrung und Gasaustausch bei der Messung niedrigster Drucke im Ionisationsmanometer. Eine kritische Untersuchung in H_2, N_2 und Ar. Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1943) 437

Werner Wiebe, Das Problem der Fokussierung beim Zyklotron. (Aus dem Röntgen-Forschungs-Institut der Universität Bonn.) Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 23. Juni 1943) 451

H. Kopfermann und **W. Walcher**, Trennung der Thalliumisotope. II. Optische Untersuchung verschiedener Thalliumgemische. Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 28. August 1943) 465

Th. Neugebauer, Berechnung von Form und Größe der Molekülschwärme in Flüssigkeiten aus den Daten der Lichtzerstreuung. (Eingegangen am 28. August 1943) 471

H. Ewald, Die relativen Isotopenhäufigkeiten und die Atomgewichte von Kupfer und Ruthenium. (Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie, Berlin-Dahlem.) Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 9. September 1943) 487

Paul Kunze, Die spektrale Energieverteilung der Hefnerlampe. (Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Rostock.) (Eingegangen am 28. September 1943) 494

Paul Gombás, Störungsrechnung in der erweiterten statistischen Theorie des Atoms und ihre Anwendung zur Berechnung von Polarisierbarkeiten. (Eingegangen am 18. September 1943) 497

R. Bechmann, Elastische Eigenschwingungen eines rechtwinkligen Quarzparallelepipeds. (Mitteilung aus dem Laboratorium der Telefunken-Gesellschaft, Berlin.) Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 30. August 1943) 510

Josef Schintlmeister, Über Beziehungen zwischen den Halbwertszeiten der radioaktiven β-Strahler. (Aus dem II. Physikalischen Institut der Universität Wien.) Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 9. Oktober 1943) 527

R. W. Pohl und **F. Stöckmann**, Zur Behandlung der Stoffmenge als Grundgröße. (Eingegangen am 30. November 1943) 534

B. v. Borries, Über günstige Entwicklungsverfahren und Grenzauflösungsvermögen photographischer Platten für übermikroskopische Aufnahmen. (Mitteilung aus dem Laboratorium für Elektronenoptik der Siemens und Halske A.-G., Berlin-Siemensstadt.) Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 26. Oktober 1943) 539

Seite

H. F. Nissen, Zur Elektronenempfindlichkeit verschiedener photographischer Schichten. [Aus dem Wissenschaftlichen Zentral-Laboratorium der Photographischen Abteilung der I. G. Farbenindustrie A.-G. (Agfa).] Mit 16 Abbildungen. (Eingegangen am 8. Februar 1944) 573

9. bis 12. Heft.

(Abgeschlossen am 12. September 1944.)

R. Bechmann und V. Petržílka, Axiale Längsschwingungen eines geraden Stabes aus kristallinem Material. (Mitteilung aus den Laboratorien der Telefunken-Gesellschaft, Berlin und der Ostmarkwerke, Prag.) Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 16. Oktober 1943) 589

R. Suhrmann und Joh. Pietrzyk, Die Änderung der lichtelektrischen Elektronenemission beim Übergang reiner Zink-, Cadmium- und Aluminiumschichten aus dem ungeordneten in den geordneten Zustand und der Einfluß der Temperatur auf die Empfindlichkeit dieser Metalle. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 1. November 1943) 600

G. Mierdel, Ein neues Verfahren zur Untersuchung der Gasaufzehrung in der Glimmentladung. (Mitteilung aus dem Stromrichterwerk der Siemens-Schuckertwerke in Berlin-Siemensstadt.) Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 31. Dezember 1943) 614

W. Weizel, Über den Einfluß der Konvektion auf einen Lichtbogen. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Dezember 1943) 620

R. Rompe und W. Weizel, Über das Toeplersche Funkengesetz. (Eingegangen am 24. Januar 1944) 636

F. Magyar, Geschwindigkeitsverteilungen in allgemeiner Darstellung. Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 15. Dezember 1943) 640

W. Bothe, Die räumliche Verteilung abgebremster Neutronen. Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Dezember 1943) 648

H. Mahl und A. Recknagel, Über den Öffnungsfehler von elektrostatischen Elektronenlinsen. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 5. November 1943) 660

R. W. Pohl und F. Stöckmann, Zur Anwendung des Gleichheitszeichens. (Eingegangen am 10. März 1944) 680

H. Ewald, Photometrische Bestimmung seltener Isotope. Relative Isotopenhäufigkeiten und Atomgewicht von Nickel. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Dezember 1943) 686

P. Schulz und W. Weizel, Über Ionisierung und Temperatur in Hochdruckbögen. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 3. November 1943) 697

K. M. Koch, Große Barkhausen-Sprünge in tordierten, von Wechselstrom durchflossenen Drähten. Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 27. Dezember 1943) 706

Seite

H. Schluge und **W. Finkelnburg**, Über das Zischen des Homogenkohlebogens. (Untersuchungen über Hochstromkohlebögen. VII.) Mit 23 Abbildungen. (Eingegangen am 3. Juni 1943) 714

Manfred von Ardenne und **Fritz Bernhard**, Ein kernphysikalisches Verfahren zur Bestimmung geringer Kohlenstoffzusätze in Eisen. (Mitteilung aus dem Kernphysikalischen Institut des Reichspostministeriums, Berlin-Lichterfelde-Ost und der Forschungsanstalt der Friedrich Krupp, Essen.) Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 4. Februar 1944) 740

W. Bothe und **P. Jensen**, Die Absorption thermischer Neutronen in Kohlenstoff. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 21. Januar 1944) 749

Peter Jensen, Die Bremsung von Neutronen in Kohlenstoff, Wasser und schwerem Wasser. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 21. Januar 1944) 756

E. Fünfer und **W. Bothe**, Die Wechselwirkung von Neutronen und γ-Strahlen mit Beryllium. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 21. Januar 1944) 769

P. Kriesis, Über die Symmetrie des Spannungstensors in der Aerodynamik. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 8. November 1943) 778

L. von Müffling, Beitrag zur Theorie explosiver Gasreaktionen. Über den zeitlichen Ablauf isothermer Kettenexplosionen bei Kettenabbruchsreaktionen 1. und 2. Ordnung. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 26. Januar 1944) 787

Autorenregister 807

This material is restricted in use and cannot be quoted by title or abstract for propaganda purposes or in the popular press. Quotation of titles and abstracts in publications of purely technical or scientific nature is not prohibited.

(Mitteilung der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung und des Instituts für theoretische Physik der Universität Bonn.)

Zur Frage der Stabilisierung frei brennender Lichtbögen.

Von **R. Rompe, W. Thouret** und **W. Weizel** *).

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 8. März 1943.)

Ein in einem zylindrischen Rohr brennender Lichtbogen wird in seinem Verhalten durch die Anwesenheit der Wand bestimmt. Es sind deshalb die Eigenschaften derartiger Entladungen unschwer hinsichtlich ihrer Ausstrahlung, der Temperaturverteilung usw. aus der Elenbaasschen Differentialgleichung zu verstehen. Zu Schwierigkeiten kommt man jedoch, wenn man versucht, in entsprechender Weise diejenigen Entladungen bei höheren Drucken zu verstehen, bei denen der Einfluß der Wand offensichtlich nicht vorhanden ist, wie z. B. bei den kugelförmigen Höchstdrucklampen nach Rompe und Thouret. Für den Fall einer unwirksamen, d. h. im Unendlichen anzunehmenden Wand liefert die Elenbaassche Differentialgleichung des axial unendlich ausgedehnten Bogens keine vernünftigen Lösungen, und man muß sich nach anderen Möglichkeiten der Stabilisierung umsehen. Diese sind, je nach der Wahl der Betriebsparameter Druck, Leistung und Elektrodenabstand, gegeben durch 1. die Konvektionsströmung, 2. die Kontraktion der Entladung an den Elektroden, die durch den Übergangsmechanismus der Ladungsträger aus dem Plasma in die Elektroden bedingt ist, und 3. die geometrische Begrenzung der Entladung in axialer Richtung durch die Elektroden. Bei Durchrechnung eines Entladungsmodells mit endlichem Elektrodenabstand in elliptischen Koordinaten erhält man brauchbare Lösungen, die das Verhalten des Bogens der kugelförmigen Höchstdrucklampen verstehen lassen.

Als es den Eindhovener Physikern[1]) gelang, den Mechanismus der in einem Rohr eingeschlossenen Quecksilberbogensäule aus der Aufteilung der elektrischen Leistungsaufnahme in Ausstrahlung und Ableitung zur Wand zu erklären, schien im wesentlichen eine Theorie der Lichtbogensäule überhaupt gewonnen zu sein. Daß sich in sie der Kohlebogen nicht ohne weiteres einfügt, erschien als Sonderfall, der zunächst nicht viel theoretisches Interesse fand. Bald zeigte sich aber, daß die Quecksilberhochdruckentladung in den kugelförmigen Höchstdrucklampen von Rompe und Thouret[2]) nach dem Mechanismus dieser „wandstabilisierten Bogensäule" auch nicht wirklich verstanden werden konnte. Sie gehört wie der Kohlebogen oder der Schaltbogen zu den frei brennenden Lichtbögen und stellt einen selb-

*) Teilweise vorgetragen von W. Weizel auf der Berliner Tagung der Phys. Ges. u. Dtsch. Ges. f. techn. Phys. am 11. Oktober 1942.

[1]) W. Elenbaas, Physica **1**, 211, 673, 1934; **2**, 169, 757, 1935; **3**, 12, 859, 1936; G. Heller, Physics **6**, 389, 1935. — [2]) R. Rompe u. W. Thouret, ZS. f. techn. Phys. **17**, 377, 1936; **19**, 352, 1938; Techn. Wiss. Abh. Osram, Bd. 5, S. 44, im Erscheinen.

Reproduced and Distributed in the Public Interest by THE ALIEN PROPERTY CUSTODIAN

ständigen Typus dar, den man „elektrodenstabilisierte Bogenentladung" nennen kann. Eine Analyse, die wir in dieser Arbeit durchführen wollen, zeigt, daß man drei wesentlich verschiedene Bogentypen unterscheiden sollte, die man zweckmäßig als wandstabilisiert, elektrodenstabilisiert und konvektionsbestimmt bezeichnen kann.

I. Wandstabilisierte und konvektionsbestimmte Bogensäule.

In einem Lichtbogen pflegt man drei Teile zu unterscheiden: Das Kathodengebiet, das Anodengebiet und die dazwischenliegende Bogensäule, die bei nicht zu kurzen Bögen den größten Teil der Länge des Bogens einnimmt. Gewöhnlich betrachtet man die Säule als ein zylindrisches Gebilde, dessen Eigenschaften sich in der Längsrichtung nicht ändern. Bei gröberer Beschreibung kann man sie sogar als einen zylindrischen Kanal von konstanter Temperatur ansehen, in selchem überall dasselbe Leitvermögen, dieselbe Stromdichte und dieselbe Feldstärke herrscht. Diesem letzteren stark vereinfachten Modell kommt der visuelle Eindruck, den man von der Bogensäule erhält, sehr entgegen. In Wirklichkeit nimmt die Temperatur und mit ihr Leitvermögen und Stromdichte von der Achse nach außen natürlich ab und die Aufgabe der Theorie der Säule ist, diesen Abfall aus den Elementarprozessen abzuleiten.

Unter etwas vereinfachenden Annahmen ist diese Aufgabe zuerst von Elenbaas gelöst worden. Sie führt auf die Elenbaas-Hellersche Differentialgleichung der Bogensäule[1]). Diese Theorie läßt sich nun nur durchführen, wenn der Lichtbogen in einem gegen seine Länge sehr engen Rohr brennt, da die Wärmeableitung zur Rohrwand gerade die Gestalt der Säule bestimmt, wie im Abschnitt III näher ausgeführt wird. Würde man das Rohr weiter machen, dabei die Feldstärke und mit ihr die Brennspannung festhalten, so müßte die Stromstärke anwachsen und der Bogen das Rohr, von einer Wandzone abgesehen, immer noch ausfüllen. Ein frei brennender Bogen, bei dem die Wand unendlich fern ist, müßte sich seitlich beliebig ausdehnen und bei vorgegebener Brennspannung einen unendlichen Strom leiten.

Solange das Rohr noch nicht zu weit ist, wird es nun tatsächlich vom Bogen bis auf eine Randzone erfüllt, wie beispielsweise bei dem durch Fig. 1 dargestellten Quecksilberhochdruckbogen. Dieser hat eine Länge von 80 mm und brennt in einem Rohr von 8 mm lichter Weite (Druck etwa 3 Atm., Gradient 25 Volt/cm, Strom 4 Amp.), ist also eine typische wandstabilisierte Säule, wie sie der Elenbaasschen Theorie zugrunde liegt.

[1]) Vgl. G. Heller, a. a. O.

Es kann aber keine Rede davon sein, daß sich ein frei brennender Bogen seitlich beliebig ausdehnt und daß seine Stromstärke unmäßig anwächst. Es bildet sich vielmehr auch bei ihm ein Kanal von nur geringer Breite aus, der ganz ähnlich beschaffen ist wie die Bogensäule in einem Rohr. Der Bogen stabilisiert sich auch ohne Rohrwand durch einen Mechanismus, der durch die Elenbaassche Theorie nicht erfaßt wird. Mehrere voneinander verschiedene Gesichtspunkte sind hierbei zu beachten. In genügend weiten Räumen entwickelt sich wegen der Temperaturdifferenzen eine Gasströmung, die Konvektion. Von ihrer Einwirkung auf die Lichtbogensäule kann man sich etwa folgendes Bild machen: Aus dem eigentlichen Bogenkanal vermag

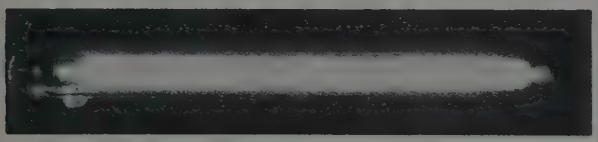
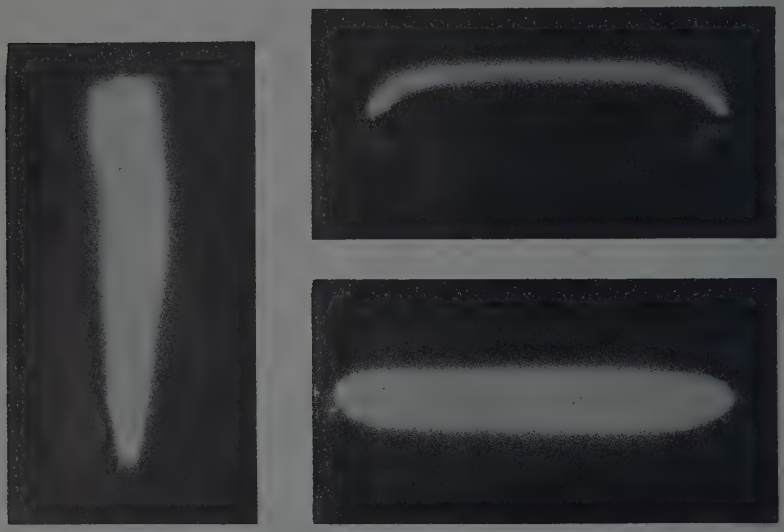


Fig. 1. Wandstabilisierte Bogensäule in engem, langem Entladungsrohr (Quecksilberhochdruckentladung bei etwa 3 Atm.).

durch echte Wärmeleitung keine Wärme ins Unendliche abzufließen, wie wir weiter unten durch Rechnung nachweisen werden. Man kann sich aber vorstellen, daß durch Wärmeleitung der Wärmetransport in die nähere Umgebung des Kanals vor sich geht, während die Konvektion dann das endgültige Hinwegschaffen übernimmt. Etwas derartiges ist tatsächlich möglich, da in der Nähe des Kanals noch große Temperaturdifferenzen vorliegen, wodurch die Leitung überwiegt, während bei den kleinen Temperaturunterschieden weiter außen die Leitung zurücksteht. Die Konvektion wirkt also so, als ob die in großer Entfernung befindliche Gefäßwand näher herangerückt wäre, indem sie den Wärmetransport von dieser virtuellen Wand zu der wirklichen übernimmt. Man kann nun das Problem wieder mit der Elenbaas-Hellerschen Gleichung behandeln, indem man die virtuelle Wand als Rohrwand einsetzt und muß deshalb der Konvektion die Fähigkeit zur Begrenzung des Bogenkanals und somit eine Querstabilisierung zutrauen. Daß man den Radius des virtuellen Rohres nicht weiß, ändert nichts an der Möglichkeit, daß der Bogen sich tatsächlich auf diese Weise stabilisiert.

Fig. 2 zeigt denselben, d. h. bei gleichem Druck, gleichem Elektrodenabstand und gleicher spezifischer Bogenleistung (Watt pro cm Bogenlänge) brennenden Quecksilberhochdruckbogen wie Fig. 1, jedoch in einem weiten Rohr von 40 mm lichter Weite (Druck etwa 3 Atm., Gradient 15 V/cm, Strom 6 Amp.). Man sieht (zunächst bei Betrachtung von Fig. 2a), daß von

einer vollständigen Erfüllung des Rohres durch die Säule keine Rede sein kann. Die sich im weiten Rohr ausbildende Konvektionsströmung übernimmt teilweise die stabilisierende Wirkung der Wand und bildet einen schmalen, von Wandeinflüssen in erster Näherung freien Bogenkanal. Dieser Kanal besitzt allerdings auch etwas von den Turbulenzeigenschaften der Konvektion, d. h. er macht, wie die Fig. 2a erkennen läßt, die schlängelnde und fächelnde Bewegung der Gasströmung mit. In waagerechter Lage (Fig. 2b) wird die Bogensäule durch die Konvektion nach oben mitgenommen



a c

Fig. 2. Konvektionsbestimmte Bogensäule in sehr weitem Entladungsrohr (Quecksilberhochdruckentladung bei etwa 3 Atm., Gradient 15 V/cm, Strom 6 Amp., Bogenlänge 80 mm, Rohrdurchmesser innen 40 mm).
a) Senkrecht brennend, b) waagerecht, c) waagerecht, mit 600 U/min um die Achse rotierend.

und gegen die Rohrwand gedrückt. Wäre das Rohr wesentlich weiter, so würde die Konvektionsströmung die Säule halbkreisförmig nach oben durchbiegen zu der Form, von der der Lichtbogen seinen Namen hat. Versetzt man das Entladungsgefäß in waagerechter Lage in schnelle Umdrehungen um die Bogenachse, so wird die Wirkung der Konvektion zumindest zum größten Teil aufgehoben, wie Fig. 2c erläutert: Die Durchbiegung nach oben verschwindet und der Bogenkanal verbreitert sich erheblich[1]).

[1]) Über Untersuchungen von Quecksilberhochdruckbögen bei durch Rotation aufgehobener Konvektionswirkung wird Frl. E. Kinzer, der wir auch alle in dieser Arbeit enthaltenen Aufnahmen von Lichtbögen verdanken, noch näher berichten.

II. Elektrodenstabilisierter Bogen.

Nicht alle frei brennenden Lichtbögen zeigen jedoch das Verhalten, das man von einer konvektionsbestimmten Entladung erwartet. Der Quecksilberhochdruckbogen, wie er in den Kugel-Höchstdrucklampen nach Rompe und Thouret[1]) brennt, verhält sich ganz wesentlich anders. Bei diesen Lampen, deren äußere Form (der Typen mit 200 und 1000 Watt Leistungsaufnahme) die Fig. 3 und 4 zeigen, hat man einen Bogen von wenigen Millimetern bis zu etwa 1 cm Länge zwischen zwei zugespitzten Wolframelektroden mit einem Kanaldurchmesser von ebenfalls wenigen

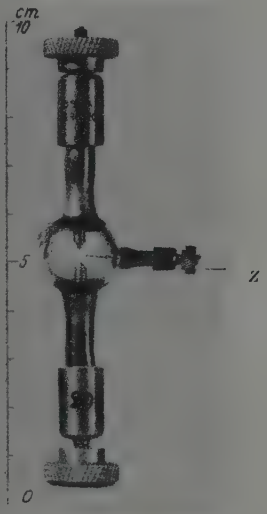


Fig. 3. Kugelförmige Quecksilberhöchstdrucklampe nach Rompe und Thouret mit 200 Watt Leistungsaufnahme (Technische Lampentype HBO 200, Lampenspannung 60 bis 70 Volt, Betriebsdruck etwa 60 Atm., mittlere Leuchtdichte 25000 Stilb bei den Leuchtfeldabmessungen 2,5 × 1,2 mm). *Z*: Zündelektrode.

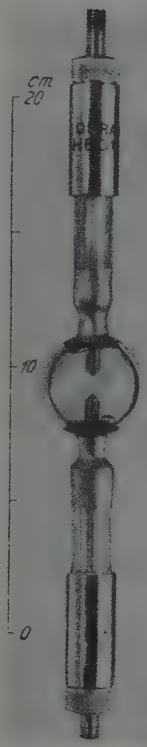


Fig. 4. Kugelförmige Quecksilberhöchstdrucklampe mit 1000 Watt Leistungsaufnahme (Type HBO 1000, Lampenspannung 80 bis 90 Volt, Betriebsdruck 30 Atm., mittlere Leuchtdichte 30000 Stilb bei den Leuchtfeldabmessungen 5,5 × 3 mm).

Millimetern. Daß die Säule nicht wesentlich durch Konvektion bestimmt ist, kann man experimentell aus mehreren Umständen erkennen. Wenn die Konvektion die Gestalt des Kanals wesentlich beeinflussen würde, müßte

[1]) Vgl. Fußnote 2, S. 1 sowie O. Höpcke u. W. Thouret, Kinotechnik **20**, 148, 1938.

sich in horizontaler Lage die Säule nach oben durchbiegen. Dies ist normalerweise nicht der Fall. Bei schneller Rotation der Lampe in waagerechter Lage um den Bogenkanal als Achse müßte sich der Kanaldurchmesser wegen der Verminderung der Konvektion vergrößern. Dies

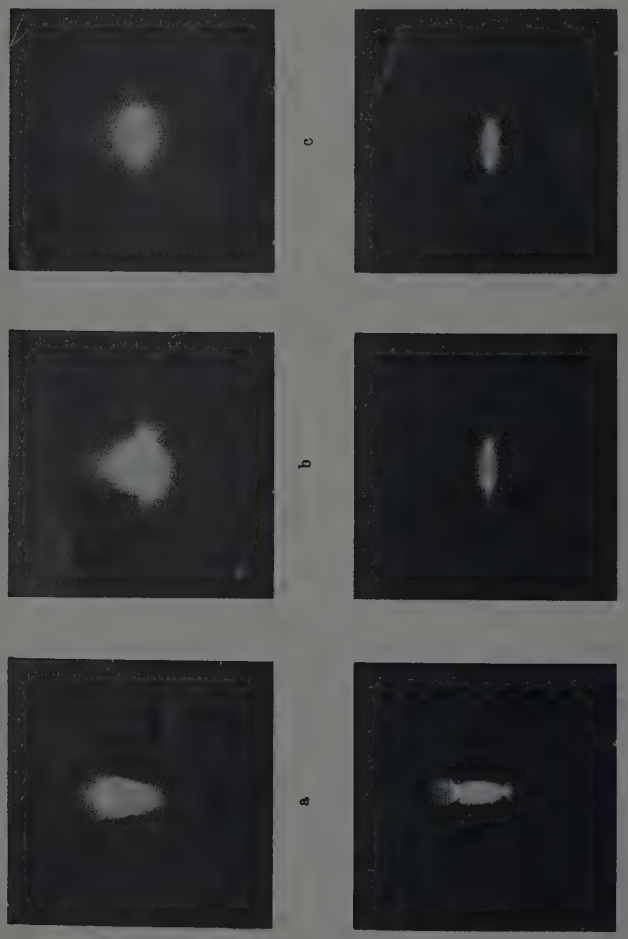


Fig. 5. Elektrodenstabilisierte Bogensäule einer Kugelhöchstdrucklampe (technische Lampentype HBO 1000, vgl. Fig. 4). a) Senkrecht brennend, b) waagerecht, c) waagerecht, mit 600 U/min um die Achse rotierend, d), e) und f) wie a), b) und c), jedoch zwecks Unterdrückung der Fackel durch Rotfilter (RG 1, 1 mm) aufgenommen.

trifft ebenfalls in keiner Weise zu. Fig. 5 soll dies, soweit es mit photographischen Aufnahmen des Bogens möglich ist, erläutern: Die Bilder a), b) und c) zeigen als Beispiel den Bogen der durch Fig. 4 dargestellten Kugelhöchstdrucklampe von 1000 Watt einmal in senkrechter Lage (Fig. 5a), dann waagerecht (Fig. 5b) und schließlich waagerecht mit

600 U/min um den Bogen als Achse rotierend (Fig. 5c). Diese Aufnahmen lassen erkennen, daß der Bogenkanal von einer schwächer leuchtenden Fackel umgeben ist, die wie bei einer Gasströmung erwartet werden muß, der Einwirkung der Schwerkraft unterliegt. Um deutlicher hervortreten zu lassen, wie wenig der eigentliche Bogenkanal von der Konvektion beeinflußt ist, wurden die Aufnahmen 5a bis c unter Zwischenschaltung eines Rotfilters (RG 1, 1 mm) wiederholt, welches die Strahlung der Fackel (herrührend von dem blau-grünen Triplett 4047, 4358, 5461 Å) praktisch vollkommen unterdrückt. So ergaben sich die Bilder 5d bis 5f, die deutlich zeigen, daß der eigentliche stromführende Bogenkanal (von dem auch praktisch die gesamte Ausstrahlung herrührt) weder durch die Brennlage noch durch die Aufhebung der Schwerkraftwirkung bei der Rotation in seiner Gestalt und seinen Abmessungen wesentlich beeinflußt wird[1]). Das verschiedene Aussehen der Bilder 5a bis c rührt nur von der sogenannten Fackel her, die mit dem Bogenkanal nichts zu tun hat. Sie ist stets nach oben gerichtet, läßt bei visueller Beobachtung die fächelnde Bewegung einer Gasströmung erkennen und wird bei der Rotation der Lampe deutlich sichtbar aufgerollt, ohne daß sich am Kanal etwas ändert.

Die Beobachtung der Eigenschaften dieser Lichtbögen zwingt uns also zu der Annahme, daß sie weder durch die Rohrwand, noch durch die Konvektion stabilisiert sind. Der Kanalquerschnitt wird bei diesen verhältnismäßig kurzen Bögen vielmehr von den Elektroden her bestimmt. An den Elektroden tritt zunächst die Querschnittseinschränkung ein, die als Brennfleckbildung bekannt ist. Sie kommt daher, daß durch die Kontraktion der Entladung in den Raumladungsschichten, welche vor den Elektroden liegen, die Stromdichte vergrößert und gleichzeitig der Spannungsbedarf erniedrigt wird. Den Mechanismus dieses Vorganges haben wir früher im einzelnen diskutiert[2,3]). Bei langen Bögen muß also in den elektrodennahen Gebieten ein Übergang von dem kleinen Entladungsquerschnitt im Brennfleck zu dem wesentlich größeren durch die Rohrwand oder die Konvektion festgelegten vor sich gehen (vgl. hierzu Fig. 1 und 2). Je kleiner der Elektrodenabstand ist, desto mehr muß die von den Brennflecken herrührende Kontraktion auf die Säule selbst übergreifen. So entsteht die elliptische Form des z. B. durch Fig. 5 dargestellten kurzen Bogens der Kugelhöchstdruck-

[1]) Die Unempfindlichkeit des Bogens der Kugelhöchstdrucklampen gegenüber Änderungen der Brennlage ist natürlich bei der Anwendung dieser Lampen in beweglichen Geräten von Bedeutung. — [2]) W. Weizel, R. Rompe u. M. Schön, ZS. f. Phys. **115**, 179, 1940. — [3]) R. Rompe u. W. Weizel, ebenda **119**, 366, 1942.

lampen. Bei sehr kurzen Bögen hat man deshalb Kanaldurchmesser, die hauptsächlich durch die Brennfleckgröße bestimmt und viel kleiner sind, als es einer konvektionsstabilisierten Entladung entspricht. Ein extremes Beispiel hierzu ist der durch Fig. 6 wiedergegebene Bogen einer kugelförmigen Quecksilberhöchstdrucklampe mit sehr kleinem, nur 0,6 mm betragendem Elektrodenabstand. Dieser Bogen besteht nur aus den elektrodennahen, der Kontraktion durch die Brennflecke unterliegenden Gebieten, weist daher eine nahezu kreisrunde Form und sehr hohe Strahlungs- bzw. Leuchtdichte auf (vgl. die Bildunterschrift Fig. 6).

Bei diesen Überlegungen war noch vorausgesetzt, daß die Elektroden un-

Gestalt des Bogens.

Fig. 6. Kugelförmige Quecksilberhöchstdrucklampe mit extrem kurzem Bogen sehr hoher Leuchtdichte (technische Lampentype HBO 207, Leistung 200 Watt, Betriebsdruck 60 Atm., Strom 6 bis 7,5 Amp., mittlere Leuchtdichte 100000 Stilb bei den Leuchtfeldabmessungen 0,6 × 0,3 mm).

endlich ausgedehnte Flächen sind, auf denen die Entladung an jeder Stelle ansetzen kann. Sind die Elektroden zugespitzt, so bilden sich die Brennflecke an den Spitzen aus und der Bogen überbrückt den Elektrodenzwischenraum auf dem kürzesten Wege. Ein Ansetzen an anderen Stellen würde den Stromweg verlängern und die Brennspannung steigern. Auf diese Weise wird der Elektrodenansatz stärker zusammengehalten und die Entladung vor den Elektroden noch mehr kontrahiert als dies durch die Brennfleckbildung an sich schon geschehen würde. Die Einschnürung vor den Elektroden setzt sich bei kurzen Bögen auch in die Säule hinein durch, weil die Stromlinien bei einer Ausdehnung der Säule stark gekrümmt und verlängert und damit die Feldstärke herabgesetzt würde.

Dieser direkte Elektrodeneinfluß kann sich aber nur bei Bögen entscheidend auswirken, deren Länge mit ihrem Durchmesser vergleichbar ist. Bei gestreckteren Bögen würde eine Ausdehnung des Durchmessers nur eine geringe Verlängerung der Stromwege erfordern. Tatsächlich stabilisieren

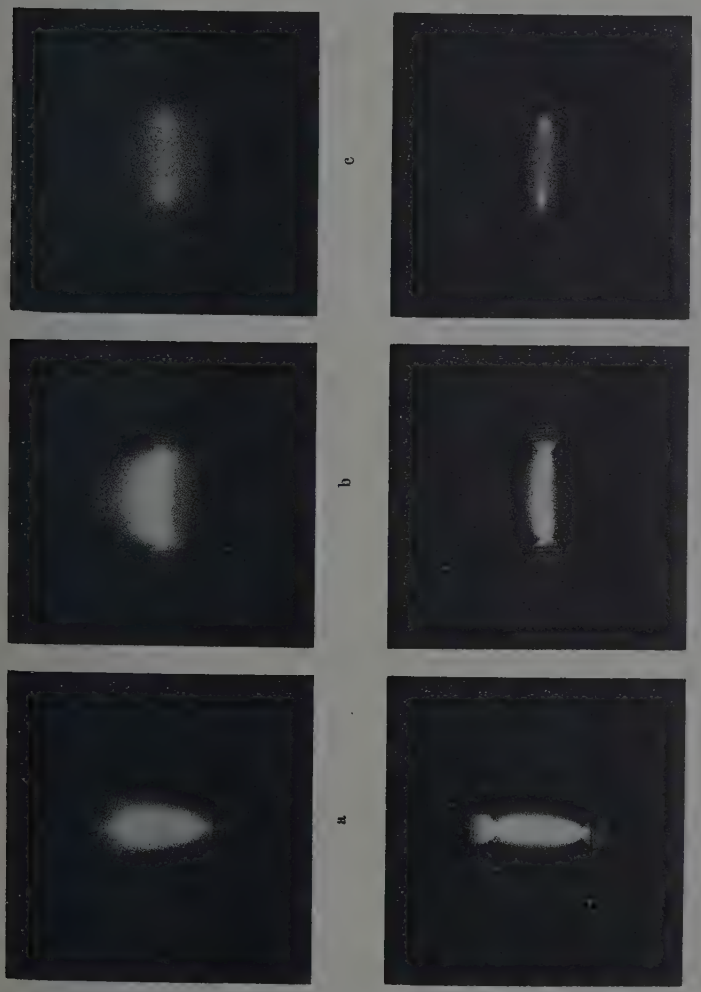


Fig. 7. Elektrodenstabilisierte Bogensäule einer Kugel-Höchstdrucklampe mit verhältnismäßig langem Bogen (Versuchslampe 2000 Watt, Druck 25 Atm., Bogenlänge 16 mm). a) Senkrecht brennend, b) waagerecht, c) waagerecht, mit 600 U/min um die Achse rotierend, d) e) und f) wie a), b) und c), jedoch durch Rotfilter (RG 1, 1 mm) aufgenommen.

sich aber auch Bögen noch ohne Wand und Konvektion, wenn ihre Länge das 5- bis 10fache ihres Durchmessers beträgt. Dies sieht man an den Aufnahmen der Fig. 7, die an einer Kugelhöchstdrucklampe mit dem großen Elektrodenabstand von 16 mm gemacht sind. Die 6 Aufnahmen sind analog

zu den Bildern 5 a bis f unter denselben Bedingungen (senkrecht, waagerecht und rotierend sowie ohne und mit Rotfilter zur Unterdrückung der Fackel) hergestellt, um die Unempfindlichkeit auch dieses längeren Bogens gegenüber Einflüssen der Konvektionsströmung zu zeigen. Wir werden weiter unten durch eine Rechnung zeigen können, daß bei *endlichem Elektrodenabstand* Stabilisierung durch die Wärmeableitung ins Unendliche ohne Wand und ohne Konvektion möglich ist, während etwas derartiges bei einer unendlich langen Bogensäule nicht eintreten kann. Die Elektroden bewirken also auch insofern eine Stabilisierung, als sie die Länge der Bogensäule begrenzen. Man kann schon ohne Rechnung voraussehen, daß der Kanaldurchmesser bei sonst gleichen Verhältnissen mit der Bogenlänge zunehmen muß, bis der Durchmesser erreicht wird, der durch die Konvektion oder die Wand stabilisiert wird. Kommt man bei immer weiterer Verlängerung des Bogens zur konvektionsstabilisierten Entladung, so kann die Säule allerdings nicht mehr ruhig brennen, sondern muß das Flackern und Fächeln mitmachen, das mit der Strömung verbunden ist.

Wir möchten also empfehlen, nach dem Mechanismus der Stabilisierung des Bogenquerschnitts folgende Typen von Bogensäulen zu unterscheiden:

1. Die wandstabilisierte Säule. Sie bildet sich in so engen Röhren aus, daß der Bogen das Rohr bis auf eine Wandzone erfüllt. Sie kann ohne großen Fehler durch das Modell eines zylindrischen oder unendlich langen Bogens ersetzt werden und ist wenigstens im Prinzip durch die Elenbaas-Hellersche Differentialgleichung zu beschreiben (vgl. Fig. 1).

2. Die konvektionsbestimmte Entladung. Diese Bogenform erfordert einen langen Bogen in einem weiten Rohr. Es ist aber nicht zu erwarten, daß die Konvektion einen ruhig brennenden Bogen herstellt, sondern der durch sie bestimmte Bogen wird unruhig hin und her flackern oder sich der turbulenten Gasströmung entsprechend schlängeln oder winden, d. h. flammenartigen Charakter annehmen (vgl. Fig. 2). Aus diesem Grunde bezeichnen wir den Bogen als konvektionsbestimmt, nicht aber als konvektionsstabilisiert, da eine Stabilisierung im strengen Sinne nicht eintritt.

3a. Die durch die Brennflecke stabilisierte Entladung. Sie entsteht bei sehr kleinen Elektrodenabständen, bei denen es gar nicht zur Ausbildung einer ungestörten Säule kommt (vgl. Fig. 6).

3b. Die durch die endliche Länge vermöge der Wärmeableitung stabilisierte Entladung. Diese Entladung wird bei mittleren Elektrodenabständen in frei brennenden Bögen die Regel sein. Die Bogensäule ist nicht zylindrisch, sondern spindelförmig bzw. hat die Form eines gestreckten Ellipsoides. Der

Querschnitt wächst etwas mit der Bogenlänge an (vgl. Fig. 5 und 7). Hier versagt also das zylindrische Modell.

Die Formen 3a und 3b kann man zweckmäßig zusammengefaßt als elektrodenstabilisierte Bögen bezeichnen. Geht man von kleinen Bogenlängen zu größeren, so hat man zuerst stets die Form 3a, später 3b zu erwarten, die je nach der Rohrweite entweder in 1 oder 2 übergehen, wenn man den Elektrodenabstand weiter vergrößert.

III. Die Theorie des Säulenplasmas und die Unmöglichkeit der Querstabilisierung eines unendlich langen frei brennenden Lichtbogens.

Um die skizzierten Überlegungen quantitativ zu formulieren, stellen wir zuerst die Gleichungen auf, die das Plasma einer Lichtbogensäule beschreiben. Ist $\mathfrak{E}$ die Feldstärke, n_i bzw. n_e die Dichte der Ionen bzw. der Elektronen, i_i bzw. i_e die von Ionen bzw. Elektronen getragene Stromdichte, so gelten zwischen diesen fünf Größen zunächst folgende vier Gleichungen:

Die Poissonsche Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi e\,(n_i - n_e), \tag{1}$$

die die Feldstärke mit der Raumladung verknüpft, die Stationaritätsbedingung

$$\operatorname{div}(i_e + i_i) = 0, \tag{2}$$

die für alle Ströme gilt, die Gleichung

$$i_e = e b_e n_e \cdot \mathfrak{E} + e D_e \operatorname{grad} n_e, \tag{3}$$

die den Elektronenstrom durch Drift im Feld und Diffusion gibt und

$$i_i = e b_i n_i \mathfrak{E} - e D_i \operatorname{grad} n_i, \tag{4}$$

die dasselbe für den Ionenstrom besagt. Hierzu können wir noch als 5. Beziehung

$$\operatorname{div} i_e = -e\Delta \tag{5}$$

hinzufügen. Diese Gleichung sagt aus, daß der Überschuß Δ der in der Volumeneinheit erzeugten Elektronen über die dort vernichteten als Quelle des Elektronenstromes anzusehen ist. Da $-\frac{1}{e}\operatorname{div} i_e$ die Anzahl der Elektronen ist, die aus der Volumeneinheit herausfließen, so ist $-U_i \operatorname{div} i_e$ der Energieaufwand, der zur Trägerbildung in cm^3 nötig ist. Er ist gleich der Stromleistung $\mathfrak{E}(i_i + i_e)$ abzüglich des Strahlungsverlustes S und des Energieverlustes durch Wärmeleitung

$$-\operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} T),$$

wenn $\varkappa$ den Wärmeleitungskoeffizienten bedeutet. Durch Multiplizieren mit der Ionisierungsspannung U_i geht also (5) in die Energiebilanz

$$-U_i \operatorname{div} i_e = \operatorname{div} \varkappa \operatorname{grad} T - S + \mathfrak{E}(i_e + i_i) \tag{6}$$

über. Jetzt ist allerdings noch die Temperatur als neue Größe hereingekommen. Es wird deshalb noch eine weitere Gleichung notwendig, die auch in der Saha-Gleichung

$$n_i n_e = \frac{k^{1/2} T^{1/2}}{h^3} p (2\pi m)^{3/2} e^{-\frac{e U_i}{k T}} \tag{7}$$

zur Verfügung steht.

Der Unterschied der Trägerdichten in der Lichtbogensäule ist klein gegen die Trägerdichte selbst. Wir können deshalb das Plasma als quasineutral ansehen,

$$n_i = n_e = n \tag{8}$$

schreiben und dafür die Gleichung (1) einsparen.

Jetzt betrachten wir die Säule als unendlich lang bzw. zylindersymmetrisch, legen die x-Achse parallel zu ihr und führen Zylinderkoordinaten x, r, φ ein. Aus Symmetriegründen sind dann alle Größen von x und φ unabhängig. Spalten wir noch die Stromdichten und die Feldstärke in Längs- und Radikalkomponenten auf, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$i_{ex} + i_{ix} = i, \tag{2a}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r (i_{er} + i_{ir}) = 0, \tag{2b}$$

$$i_{ex} = e b_e n \mathfrak{E}_x, \tag{3a}$$

$$i_{er} = e b_e n \mathfrak{E}_r + e D_e \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}, \tag{3b}$$

$$i_{ix} = e b_i n \mathfrak{E}_x, \tag{4a}$$

$$i_{ir} = e b_i n \mathfrak{E}_r - e D_i \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}. \tag{4b}$$

$$-U_i \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} i_r r = \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r \varkappa \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} - S + \mathfrak{E}_x i + \mathfrak{E}_r (i_{e_r} + i_{i_r}), \tag{6a}$$

$$n = \frac{(2\pi m)^{3/4}}{h^{3/2}} k^{1/4} T^{1/4} p^{1/2} e^{-\frac{U_i e}{2kT}}. \tag{7a}$$

Wir schreiben die Gleichungen in solcher Ausführlichkeit an, um klar zu sehen, welche Vorgänge berücksichtigt sind und welche vernachlässigt werden.

Da in radialer Richtung kein elektrischer Strom fließt, ist überall

$$i_{er} + i_{ir} = 0, \tag{2c}$$

was auch als Integral von (2b) anzusehen ist. Durch Addieren von (3a) und (4a) erhalten wir bei Berücksichtigung von (2a)

$$i = en\,(b_e + b_i)\,\mathfrak{E}_x. \tag{8}$$

Nun multiplizieren wir (3b) mit b_i und (4b) mit b_e und subtrahieren um

$$i_{e_r} b_i - i_{i_r} b_e = e\,(b_i D_e + b_e D_i)\,\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} \tag{9}$$

zu erhalten. Da nach (2c) $i_{i_r} = -\,i_{e_r}$ ist, finden wir daraus unter Verwendung des ambipolaren Diffusionskoeffizienten

$$D_{amb} = \frac{b_i D_e + b_e D_i}{b_e + b_i}$$

den radialen Elektronenstrom

$$i_{e_r} = e D_{amb} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}. \tag{9a}$$

Setzen wir diese Werte von i_{e_r} und i aus (8) in (6a) ein und beachten dabei (2c), so gelangen wir zu

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r\left(\varkappa \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} + e U_i D_{amb} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\right) = -\,e\,(b_e + b_i)\,n\,\mathfrak{E}_x^2 + S. \tag{10}$$

Da n durch (7a) als Funktion der Temperatur bekannt und S ebenfalls eine Funktion der Temperatur ist, stellt dies eine Differentialgleichung für T als Funktion von r dar, gibt also die radiale Temperaturverteilung.

Von dem Glied

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,e\,U_i D_{amb} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\right) \tag{11}$$

abgesehen, ist dies die Elenbaas-Hellersche Differentialgleichung[1]). Der neu hinzugetretene Anteil (11) stellt die Wärmeleitung durch Trägerdiffusion dar, deren Bedeutung schon von Rompe und Schulz[2]) erkannt worden ist. Schreiben wir

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T} \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r},$$

so geht (10) in

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r\left(\varkappa + e\,U_i D_{amb} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T}\right)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\,e\,(b_e + b_i)\,n\,\mathfrak{E}_x^2 + S \tag{10a}$$

über und an Stelle der klassischen Wärmeleitung $\varkappa$ tritt der Ausdruck

$$\varkappa + e\,U_i D_{amb} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T}, \tag{12}$$

den man als totales Wärmeleitvermögen auffassen kann. Es ist noch stark von der Temperatur abhängig. Da $\mathrm{d}n/\mathrm{d}T$ sich aus (7a) leicht berechnen

[1]) Vgl. G. Heller, a. a. O. — [2]) R. Rompe u. P. Schulz, ZS. f. Phys. **113**, 10, 1939.

läßt, wird an der Elenbaasschen Gleichung durch Hinzufügen dieses Gliedes nichts Grundsätzliches geändert. Die rechte Seite ist eine bekannte Funktion der Temperatur, da auch die Ausstrahlung

$$S = \frac{A\,p}{k\,T}\,e^{-\frac{e\,U_a}{k\,T}} \tag{13}$$

durch die Temperatur allein bestimmt ist (U_a ist die mittlere Anregungsspannung, p der Druck und A eine Konstante, die die Übergangswahrscheinlichkeiten enthält).

Zu der Gleichung (10a) treten zwei Randbedingungen. In der Rohrmitte muß die Temperatur ein Maximum haben. Daraus ergibt sich

$$r = 0; \qquad \frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,r_i} = 0. \tag{14}$$

Auf der Wand des Rohres ist die Temperatur vorgeschrieben und möge den Wert T_R haben. Bezeichnet R den Rohrradius, so ergibt sich hieraus die zweite Randbedingung

$$r = R; \quad T = T_R. \tag{15}$$

Bei einem frei brennenden Bogen tritt an ihre Stelle

$$r = \infty; \quad T = T_\infty. \tag{15a}$$

Die Erfüllung der Randbedingung (15) macht in keinem Falle Schwierigkeiten. Um dies zu verfolgen, setzen wir zur Abkürzung

$$-\,e\,(b_e + b_i)\,n\,\mathfrak{E}_x^2 + S = f(T); \qquad \varkappa + e\,U_i D_{amb}\frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,T} = \varphi(T),$$

wodurch (10a) in

$$\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}\left(r\,\varphi\,\frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,r}\right) = f(T) \tag{16}$$

übergeht. Rechnet man die linke Seite aus, so gelangt man zu

$$\frac{1}{r}\,\varphi\,\frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,r} + \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,T}\left(\frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,r}\right)^2 + \varphi\,\frac{\mathrm{d}^2\,T}{\mathrm{d}\,r^2} = f(T). \tag{16a}$$

In der Nähe von $r = 0$ können wir hierfür die Reihenentwicklung

$$T = T_0 + a_2 r^2 + \cdots \tag{17}$$

ansetzen, die die Randbedingung (15) befriedigt. Durch Einsetzen in (16a) finden wir an der Stelle $r = 0$

$$4\,a_2\varphi\,(T_0) = f\,(T_0)$$

zur Bestimmung von a_2.

Die Bedingung (15a) für den frei brennenden Bogen ist aber unerfüllbar. Bei niedriger Temperatur geht sowohl S wie n schnell gegen Null, so daß

wir in einiger Entfernung von der Bogenachse $f = 0$ setzen dürfen. Nun läßt sich (16) einmal integrieren, wodurch wir

$$r\varphi \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = C_1 \tag{18}$$

erhalten. Unter ψ verstehen wir jetzt eine Funktion der Temperatur, welche mit φ durch

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}T} = \varphi$$

zusammenhängt. Bringen wir dies in (18) ein, so entsteht

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r} = \frac{C_1}{r}, \tag{19}$$

was durch nochmalige Integration

$$\psi = C_1 \ln r + C_2 \tag{19a}$$

liefert. Im unendlichen muß die Temperatur und damit auch ψ endlich bleiben. Dies ist nur möglich, wenn C_1 verschwindet, wodurch allerdings ψ und damit auch die Temperatur konstant wird.

Es gibt also zwei Möglichkeiten. Entweder die Temperatur im unendlichen ist so niedrig, daß dort keine Ausstrahlung und kein Leitvermögen vorhanden ist. Dann muß auch im ganzen Raum die Temperatur diesen niedrigen Wert haben. Dies ist eine triviale Lösung, bei der der Bogen nicht gezündet ist. Die zweite Möglichkeit wäre, daß im Unendlichen eine so hohe Temperatur herrscht, daß der Ansatz $f = 0$ nicht gemacht werden darf. Dies bedeutet aber, daß sich der Bogen bis ins Unendliche ausdehnt.

Es ist bemerkenswert, daß wir keine besonderen Annahmen über die Abhängigkeit der Funktion φ von T machen müssen, um zu diesem Resultat zu gelangen. Es ist deshalb auch ganz unabhängig von der Temperaturabhängigkeit des Wärmeleitvermögens. Ja, es wäre nicht einmal notwendig, daß n mit der Temperatur über die Sahasche Gleichung und S über die Formel (13) zusammenhängt. In jedem Fall gilt die Aussage, daß der Bogen entweder überhaupt nicht brennt, oder bis ins Unendliche reicht. Dies ist also eine Feststellung, die wenig mit den Vorgängen im Bogen selbst zu tun hat und die deshalb auch kaum durch eine Kritik an dem der Theorie des Bogens zugrunde gelegten Mechanismus erschüttert werden kann. Dieses Ergebnis folgt vielmehr einfach aus der Zylindersymmetrie des Problems und wir müssen schließen, daß wir die Stabilisierung des Bogens nur verstehen können, wenn wir die Bogensäule nicht mehr als unendlich lang behandeln. Es ist sogar anzunehmen, daß auch die Berücksichtigung der Konvektion, wenn sie wirklich rechnerisch durchgeführt werden

könnte, über die aufgezeigte Schwierigkeit nicht hinwegführen würde, solange die Bogensäule als unendlich lang angenommen wird.

Die aufgezeigte Schwierigkeit der Wärmeabfuhr von einer unendlich langen zylindrischen Wärmequelle ist übrigens gar nicht für den Lichtbogen charakteristisch. Auch ein unendlich langer geheizter Draht muß schon den ganzen Raum auf eine Temperatur bringen, die dem Strahlungsgleichgewicht entspricht. Dies ist vielleicht der stärkste Hinweis darauf, daß das Problem der Querstabilisierung des frei brennenden Bogens nur gelöst werden kann, wenn man berücksichtigt, daß er nur eine endliche Länge hat und wenn man ein entsprechendes Wärmeleitproblem untersucht.

IV. Theorie eines Bogens endlicher Länge.

Der Elektrodenabstand eines Lichtbogens sei d. Wir legen zunächst die x-Achse eines Koordinatensystems in die Bogenachse, den Anfangspunkt in die Mitte des Bogens. Statt der Koordinaten x, y, z führen wir nun elliptische Koordinaten μ, ν, φ durch die Transformation

$$x = \frac{d}{2}\,\mu\,\nu,$$

$$y = \frac{d}{2}\sqrt{(\mu^2-1)\,(1-\nu^2)}\cos\varphi,$$

$$z = \frac{d}{2}\sqrt{(\mu^2-1)\,(1-\nu^2)}\sin\varphi$$

ein. Die Flächen $\mu = \text{const}$ sind Rotationsellipsoide

$$\frac{4\,(y^2+z^2)}{d^2\,(\mu^2-1)} + \frac{4\,x^2}{d^2\,\mu^2} = 1,$$

die Flächen $\nu = \text{const}$ zweischalige Hyperboloide

$$\frac{4\,x^2}{d^2\,\nu^2} - \frac{4\,(y^2+z^2)}{d^2\,(1-\nu^2)} = 1.$$

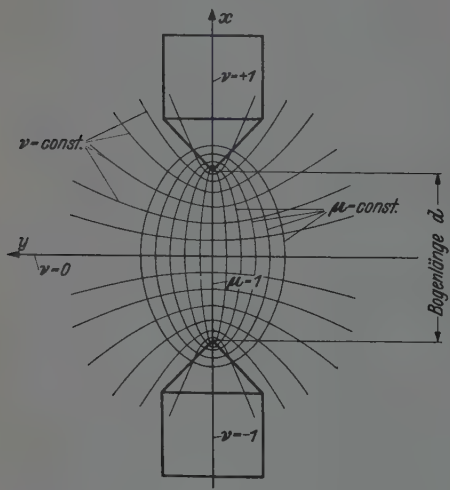


Fig. 8. Elliptisches Koordinatensystem zur Theorie des Bogens endlicher Länge (Bogenlänge d, Koordinaten in Richtung der Bogenachse: Rotationsellipsoide $\mu = \text{const}$, Koordinaten senkrecht zur Bogenachse: zweischalige Rotationshyperboloide $\nu = \text{const}$).

Die Brennpunkte all dieser Flächen liegen in den Brennflecken auf den Elektroden. Diese gehören zu den Werten $\mu = 1$; $\nu = \pm 1$ der Koordinaten. Auf der Bogenachse ist $\mu = 1$, während ν die Werte von -1 bis $+1$ durchläuft. $\nu = 0$ ist die zur Bogenachse senkrechte Ebene in der Mitte zwischen beiden Elektroden (siehe Fig. 8).

Aus Symmetriegründen hängen die uns interessierenden Größen $\mathfrak{E}$, i, i_e, i_i, n und T nicht von der Koordinate φ ab. Sehen wir von der Umgebung der Elektroden ab, so werden die Stromlinien Ellipsen auf den Flächen $\mu = \text{const}$ sein und die Stromdichte i wird also nur eine Komponente i_ν besitzen.

Nun zerlegen wir die Stromdichten i_e und i_i in die Komponenten $i_{e\mu}$, $i_{e\nu}$, $i_{i\mu}$ und $i_{i\nu}$, ebenso die Feldstärke $\mathfrak{E}$ in die Komponenten $\mathfrak{E}_\mu$ und $\mathfrak{E}_\nu$. Dann ist

$$i_\nu = i_{e\nu} + i_{i\nu}, \tag{20}$$

$$i_\mu = i_{e\mu} + i_{i\mu} = 0. \tag{21}$$

Die Gleichung (2) liefert uns

$$\operatorname{div} i = 0. \tag{22}$$

Die Gleichungen (3) und (4) müssen in je zwei Komponenten aufgespalten werden, wobei wir natürlich $n_e = n_i = n$ setzen. In dem mittleren Teil des Bogenkanals dürfen wir sicher annehmen, daß n sich auf den Ellipsoiden $\mu = \text{const}$ nicht ändert, also nicht von ν abhängt. Damit verschwindet $\operatorname{grad}_\nu n$. Wir erhalten dann die Gleichungen

$$i_{e\nu} = e\, b_e n\, \mathfrak{E}_\nu, \tag{23a}$$

$$i_{e\mu} = e b_e n\, \mathfrak{E}_\mu + e\, D_{amb} \operatorname{grad}_\mu n, \tag{23b}$$

$$i_{i\nu} = e b_i n\, \mathfrak{E}_\nu, \tag{24a}$$

$$i_{i\mu} = e b_i n\, \mathfrak{E}_\mu - e\, D_{amb} \operatorname{grad}_\mu n. \tag{24b}$$

Durch Addieren von (23a) und (24a) ergibt sich

$$i_\nu = e\,(b_e + b_i)\, n\, \mathfrak{E}_\nu. \tag{25}$$

Wenn man (23b) mit b_i und (24b) mit b_e multipliziert, subtrahiert und (21) benutzt, erhält man

$$i_{e\mu} = e D_{amb} \operatorname{grad}_\mu n = \frac{2eD_{amb}}{d} \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 - \nu^2}}\, \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\mu}. \tag{26}$$

Verwendet man (21, 23a, 24a), so geht aus (6) die Gleichung

$$\operatorname{div}(U_i i_e + \varkappa \operatorname{grad} T) = S - \mathfrak{E}_\nu i_\nu = S - \mathfrak{E}_\nu^2 e\,(b_e + b_i)\, n \tag{27}$$

hervor. Zuletzt kommt noch die Saha-Gleichung

$$n = \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/4} k^{1/4} T^{1/4} p^{1/2} e^{-\frac{eU_i}{2kT}} \tag{7a}$$

hinzu.

Wir könnten nun $\operatorname{div} i_e$ berechnen, indem wir (23a) und (26) verwenden und in (27) einsetzen, um eine Gleichung für T zu erhalten. Dieses ziemlich schwerfällige Verfahren ist nicht lohnend. Wir wollen deshalb gleich einige

Vernachlässigungen durchführen, welche keinen großen Fehler verursachen, aber die Überlegung sehr verflüssigen. Die Trägerdichte n, die Stromdichte i_e und die Ausstrahlung S haben nur im eigentlichen Entladungskanal beachtliche Werte. Da dieser aber ein sehr gestrecktes Ellipsoid darstellt, werden sich alle diese Größen in der Längsrichtung wenig, in der Querrichtung dagegen stark ändern. Sie hängen also nicht von der Koordinate ν, sondern nur von μ ab. Dies gilt nicht mehr weit außerhalb des Kanals, wo wir diese Größen aber sowieso vernachlässigen können. Die Längsfeldstärke $\mathfrak{E}_\nu$ erscheint nur zusammen mit n, so daß wir sie nur im Kanal wirklich benötigen. Dort hängt aber auch sie von ν kaum ab, sondern ist einfach der Quotient der Brennspannung in die Länge der Stromlinien. Im Kanal sind aber die Stromlinien alle ziemlich gleich lang, so daß wir $\mathfrak{E}_\nu$ überhaupt als konstant ansehen dürfen. In großer Entfernung vom Kanal wäre dies allerdings falsch. Dort kommt aber $\mathfrak{E}_\nu$ in unseren Gleichungen nicht mehr vor, da es immer mit dem praktisch verschwindenden n multipliziert ist.

Im Unendlichen, das in elliptischen Koordinaten durch $\mu = \infty$ erfaßt wird, soll T einem endlichen Wert T_∞ zustreben. Dies bedeutet die Randbedingung

$$\mu = \infty; \quad T = T_\infty. \tag{28}$$

Wir zeigen zuerst, daß wir sie erfüllen können, womit die Möglichkeit der Querstabilisierung des Bogens eigentlich schon dargetan ist. Weit vom Bogenkanal entfernt reduziert sich die Gleichung (27) auf

$$\operatorname{div} \varkappa \operatorname{grad} T = 0, \tag{27a}$$

was in elliptischen Koordinaten

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \varkappa (\mu^2 - 1) \frac{\partial T}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial \nu} \varkappa (1 - \nu^2) \frac{\partial T}{\partial \nu} = 0 \tag{27b}$$

liefert. Soll im Unendlichen die Temperatur überall dieselbe sein (was allerdings nicht unbedingt der Fall sein muß), so hängt T von ν nicht ab und wir bekommen durch Integration

$$(\mu^2 - 1) \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\mu} = C_1,$$

was für große μ näherungsweise in

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\mu} = \frac{C_1}{\mu^2}$$

mit dem Integral

$$T = -\frac{C_1}{\mu} + T_\infty \tag{29}$$

übergeht. Tatsächlich nimmt die Temperatur im Unendlichen den vorgeschriebenen Wert T_∞ an und die Konstante C_1 bleibt noch zur Erfüllung einer Randbedingung in der Bogenachse zur Verfügung.

Die Verhältnisse im Kanal selbst können keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bieten, da sie sich nicht allzu sehr von denen in einer unendlich langen Säule, die durch ein Rohr stabilisiert wird, unterscheiden können. Um die Rechnung nicht unnütz zu komplizieren, vernachlässigen wir die Wärmeleitung durch Trägerdiffusion und sehen statt ihrer das Wärmeleitvermögen $\varkappa$ als temperaturabhängig an. Wir erhalten dann aus (27) die einfache Gleichung

$$\operatorname{div} \varkappa \operatorname{grad} T = S - \mathfrak{E}_v^2 e (b_e + b_i) n, \tag{30}$$

die mit der Abkürzung

$$f(T) = S - \mathfrak{E}_v^2 e (b_e + b_i) n \tag{31}$$

in elliptischen Koordinaten

$$\frac{4}{d^2 (\mu^2 - \nu^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu} (\mu^2 - 1) \varkappa \frac{\partial T}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial \nu} (1 - \nu^2) \varkappa \frac{\partial T}{\partial \nu} \right\} = f(T) \tag{30a}$$

lautet.

Zuerst machen wir die Annahme, daß T von ν nicht abhänge und erhalten in der Mittelebene $\nu = 0$ die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (\mu^2 - 1) \varkappa \frac{\partial T}{\partial \mu} = \frac{d^2}{4} \mu^2 f(T), \tag{30b}$$

welche den Temperaturverlauf in dieser Ebene bestimmt. Nun muß verlangt werden, daß in der Bogenachse die Temperatur ein Maximum habe, d. h. daß

$$\operatorname{grad}_\mu T = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 - \nu^2}} \frac{\mathrm{d} T}{\mathrm{d} \mu} = \frac{2}{\mu d} \sqrt{\mu^2 - 1} \frac{\mathrm{d} T}{\mathrm{d} \mu} \tag{32}$$

für $\nu = 0$, $\mu = 1$ verschwinde.

Die Temperatur in der Bogenachse sei mit T_0 bezeichnet. Wir können dann in der unmittelbaren Umgebung der Achse für $f(T)$ in (30b) $f(T_0)$ setzen und die Integration ausführen, was

$$(\mu^2 - 1) \varkappa \frac{\mathrm{d} T}{\mathrm{d} \mu} = \frac{\mu^3 d^2}{12} f(T_0) + C$$

ergibt. Wenn wir jetzt

$$C = - \frac{d^2}{12} f(T_0)$$

setzen, wird

$$(\operatorname{grad}_\mu T)_{\mu = 1} = \left(\frac{2}{\mu d} \sqrt{\mu^2 - 1} \frac{\mathrm{d} T}{\mathrm{d} \mu} \right)_{\mu = 1} = \frac{d \cdot f(T)}{6 \varkappa} \left(\frac{\mu^3 - 1}{\mu \sqrt{\mu^2 - 1}} \right)_{\mu = 1} = 0$$

und die Randbedingung für die Bogenachse ist erfüllt.

Nun untersuchen wir noch den eigentlichen Bogenkanal, d.h. das Gebiet, wo x und y sehr klein gegen den Elektrodenabstand sind. Kehren wir wieder zu Zylinderkoordinaten zurück, setzen also

$$z^2 + y^2 = r^2 = \frac{d^2}{4}(\mu^2 - 1)(1 - \nu^2)$$

und in der Mittelebene

$$r^2 = \frac{d^2}{4}(\mu^2 - 1); \qquad \mu^2 = \frac{4r^2}{d^2} + 1 \approx 1,$$

so wird

$$\frac{\partial r}{\partial \mu} = \frac{\mu^2 d^2}{4r} \approx \frac{d^2}{4r},$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} = \frac{d^2}{4r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$$

und die Gleichung (30b) geht näherungsweise in

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r \varkappa \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = f(T)$$

über. Dies ist genau die Gleichung, die man in Zylinderkoordinaten für den unendlich langen Bogen erhält. Im Kanal selbst verhält sich also der Bogen so, wie ein unendlich langer Bogen in einem Rohr.

Wir wollen jetzt versuchen, die Abhängigkeit der Temperatur von der Koordinate ν zu ermitteln. Dazu kehren wir zu der Gleichung (30a)

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(\mu^2 - 1)\varkappa \frac{\partial T}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial \nu}(1 - \nu^2)\varkappa \frac{\partial T}{\partial \nu} = \frac{d^2}{4} f(T)(\mu^2 - \nu^2) \qquad (30\,a)$$

zurück. Aus Symmetriegründen kann die Entladung nur von ν^2 abhängen und wir werden deshalb für das Gebiet zu beiden Seiten der Mittelebene den Ansatz

$$T = T_0 + \nu^2 T_2 + \nu^4 T_4 + \cdots \qquad (33)$$

probieren, in welchem T_2, T_4 usw. natürlich noch von μ abhängen. T_0 sei nun so gewählt, daß die einfachere Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(\mu^2 - 1)\varkappa \frac{\partial T_0}{\partial \mu} = \frac{d^2}{4} f(T_0)\mu^2 \qquad (30\,b)$$

erfüllt wird. Setzen wir

$$T = T_0 + \nu^2 T_2$$

in (30a) ein, so finden wir die von ν unabhängigen Glieder

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(\mu^2 - 1)\varkappa \frac{\partial T_0}{\partial \mu} + 2\varkappa T_2 = \frac{d^2}{4} f(T_0)\mu^2.$$

Wegen (30b) reduziert sich das aber auf

$$2\varkappa T_2 = 0.$$

Wir müssen deshalb

$$T = T_0 + \nu^4 T_4$$

verwenden und erhalten beim Einsetzen in (30a)

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(\mu^2 - 1)\varkappa \frac{\partial T_0}{\partial \mu} + 12\varkappa \nu^2 T_4 = \frac{d^2}{4} f(T_0)\mu^2 - \frac{d^2}{4} f(T_0)\nu^2,$$

wenn wir die Glieder mit ν^2 noch beachten. Dies liefert uns offenbar

$$T_4 = -\frac{d^2}{48\varkappa} f(T_0)$$

und damit in der Nähe der Mittelebene

$$T = T_0 - \frac{d^2}{48\varkappa} f(T_0)\nu^4.$$

Hieraus darf man allerdings nicht allzu viel schließen. Was zunächst interessiert, ist, daß T kein in ν quadratisches Glied enthält, also tatsächlich von ν sehr weitgehend unabhängig ist. Das Glied vierter Ordnung für reell zu halten, bedeutet wohl eine Überschätzung der Genauigkeit der Rechnung, da ja die geringe Abhängigkeit von $\mathfrak{E}_r$, i_r usw. von ν vernachlässigt worden ist. Man wird im Gegenteil erwarten, daß näher zu den Elektroden hin, wo ja der Bogenkanal etwas schmäler wird, wegen der wachsenden Stromdichte die Temperatur etwas ansteigen wird.

V. Ähnlichkeitsgesetze.

Führt man statt T die charakteristische Temperatur

$$\vartheta = \frac{kT}{eU_i}$$

ein und setzt

$$b_e = \frac{B_e}{p}; \qquad b_i = \frac{B_i}{p},$$

so ist

$$S = \frac{p \cdot A}{eU_i \vartheta} e^{-\frac{U_a}{U_i \vartheta}} = p\, g(\vartheta)$$

und

$$\mathfrak{E}_\nu^2 e(b_e + b_i)\cdot n = \mathfrak{E}_\nu^2 p^{-1/2} h^{-3/2} e^{5/4} U_i^{1/4} (2\pi m)^{3/4} (B_e + B_i)\vartheta^{1/4} e^{-\frac{1}{2\vartheta}}$$
$$= \frac{\mathfrak{E}_\nu^2}{p^{1/2}} h(\vartheta).$$

Damit geht die Gleichung (30) in

$$\frac{1}{\mu^2 - \nu^2}\left\{\frac{\partial}{\partial \mu}(\mu^2 - 1)\varkappa\frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial \nu}(1 - \nu^2)\varkappa\frac{\partial \vartheta}{\partial \nu}\right\}$$
$$= \frac{p\,d^2}{4}g(\vartheta) - \frac{\mathfrak{E}_\nu^2 d^2}{4\,p^{1/2}}h(\vartheta) = C_2\,g(\vartheta) - C_1\,h(\vartheta)$$

über. Wenn die beiden Konstanten

$$C_1 = \frac{\mathfrak{E}_\nu^2 d^2}{4\,p^{1/2}}; \qquad C_2 = \frac{p\,d^2}{4}$$

bei zwei Bögen dieselben Werte haben, hängt ϑ in der gleichen Weise von μ und ν ab, da ja die Randbedingung im Unendlichen und in der Bogenachse sowieso immer die gleichen sind. Solche Entladungen sind also ähnlich.

Wir berechnen die Leistung L pro cm Bogenlänge in der Mitte des Bogens. Hierzu bilden wir

$$L = \mathfrak{E}_\nu 2\pi\int_0^\infty i_\nu r\,\mathrm{d}r = \frac{\mathfrak{E}_\nu^2 d^2}{4\,p^{1/2}}\int_0^\infty h(\vartheta)\,\mu\,\mathrm{d}\mu = C_1\int_0^\infty h(\vartheta)\,\mu\,\mathrm{d}\mu.$$

Das Integral hat bei ähnlichen Entladungen stets den gleichen Wert. Ähnliche Entladungen setzen also in der Bogenmitte pro cm die gleiche Leistung um. Außerdem ist in ähnlichen Entladungen das Produkt pd^2 konstant. Die entsprechende Bedingung bei einem wandstabilisierten Bogen in einem Rohr[1]) verlangt, daß pro cm Länge die gleiche Gasmenge vorhanden sei. Auf eine solche Ausdeutung kann man beim frei brennenden Bogen nicht kommen. Wollte man die Wärmeleitung durch Trägerdiffusion wirklich berücksichtigen, statt sie summarisch durch ein temperaturabhängiges Wärmeleitvermögen zu erfassen, so würden ebenso wie beim Bogen im Rohr die Ähnlichkeitsgesetze verlorengehen.

---

[1]) Vgl. W. Elenbaas, Physica 2, 169, 1935.

Die Struktur des Th II-Spektrums. II.

Von T. L. de Bruin, P. F. A. Klinkenberg und Ph. Schuurmans in Amsterdam.

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 23. Februar 1943.)

Das Termsystem B des Th II-Spektrums wird bekanntgegeben. Die Terme der tieferen Gruppe werden identifiziert. Es zeigt sich, daß die $6\,d^2\,7\,s$- und $6\,d^3$-Konfigurationen über großem Abstand durcheinanderliegen; die Termlagen werden mit den entsprechenden des Hf II und Zr II verglichen. Einige ausgeprägte Störungen werden besprochen. Auch in den angeregten Termgruppen werden einige Multipletts erkannt und den $6\,d\,7\,p\,7\,s$- und $6\,d^2\,7\,p$-Konfigurationen zugefügt. Die letzte Linie des Spektrums ist λ 2837,31, der Übergang $6\,d^2\,7\,p\,{}^4G_{11/2} - 6\,d^2\,7\,s\,{}^4F_{9/2}$. Die experimentellen Daten weisen darauf hin, daß die Grundterme des Systems B etwas tiefer als die des Systems A liegen.

1. Experimentelles.

Die experimentellen Daten wurden bereits in der ersten Arbeit[1]) besprochen. Wir erwähnen noch eine vorläufige Untersuchung über die Persistenz der Th-Linien, die von Herrn Trijtel in unserem Institut ausgeführt wurde und das Ergebnis lieferte, daß im Gebiete 2100 bis 7000 Å die Linie λ 2837,31 wahrscheinlich die empfindlichste Linie des Th II-Spektrums ist. Die Lichtquelle war ein Funke zwischen einer Pt-Nadelelektrode und Th-Nitratlösungen verschiedener Konzentrationen in einem Pt-Behälter. Der Spektralapparat war ein Hilger-E 2-Quarzspektrograph; die verwendeten Plattensorten Ilford Special Rapid und Agfa Spektral Total.

Wir reproduzieren in den Fig. 1 bis 7 noch einige Zeeman-Aufnahmen und Photogramme von Linien, die dem Termsystem B angehören[2]).

2. Theoretische und beobachtete Terme.

Die Entstehungsweise des Systems B aus den Th III-Konfigurationen wurde schon in I besprochen. In Tabelle 1 sind die nach jenen Erwägungen zu erwartenden Terme gesammelt.

Die Tabelle 2 enthält die bisher im System B gefundenen Terme in cm^{-1}, bezogen auf $d^2s\,{}^4F_{3/2} = 0$. Wie in I sind die Niveaus numeriert,

---

[1]) T. L. de Bruin, Ph. Schuurmans u. P. F. A. Klinkenberg, ZS. f. Phys. 121, 667, 1943, weiter stets als I zitiert. — [2]) Die Veröffentlichung des ausführlichen Zahlenmaterials erfolgt später. Bis dahin sind die Verfasser bereit, ein Schreibmaschinenexemplar der Tabellen interessierten Fachkollegen leihweise zur Verfügung zu stellen.

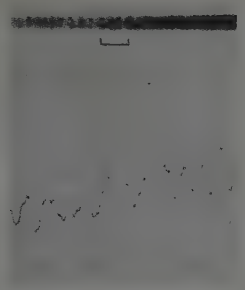


Fig. 1. — λ 2641,47 π
bei H = 20720 Ø.
Aufnahme mit der Lummerplatte.

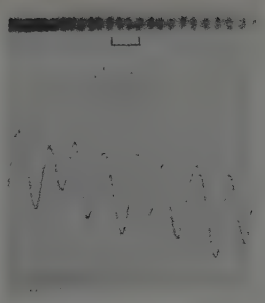


Fig. 2. — λ 2826,85 π
bei H = 11960 Ø.
Aufnahme mit der Lummerplatte.

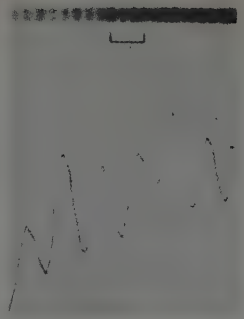


Fig. 3. — λ 2870,40 π
bei H = 11960 Ø.
Aufnahme mit der Lummerplatte.

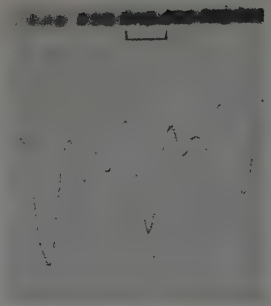
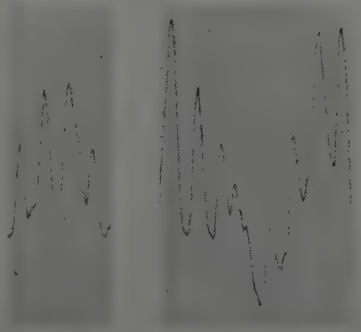


Fig. 4. — λ 3245,762 π
bei H = 20720 Ø.
Aufnahme mit der Lummerplatte.

Fig. 5. — λ 3334,602 π
bei H = 29820 Ø.
Aufnahme mit der Lummerplatte.



π σ
Fig. 6. — λ 3433,994 π bei H = 36680 Ø.
Photogramm einer Gitteraufnahme.

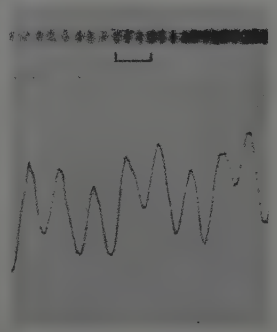


Fig. 7. — λ 3741,187 π
bei H = 38580 Ø.
Aufnahme mit der Lummerplatte.

weil vielleicht noch Änderungen in der Deutung einiger tiefer Terme eintreten können und die höheren Terme zum Teil noch gar nicht gedeutet sind.

Tabelle 1. Theoretische Terme *B*.

Konfiguration	Abkürzung	Terme	Anzahl	Σl	Parität
$6d\,7s^2$	ds^2	^2D	2	2	gerade
$6d^2\,7s$	d^2s	$^{4,2}(F, P)$ $^2(G, D, S)$	16	4	gerade
$6\,d^3$	d^3	$^4(F, P)$ $^2(H, G, F, D, D, P)$	19	6	gerade
$6d\,7p\,7s$	dps	$^{4,2}(F, D, P)$ $^2(F, D, P)^*$	23	3	ungerade
$7p\,7s^2$	ps^2	^2P	2	1	ungerade
$6d^2\,7p$	d^2p	$^{4,2}(G, F, D; D, P, S)$ $^2(H, G, F; F, D, P; P)^*$	45	5	ungerade

3. Die Grundterme des Systems B und analoge Konfigurationen in anderen Spektren.

Während uns zum System *A* keine analogen analysierten Spektren zur Verfügung standen[1]), finden sich analysierte Konfigurationen, die mit denen des zweiten Systems iso-elektronisch sind u. a. bei Ti II[2]), Zr II[3]), Hf II[4]), Y I[5]), Sc I[6]) und La I[7]). Sie bilden für die Richtigkeit der Termbezeichnung eine starke Stütze. Nur die Identifizierung der Dubletterme $d^2s\ ^2F$, ^2D und ^2P ist vielleicht noch nicht vollkommen sichergestellt.

In der Fig. 8 haben wir die bisher gefundenen Terme der ds^2-, d^2s- und d^3-Gruppe des Th II (mit Ausnahme des $d^3\,^2G_{7/2}$) und die entsprechenden des Hf II und des Zr II graphisch dargestellt; das tiefste Niveau wurde in jedem Spektrum bei 0 angenommen. Am deutlichsten ist die Analogie mit dem Spektrum des Hf II, insbesondere wenn man die Lagen der Niveaus einer und derselben Konfiguration betrachtet. Die Lagen der Konfigurationen relativ zueinander aber zeigen größere Unterschiede. Während beim Hf II die ds^2-, d^2s- und

[1]) Die Ce II-Arbeit von G. R. Harrison, W. E. Albertson u. N. F. Hosford, Journ. Opt. Soc. Amer. 31, 439, 1941 ist leider nicht in unsere Hände gelangt. — [2]) H. N. Russell, Astrophys. Journ. 66, 283, 1927. — [3]) C. C. Kiess u. H. K. Kiess, Bur. of Stand. Journ. of Res. 5, 1205, 1930. — [4]) W. F. Meggers u. B. F. Scribner, ebenda 13, 625, 1934. — [5]) W. F. Meggers u. H. N. Russell, ebenda 2, 733, 1929. — [6]) H. N. Russell u. W. F. Meggers, Bur. of Stand. Scient Papers 22, 329, 1927. — [7]) H. N. Russell u. W. F. Meggers, Bur. of Stand. Journ. of Res. 9, 625, 1932.

d^3-Termgruppen völlig getrennt liegen, derart, daß die ds^2-Konfiguration unten und die d^3-Gruppe oben liegt, sind sie beim Th II ineinander geschoben, so daß hier das $ds^2\ ^2D$ zwischen $d^2s\ ^4F_{5/2}$ und $d^2s\ ^4F_{7/2}$ liegt und das $d^3\ ^4F$ weit in die d^2s-Gruppe hineinreicht. Das letzte ist auch im Zr II-Spektrum der Fall, aber hier liegt das $ds^2\ ^2D$

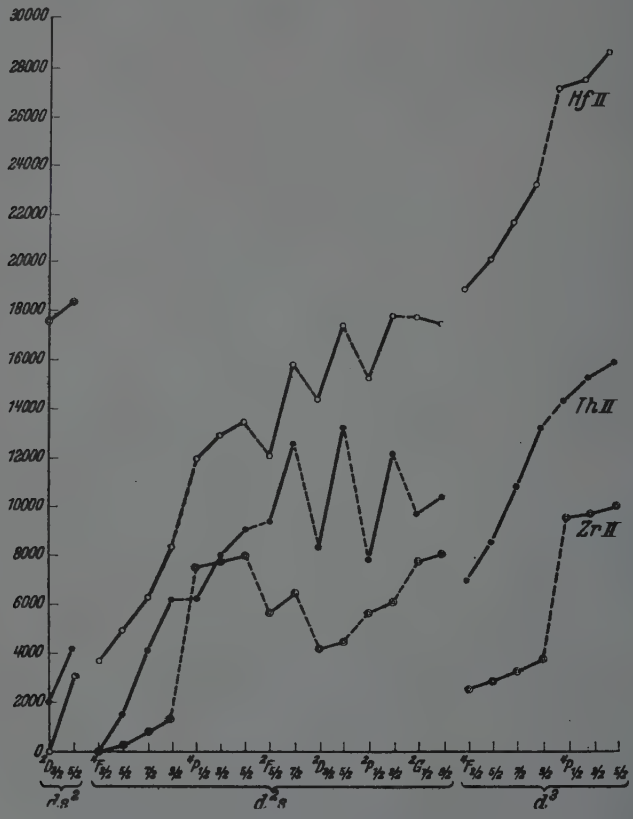


Fig. 8. Relative Lagen der Terme der ds^2-, d^2s- und d^3-Konfigurationen in den Spektren des Th II, Hf II und Zr II.

weit oberhalb aller betrachteten d^2s- und d^3-Niveaus und sind infolge der kleineren Kernladung die Multiplettaufspaltungen viel kleiner. Entsprechendes gilt für Ti II, während La I eine Zwischenstellung einnimmt: Die ds^2-Konfiguration liegt unten, die Aufspaltungen sind nur wenig größer als die des Zr II; die d^3-Gruppe ist beim La I nicht bekannt. Wir bemerken noch, daß nur beim Zr II und Th II das $d^2s\ ^2G$

regelrecht ist, während es in allen übrigen angeführten Spektren verkehrte Lage zeigt.

Weitaus am interessantesten sind die Verhältnisse beim Th II, weil sie hier Anlaß geben zu einigen stark ausgeprägten Störungen; um diese näher hervortreten zu lassen, haben wir in Tabelle 3 die experimentellen g-Werte der entsprechenden Terme des La I, Hf II und Th II mit den theoretischen für den Fall der L-S-Kopplung zusammengestellt. Es zeigt sich, daß die Abweichungen der g-Faktoren vom Landéschen Wert, vermutlich infolge der schwächeren L-S-Kopplung allmählich größer werden. In den Spektren des Sc I, Y I, Ti II und Zr II sind die g-Faktoren noch nahezu normal, jedenfalls sind die Messungen des Zeeman-Effekts nicht genau genug, um die Abweichungen mit Sicherheit feststellen zu können. Die Tabelle lehrt aber auch, daß im Th II-Spektrum einige ganz abnorme Werte vorkommen. Das auffallendste Beispiel bilden die Terme $ds^2\ {}^2D_{3/2}$ und $d^2s\ {}^4F_{3/2}$, da hier die übrigen angeführten Elemente keine besondere Abweichungen zeigen. Wenn wir nun die Summe der zwei abnormen Werte nehmen, so ist sie innerhalb der Meßgenauigkeit gleich der Summe der normalen, nämlich 1,19 gegen 1,20. Der Gedanke, daß es sich hier um eine gegenseitige Störung der beiden Terme handelt, bekommt also eine starke Stütze. Die Hauptbedingungen für die Möglichkeit der Shenstone-Russelschen Abstoßungsstörungen[1]), nämlich die Gleichheit der inneren Quantenzahlen und der Parität, sind erfüllt; die Nebenbedingungen, d. h. die Gleichheit der L- und S-Zahlen, sind hier infolge mangelnder L-S-Kopplung unwichtig. Bekanntlich fordert die Theorie, daß die störenden Terme ihre Eigenschaften mischen; je stärker die Störung ist, desto schwieriger sind die Terme zu unterscheiden. Demgemäß stellt sich heraus, daß das $ds^2\ {}^2D_{3/2}$-Niveau einigen angeregten Termen gegenüber *die Rolle des* $d^2s\ {}^4F_{3/2}$ *übernimmt*. So kombinieren die ${}^4D_{1/2}$-Niveaus der d^2p- und der dps-Gruppe abnorm schwach mit dem $d^2s\ {}^4F_{3/2}$, dafür aber sehr stark mit dem $ds^2\ {}^2D_{3/2}$, auch in der Absorption. Der tatsächliche Abstand der beiden störenden Niveaus, der ziemlich groß ist (1860 cm^{-1}) ist für die Stärke der Störung nicht maßgebend, sondern der Abstand, den die Terme im ungestörten Zustand haben würden. Wir müssen daher annehmen, daß die im ungestörten Zustand sehr kleine Termdifferenz durch „Abstoßung" ihren reellen Wert bekommen hat. Auch dieser Effekt ist im Th II-Spektrum bemerkbar. Während

[1]) A. G. Shenstone u. H. N. Russell, Phys. Rev. **39**, 415, 1932.

Tabelle 2. Beobachtete Terme *B*.

Elektronen	Term	Nummer	Wert	*J*	*g*	Elektronen	Term	Nummer	Wert	*J*	*g*
d^2s	^4F	1	0,00	$^3/_2$	0,62			101	18214,40	$^3/_2$	0,88
d^2s	^4F	2	1521,91	$^5/_2$	1,07			102	19050,76	$^3/_2$	0,87
ds^2	^2D	3	1859,96	$^3/_2$	0,57			103	19248,34	$^5/_2$	0,93
ds^2	^2D	4	4113,38	$^5/_2$	1,18			104	20686,15	$^5/_2$	0,92
d^2s	^4F	5	4146,56	$^7/_2$	1,23			105	21297,44	$^5/_2$	0.76
d^2s	^4F	6	6213,50	$^9/_2$	1,30			106	21682,70	$^7/_2$	1,22
d^2s	^4P	7	6244,35	$^1/_2$	2,13			107	22685,50	$^7/_2$	0,95
d^3	^4F	8	7001,46	$^3/_2$	0,79			108	23372,54	$^3/_2$	1,05
d^2s	^2P	9	7828,62	$^1/_2$	1,26			109	24132,06	$^3/_2$	1,40
d^2s	^4P	10	8018,19	$^3/_2$	1,59			110	24414,72	$^3/_2$	1,10
d^2s	^2D	11	8460,36	$^3/_2$	0,95			111	24463,86	$^5/_2$	1,38
d^3	^4F	12	8605,84	$^5/_2$	0,99			112	24873,98	$^5/_2$	1,07
d^2s	^4P	13	9061,13	$^5/_2$	1,43			113	25188,15	$^3/_2$	0,98
d^2s	^2F	14	9401,00	$^5/_2$	1,05			114	25440,24	$^5/_2$	1,14
d^2s	^2G	15	9712,06	$^7/_2$	0,97			115	26424,43	$^5/_2$	1,16
d^2s	^2G	16	10379,14	$^9/_2$	1,16			116	26626,54	$^3/_2$	0,62
d^3	^4F	17	10855,37	$^7/_2$	1,18			117	26965,22	$^3/_2$	1,38
d^2s	^2P	18	12220,02	$^3/_2$	0,95	d^2p	^4G	118	28243,84	$^5/_2$	0,93
d^2s	^2F	19	12570,51	$^7/_2$	1,13			119	28720,85	$^3/_2$	1,14
d^3	^4F	20	13248,79	$^9/_2$	1,25			120	29095,53	$^5/_2$	1,00
d^2s	^2D	21	13250,54	$^5/_2$	1,24			121	29720,33	$^3/_2$	1,01
d^3	^4P	22	14349,46	$^1/_2$	2,56			122	30972,18	$^5/_2$	1,20
d^3	^4P	23	15236,68	$^3/_2$	1,58			123	30994,27	$^7/_2$	1,20
d^3	^4P	24	15787,04	$^5/_2$	1,58			124	31353,15	$^3/_2$	0,86
d^3	^2G	25	16818,15	$^7/_2$	0,89	dps	^4D	125	31625,67	$^1/_2$	0,33

Tabelle 2 (Fortsetzung).

Elektronen	Term	Nummer	Wert	J	g	Elektronen	Term	Nummer	Wert	J	g
		126	31800,19	$^7/_2$	1,16	d^2p	^4G?	152	39442,98	$^9/_2$	1,14
		127	31810,56	$^5/_2$	1,12			153	39861,67	$^5/_2$	1,17
		128	31928,77	$^3/_2$	0,87			154	40184,17	$^7/_2$	1,27
d^2p	^4G	129	32957,42	$^7/_2$	1,07	d^2p	^4D	155	40472,42	$^3/_2$	1,25
dps	^4D	130	33215,51	$^3/_2$	1,05	d^2p	^4F?	156	40706,92	$^7/_2$	1,07
dps	^4D	131	34212,02	$^5/_2$	1,15	d^2p	^4D	157	40825,65	$^1/_2$	0,25
		132	34330,73	$^1/_2$	1,49	d^2p	^4G	158	41488,08	$^{11}/_2$	1,26
		133	35156,95	$^5/_2$	1,07			159	42112,96	$^3/_2$	1,46
		134	35199,07	$^1/_2$	0,95			160	42219,82	$^5/_2$	1,18
dps	^4D	135	35593,53	$^7/_2$	1,28	d^2p	^4F	161	42319,20	$^9/_2$	1,16
		136	36193,49	$^9/_2$	1,12			162	42418,27	$^3/_2$	1,32
d^2p	^4F	137	36390,56	$^3/_2$	0,82			163	42944,51	$^7/_2$	1,27
		138	36444,88	$^3/_2$	1,19			164	43287,75	$^3/_2$	1,58
		139	36581,61	$^3/_2$	1,12	d^2p	^4D	165	43382,82	$^5/_2$	1,19
		140	36583,84	$^7/_2$	1,14			166	43773,66	$^7/_2$	1,04
d^2p	^4F	141	36688,08	$^5/_2$	1,04	d^2p	^4D	167	44650,53	$^7/_2$	1,20
		142	37130,39	$^1/_2$	0,53			168	44822,01	$^5/_2$	0,99
		143	37569,79	$^9/_2$	1,30			169	45221,58	$^5/_2$	1,33
		144	37601,76	$^3/_2$	1,28			170	45489,20	$^9/_2$	1,11
		145	37608,09	$^1/_2$	2,23			171	45689,44	$^7/_2$	1,27
		146	37846,21	$^5/_2$	1,16			172	45697,84	$^3/_2$	1,18
		147	38436,17	$^3/_2$	1,40			173	46155,63	$^5/_2$	1,16
		148	38493,79	$^5/_2$	1,21			174	46368,21	$^9/_2$	1,09
		149	38581,67	$^5/_2$	1,10			175	46423,75	$^3/_2$	1,14
		150	38764,73	$^7/_2$	1,10			176	49289,54	$^5/_2$	1,19
		151	39396,58	$^7/_2$	1,11			177	51946,83	$^5/_2$	0,90

Tabelle 3. Vergleich der g-Werte.

		L–S	La I	Hf II	Th II
ds^2	$^2D\ ^3/_2$	0,80	0,79	0,80	0,57
	$^2D\ ^5/_2$	1,20	1,20	1,18	1,18
d^2s	$^4F\ ^3/_2$	0,40	0,41	0,45	0,62
	$^4F\ ^5/_2$	1,03	1,03	1,06	1,07
	$^4F\ ^7/_2$	1,24	1,22	1,23	1,23
	$^4F\ ^9/_2$	1,33	1,33	1,33	1,30
	$^4P\ ^1/_2$	2,67	2,71	2,61	2,13
	$^4P\ ^3/_2$	1,73	1,69	1,69	1,59
	$^4P\ ^5/_2$	1,60	1,54	1,43	1,43
	$^2F\ ^5/_2$	0,86	0,90	0,98	1,05
	$^2F\ ^7/_2$	1,14	1,13	1,11	1,13
	$^2P\ ^1/_2$	0,67	0,67	0,74	1,26
	$^2P\ ^3/_2$	1,33	1,32	1,12	0,95
	$^2G\ ^7/_2$	0,89	0,91	0,92	0,97
	$^2G\ ^9/_2$	1,11	1,12	1,13	1,16
	$^2D\ ^3/_2$	0,80	0,89	1,03	0,95
	$^2D\ ^5/_2$	1,20	1,29	1,29	1,24
d^3	$^4F\ ^3/_2$	0,40		0,46	0,79
	$^4F\ ^5/_2$	1,03		1,01	0,99
	$^4F\ ^7/_2$	1,24		1,23	1,18
	$^4F\ ^9/_2$	1,33		1,29	1,25
	$^4P\ ^1/_2$	2,67		—	2,56
	$^4P\ ^3/_2$	1,73		1,76	1,58
	$^4P\ ^5/_2$	1,60		1,51	1,58

in der Reihenfolge Sc I, Ti II, Y I, Zr II, La I, Hf II, Th II die Multiplettaufspaltungen (mit Ausnahme des $d^2s\ ^2G$) regelmäßig zunehmen, ist die $ds^2\ ^2D$-Aufspaltung die einzige im Th II-Spektrum, die nicht größer, sondern bedeutend kleiner ist als die entsprechende im Hf II-Spektrum. Das $ds^2\ ^2D_{3/2}$ liegt also weit höher, als es nach dem Verlauf der Dublettaufspaltungen bei den übrigen Spektren zu erwarten wäre. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß im besprochenen Falle des Th II eine starke Störung vorliegt, die sich gemäß der Theorie in den g-Faktoren, den kombinatorischen Eigenschaften und den Lagen der zwei Terme auswirkt.

Eine weiter in der Tabelle ins Auge springende Störung zeigt sich zwischen den Termen $d^2s\ ^4P_{1/2}$ und $d^2s\ ^2P_{1/2}$; auch hier ist die Summe der sehr stark abweichenden g-Werte fast gleich der Summe der normalen Werte, nämlich 3,39 gegen 3,34. Vergleich der Aufspaltungen hat hier keinen Sinn, weil auch die anderen Dublett- und Quartettkomponenten gestört sind.

Das $d^3\,{}^4F_{3/2}$ hat einen noch stärker vom normalen Wert abweichenden g-Faktor als das $d^2s\,{}^4F_{3/2}$. Ursprünglich hatten wir es als ^2D-Niveau aufgefaßt, aber die spätere Entwicklung der d^3-Gruppe zwingt uns zu der gegebenen Deutung, die auch mit den Intensitäten der Kombinationen besser übereinstimmt. Vielleicht wird diese Störung durch das $d^2s\,{}^2P_{3/2}$ hervorgerufen, denn hier ist wieder die g-Summe innerhalb der Meßgenauigkeit gleich der theoretischen, nämlich 1,74 gegen 1,73. Augenscheinlich paßt der g-Faktor des $^2P_{3/2}$ gut in die Reihenfolge La I, Hf II, Th II, aber bei näherem Betrachten ergibt sich, daß auch im Hf II-Spektrum eine Störung vorliegt zwischen $d^2s\,{}^2P_{3/2}$ und $d^2s\,{}^2D_{3/2}$, da sie hier die einzigen größeren Abweichungen vom normalen g-Wert darstellen und die Summe wieder fast die theoretische ist.

Wenn wir schließlich ohne darauf zu achten, daß die d^3-Konfiguration noch nicht abgeschlossen worden ist, die totalen g-Summen bilden, so ergibt sich für

$J = {}^9/_2$ aus 3 Termen 3,71 (theor. 3,77); es fehlen noch $d^3\,{}^2H_{9/2}, {}^2G_{9/2}$;

$J = {}^7/_2$ aus 5 Termen 5,40 (theor. 5,40); es fehlt noch $d^3\,{}^2F_{7/2}$;

$J = {}^5/_2$ aus 7 Termen 8,54 (theor. 8,52); es fehlen noch $d^3\,{}^2F_{5/2}, {}^2D_{5/2}, {}^2D_{5/2}$;

$J = {}^3/_2$ aus 7 Termen 7,05 (theor. 7,19); es fehlen noch $d^3\,{}^2D_{3/2}, {}^2D_{3/2}, {}^2P_{3/2}$;

$J = {}^1/_2$ aus 3 Termen 5,95 (theor. 6,01); es fehlen noch $d^3\,{}^2P_{1/2}, d^2s\,{}^2S_{1/2}$.

Sie stimmen also trotz mannigfacher individueller Abweichungen der g-Werte gut mit den theoretischen Summen überein; beträchtliche Störungen sind von den noch fehlenden höheren Dublettermen nicht zu erwarten.

4. Bemerkungen über die angeregten Terme und über die relativen Lagen der beiden Systeme.

Für die Deutung der oberen Termgruppen bildete die empfindlichste Linie λ 2837,31 — die bemerkenswerterweise von Pollok und Leonard[1]) nicht unter den persistenten Linien verzeichnet wird — einen festen Anhaltspunkt. Wenn man nämlich, analog dem Zr II[2]) und Hf II[3]) diese Linie auf den $6\,d^2\,7s\,{}^4F_{9/2}$-Term ansetzt, bekommt man mit den zwei übrigen tiefen Niveaus mit $J = {}^9/_2$ gerade zwei beobachtete Linien heraus, während die bekannten Zeeman-Aufspaltungen auf

[1]) Siehe bei F. Twyman, Wavelength Tables for Spectrum Analysis, 1931. — [2]) C. C. Kiess u. H. K. Kiess, Bur. of Stand. Journ. of Res. 5, 1205, 1930. — [3]) W. F. Meggers u. B. F. Scribner, Bur. of Stand. Journ. of Res. 13, 625, 1934.

einen gemeinsamen Term mit $J = {}^{11}/_2$ und $g = 1{,}26$ hinweisen. Dieser Term ist also zweifellos das $6\,d^2\,7\,p\,{}^4G_{11/2}$. Es ist nun unschwer, aus den in der Tabelle 2 gegebenen Niveaus das ${}^4G$—${}^4F$-Multiplett zu vervollständigen, wenn man auf die Lagen und die g-Werte Rücksicht nimmt und kleinere Intensitätsanomalien zuläßt. In der Tabelle 4 ist das Multiplett aufgenommen. Nur das ${}^4G_{9/2}$ ist nicht sicher; anstatt 39442,98 kommt auch 36193,49 (Term B 136) in Frage.

Das Niveau B 157 mit $J = {}^1/_2$ und $g = 0{,}25$ kann nur ein ${}^4D_{1/2}$ sein (normaler g-Wert = 0,00). Mit Rücksicht auf seine Lage relativ zum $d^2p\,{}^4G$ gehört es der $d^2\,p$-Konfiguration an. In Tabelle 4 ist das ${}^4D$—${}^4F$-Multiplett vervollständigt. Nur die Lage und der g-Wert des ${}^4D_{3/2}$-Niveaus ist unbefriedigend. Über die abnorme Schwäche der ${}^4D_{1/2}$—${}^4F_{3/2}$-Kombination und ihre Erklärung durch Störung wurde schon im 3. Abschnitt berichtet. Auch das ${}^4F$—${}^4F$-Multiplett ist in der Tabelle aufgenommen. Das $d^2\,p\,{}^4F_{7/2}$ ist fraglich. Ähnlicherweise finden wir die $d\,p\,s\,{}^4D$-Niveaus. Weitere Multipletts aufzustellen scheint heute noch zu spekulativ.

Das $d\,p\,s\,{}^4F_{3/2}$, nach der Theorie das tiefste Niveau der $d\,p\,s$-Gruppe, was auch in den Spektren des Zr II und Hf II der Fall ist, wird am besten mit dem Term B 116 ($J = {}^3/_2$, $g = 0{,}62$) zu identifizieren sein. Damit entsteht aber die Frage, wie die noch tieferliegenden ungeraden Terme zu deuten sind; auch nach oben bis etwa 35000 cm^{-1} gibt es eine Reihe von Termen, die im Rahmen der $d^2\,p$- und der $d\,p\,s$-Konfiguration nicht zu erklären sind. Bemerkenswert ist auch, daß die Zahl der gefundenen ungeraden Niveaus die Gesamtzahl der in der Tabelle 1 aufgezählten schon um 7 übertrifft, während aller Wahrscheinlichkeit nach ein Teil der Dubletterme noch nicht gefunden worden ist.

Eine Erwägung der Möglichkeiten ergibt, daß für die unbekannten Terme nur Konfigurationen mit $5f$-Elektronen in Betracht kommen, und zwar $5f^3$ und $5f\,6d^2$. Die f^3-Terme aber würden mit der ds^2- und d^2s-Termgruppe nur ganz schwach kombinieren können; am wahrscheinlichsten ist also, daß wir in den betreffenden Termen das obere Ende der fd^2-Gruppe zu sehen haben, deren Niveaus schon in I, Tabelle 1, aufgezählt wurden.

Die Beantwortung der aufgeworfenen Frage hängt also eng zusammen mit den Lagen der beiden Systeme A und B relativ zueinander. Das analoge Problem im Th III-Spektrum haben wir schon früher einer Diskussion unterzogen, ohne dabei zu einem eindeutigen Ergebnis zu

Tabelle 4. Multipletts im System *B*.

$d^2 s$ / $d^2 p$	g	$^4F_{3/2}$ 0,00	$^4F_{5/2}$ 1521,91	$^4F_{7/2}$ 4146,56	$^4F_{9/2}$ 6213,50
		0,62	1,07	1,23	1,30
$^4G_{5/2}$		8 *A*	8 *A*	1	
28243,84	0,93	28243,81	26721,92	24097,3	—
$^4G_{7/2}$			8 *RR*	10 *A*	
32957,42	1,07	—	31435,57	28810,76	?
$^4G_{9/2}$				6 *A*	6 *r*
39442,98	1,14	—	—	35296,4	33229,43
$^4G_{11/2}$					6 *A*
41448,08	1,26	—	—	—	35234,3
$^4F_{3/2}$		7 *A*	4		
36390,56	0,82	36390,6	34868,9	—	—
$^4F_{5/2}$		5 *r*	6 *R*	6 *R*	
36688,08	1,04	36688,0	35166,3	32541,43	—
$^4F_{7/2}$			3	6 *R*	4
40706,92	1,07	—	39185,0	36560,3	34493,5
$^4F_{9/2}$				7 *A*	8 *A*
42319,20	1,16	—	—	38172,6	36105,3
$^4D_{1/2}$		1			
40825,65	0,25	40825,5	—	—	—
$^4D_{3/2}$		2	6 *A*		
40472,42	1,25	40471,4	38950,4	—	—
$^4D_{5/2}$			5 *r*	6 *RR*	
43382,82	1,19	?	41861,0	39236,2	—
$^4D_{7/2}$			4	6 *r*	6 *A*
44650,53	1,20	—	43128,6	40504,0	38437,1
dps					
$^4D_{1/2}$		1			
31625,67	0,33	31625,4	—	—	—
$^4D_{3/2}$		3	6 *A*		
33215,51	1,05	33215,50	31693,54	—	—
$^4D_{5/2}$		1		9 *A*	
34212,02	1,15	34211,7	?	30065,50	—
$^4D_{7/2}$			4	5 ·	7 *RR*
35593,53	1,28	—	34071,8	31446,92	29380,01

Erläuterung zur Tabelle 4. Die über die Wellenzahlen gedruckten Intensitäten laufen von 1 bis 10, wo 1 bedeutet, daß die betreffende Linie an der Schwelle der Sichtbarkeit liegt. Die Buchstaben beziehen sich auf die Beobachtungen Liers im Spektrum der Explosion, und zwar ist *A* = sehr stark absorbiert, *RR* = stark absorbiert, *R* = ziemlich stark absorbiert und *r* = schwach absorbiert.

kommen. Wenn wir, ohne auf das Th III Rücksicht zu nehmen, die experimentellen Daten des Th II-Spektrums überschauen, so scheinen sie auf eine *etwas tiefere Lage des Systems B* hinzuweisen. Fassen wir die Argumente zusammen:

1. Von insgesamt 52 nach Pollok und Leonard empfindlichen Th II-Linien sind im System *A* nur 10 eingeordnet, im System *B* aber 37; die übrigen sind noch nicht klassifiziert worden. Wenn man bedenkt, daß System *A* insgesamt 1165 Linien umfaßt gegen System *B* 765, so ergibt sich ein deutlicher Unterschied der beiden Systeme hinsichtlich der Empfindlichkeit gegen Anregung. Wenn auch das Problem der Persistenz in Beziehung zu den Elektronenübergängen noch nicht endgültig gelöst worden ist, mag doch der Umstand, daß *innerhalb der beiden Systeme* p—s-Übergänge stattfinden können, dafür sprechen, daß der obengenannte Unterschied auf die relativen Lagen der beiden Systeme zurückzuführen ist.

2. Ähnlicherweise, aber weniger ausgeprägt, finden wir, daß im System *A* 55 und in *B* 53 nach Fred empfindliche Linien klassifiziert sind. Diese Linien wurden bei der stigmatischen Abbildung des Bogens auch außerhalb des eigentlichen Entladungsraumes beobachtet, und werden von ihm Flammenlinien genannt.

3. Von den von Lier in Absorption beobachteten Th II-Linien wurden 124 im System *A* und 170 im System *B* klassifiziert. Da innerhalb eines jeden Systems die Zahl der absorbierten Linien und die Stärke der Absorption mit zunehmendem Termwert des tieferen Niveaus stetig abnimmt, ist es wahrscheinlich, daß die Grundterme des Systems *B* im Durchschnitt etwas tiefer liegen als die des Systems *A*.

Es muß aber bemerkt werden, daß die Ergebnisse von gewissen Schwierigkeiten der Beobachtung nicht zu befreien sind, die sich im System *B* anders auswirken können als im System *A*, weil die stärkeren Linien des letzteren Systems in bezug auf die des ersten im allgemeinen nach Rot verschoben sind. Jedenfalls ist aber zu schließen, daß die tiefsten Terme der beiden Systeme nur einen kleinen Abstand haben werden (höchstens einige 1000 cm^{-1}). Für das Th III-Spektrum hat dies zur Folge, daß die Termwerte der d^2-, ds-, dp- und ps-Konfigurationen wahrscheinlich niedriger anzusetzen sind als in unserer Th III-Arbeit [1]).

[1]) T. L. de Bruin, P. F. A. Klinkenberg u. Ph. Schuurmans, ZS. f. Phys. 118, 58, 1941.

Die endgültige Lösung des Problems wäre gefunden, wenn es gelingen würde, die fd^2-Konfiguration im System A zu entwickeln und an die angenommenen fd^2-Terme des Systems B anzuschließen. In dieser Richtung werden die Untersuchungen fortgesetzt.

Amsterdam, Zeeman-Laboratorium der Universität, Februar 1943.

Nachtrag bei der Korrektur. Die neuesten Ergebnisse bestätigen die oben ausgesprochene Vermutung über die relativen Lagen der beiden Termsysteme. Der Term $A\,1$ ist relativ zu $B\,1$ auf $4490 \cdot 3\ \mathrm{cm}^{-1}$ anzusetzen; es kombinieren dann nämlich einige neue Niveaus sowohl mit System A wie mit System B. Die Differenz ist noch nicht genauer zu bestimmen, weil die Kombinationslinien im langwelligen Spektralgebiet liegen, wo die Meßgenauigkeit geringer ist. Wir hoffen später auf den Zusammenhang und die weitere Entwicklung der beiden Systeme zurückkommen zu können.

Kontinuierliche Brems- und Rekombinationsstrahlung der Elektronen im Gasentladungsplasma.

Von **O. Th. Hahn** in Hamburg und **W. Finkelnburg** in Straßburg.

Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 5. März 1943.)

Die kontinuierlichen Spektren von Entladungen hoher Stromdichte wurden von Finkelnburg als Brems- und Rekombinationsstrahlung der Elektronen im Gasentladungsplasma gedeutet. Zur Prüfung dieser Hypothese werden Kondensator-Kapillarentladungen in verschiedenen Gasen bei Drucken zwischen 2 und 105 Torr elektrisch und optisch untersucht. Die Strahlungsintensität wächst, wie für Elektronenkontinua nach der obigen Deutung zu erwarten, oberhalb 70000 Amp./cm² mit dem Quadrat der Stromdichte; die kontinuierlichen Spektren zeigen keinerlei individuelle Eigenschaften mehr, sondern innerhalb der Meßgenauigkeit von ± 8% konstante Energie je Wellenzahlgebiet im ganzen sichtbaren Spektralbereich. Beide Ergebnisse bilden zusammen mit den übrigen bekannten Eigenschaften stromdichter Entladungen eine starke Stütze für die Deutung der Kontinua als Brems- und Rekombinationsstrahlung der Plasmaelektronen. Abschließend wird gezeigt, wie der hohe Wirkungsgrad dieser Strahlungsprozesse verglichen mit dem der Röntgenbremsstrahlung modellmäßig verständlich ist.

1. Einleitung.

In letzter Zeit haben in der physikalischen wie in der astrophysikalischen Forschung zur Aufklärung von atomaren Vorgängen wie bei Untersuchungen in Entladungen die kontinuierlichen Spektren immer mehr an Interesse gewonnen[1]). Während wir nun über die Absorptionskontinua der Atome und Moleküle sowie über die Fluoreszenzkontinua der Gase schon recht gut unterrichtet sind, sind die Entladungskontinua und unter diesen besonders die Funkenkontinua in gewissem Sinne noch das Sorgenkind geblieben. Zwar sind zwei Extremfälle der Funkenspektren wenigstens experimentell schon einigermaßen untersucht, das Kontinuum der Vakuumfunken („K. Sp." S. 305) und das der Hochdruckfunken („K. Sp." S. 302—304). Aber über Stoßentladungen bei mittleren Drucken, d. h. zwischen einigen Torr und etwa 200 Torr, liegen nur einige Aufnahmen von Hulburt[2]), dagegen keine eingehenderen Untersuchungen vor. Die vorliegende Arbeit wurde mit dem Ziel unternommen, in diesem Mitteldruckgebiet die kontinuierlichen Spektren kondensierter Entladungen in verschiedenen Gasen zu untersuchen. Hierdurch soll ein Beitrag sowohl zur Frage der Funkenkontinua und ihrer Deutung wie zum Problem des Plasmazustandes der Entladung geleistet werden.

[1]) W. Finkelnburg, Kontinuierliche Spektren. Berlin, Springer, 1938. Im folgenden als „K. Sp." zitiert. — [2]) E. O. Hulburt, Phys. Rev. **36**, 13, 1930.

2. *Theoretisches.*

Zur Deutung von Entladungskontinua kommen grundsätzlich die folgenden atomaren Prozesse in Frage:

1. Die Elektronenbremsung im Entladungsplasma unter Emission ausgedehnter kontinuierlicher Spektren (Analogie zum Röntgen-Bremskontinuum) (vgl. „K. Sp." S. 63ff.).

2. Die Elektronen-Rekombination, d. h. die Einfangung in gequantelte Atomzustände unter Emission von Seriengrenzkontinua („K. Sp." S. 43ff.), meist mit Übergreifen des Kontinuums über die theoretische Seriengrenze nach langen Wellen zu („K. Sp." S. 92ff.).

3. Die verschiedenen zur Emission von Molekülkontinua führenden Prozesse (vgl. „K. Sp." S. 104ff., 148ff.).

Die Molekülkontinua können bei unserer weiteren Diskussion außer Betracht bleiben, da bei der kräftigen Anregung und hohen Stromdichte der Funkenentladungen erfahrungsgemäß praktisch alle Moleküle dissoziiert sind. Auch die im Zusammenstoß zweier Atome oder Ionen emittierten Quasimolekülen bzw. Stoßpaaren („K. Sp.", S. 102) zuzuordnenden kontinuierlichen Spektren können im folgenden außer Betracht bleiben, da sie im Gegensatz zu den zu behandelnden Funkenkontinua nur relativ schmale kontinuierliche Bänder darstellen.

Für die ausgedehnten kontinuierlichen Spektren der Funken- und Bogenentladungen hoher Stromdichte (bei Funken Größenordnung 10^5 Amp./cm^2) hat Finkelnburg vor einigen Jahren eine Deutung gegeben, nach der diese durch die Prozesse (1) und (2) zustandekommen sollen, wobei die mittlere Elektronengeschwindigkeit dafür maßgebend ist, welcher der beiden Prozesse überwiegt. Finkelnburg konnte damals zeigen[1]), daß die seinerzeit bekannten Eigenschaften der Funkenkontinua mit den nach seiner Deutung zu erwartenden übereinstimmten.

Die vorliegende Arbeit wurde begonnen, um die obige Deutung an einem besonders interessanten Beispiel der Funkenentladungen quantitativ zu prüfen. Während des Verlaufs unserer Untersuchungen erschien dann eine theoretische Arbeit von Unsöld[2]), in der die zunächst vielfach angezweifelten Überlegungen Finkelnburgs für den Sonderfall von Entladungen im thermischen Gleichgewicht quantitativ verschärft wurden.

Unter der Annahme der Wasserstoffähnlichkeit der beteiligten Atomzustände und der einer großen Zahl einander überlagernder Grenzkontinua

[1]) W. Finkelnburg, ZS. f. Phys. **88**, 297, 768, 1934. — [2]) A. Unsöld, Ann. d. Phys. **33**, 607, 1938.

sowie unter Berücksichtigung der Erniedrigung der effektiven Ionisierungsspannung durch die interatomaren Felder (Verschmieren der höchsten Terme und daher Übergreifen der Grenzkontinua über die Seriengrenzen nach langen Wellen zu; vgl. „K. Sp." S. 92—97) gelangte Unsöld zu der folgenden Formel für die je Frequenzeinheit, cm³, Raumwinkeleinheit und Sekunde vom Entl dungsplasma emittierte Energie:

$$4\pi\varepsilon_\nu = \frac{128\pi^3}{3\sqrt{3}}\left(\frac{e^2}{hc}\right)^3 Z_{eff}^3\,\gamma\,p\,e^{-\frac{e\cdot V_{eff}}{kT}},$$

worin die effektive Kernladungszahl $Z_{eff} = 1$ gesetzt werden darf, während γ das statistische Gewicht des Grundzustandes des betreffenden Atoms, p der Gasdruck und V_{eff} die effektive Ionisierungsspannung im Plasma ist.

In der obigen Gleichung kommt ν nicht vor; die Intensität ist also von der Frequenz unabhängig:

$$J(\nu) = \text{const.}$$

Das gilt nach der Unsöldschen Rechnung für Bremsstrahlung und für viele sich überlagernde Grenzkontinua (d.h. im langwelligen Spektralgebiet), nicht dagegen für einzelne im kurzwelligen Gebiet isoliert liegende Seriengrenzkontinua, die sich als Maxima aus dem allgemeinen Kontinuum herausheben müssen, wenn ihre Intensität mit der des Bremskontinuums vergleichbar ist. Dieser von Unsöld nicht besonders hervorgehobene Punkt scheint uns wegen der Möglichkeit einer Unterscheidung zwischen Brems- und Rekombinationsstrahlung von Wichtigkeit.

Nach der Theorie müssen die durch Elektronenbremsung bzw. -Rekombination zu erklärenden Entladungskontinua den folgenden Bedingungen genügen, die demnach zur Prüfung der Theorie benutzt werden können:

1. Die kontinuierlichen Spektren müssen weitgehend frei sein von individuellen Eigenschaften des Entladungsgases oder -dampfes.

2. Die Intensität des Kontinuums muß quadratisch mit der Stromdichte zunehmen, da sie der Zahl der Zusammenstöße zwischen Elektronen und positiven Ionen proportional ist.

3. Abgesehen von dem kurzwelligen Gebiet in der Nähe der $h\nu$-Grenze muß die gegen Frequenzen bzw. Wellenzahlen aufgetragene Intensität $J(\nu)$ konstant sein. Lediglich einzelne, isoliert gelegene Seriengrenzkontinua müßten sich aus dem energiegleichen Kontinuum herausheben.

4. Die Temperaturabhängigkeit der Intensität des Kontinuums muß $e^{-\frac{eV_{eff}}{kT}}$ entsprechen, unter Berücksichtigung der T-Abhängigkeit von V_{eff}

5. Die Intensität des Kontinuums muß dem Gasdruck p proportional sein.

6. Die Absolutintensität muß mit der durch die Formel gegebenen übereinstimmen.

Dabei sollten die Bedingungen 1 und 2 ganz allgemein gelten, während die Bedingungen 3 bis 6 an die Voraussetzung thermischen Gleichgewichts, die der Unsöldschen Rechnung zugrunde liegt, gebunden sind.

Systematische Prüfungen der Bedingungen 3 bis 6 wurden nach der Veröffentlichung von Unsölds Arbeit am Kontinuum des Hg-Hochdruckbogens[1]) sowie dem des wirbelstabilisierten Kohle-Luft-Bogens[2]), also bei einigermaßen gesichertem thermischem Gleichgewicht, durchgeführt, und haben qualitativ gute und quantitativ immerhin befriedigende Übereinstimmung mit der Theorie ergeben.

Wir konzentrierten unsere Untersuchung deshalb auf die Prüfung der von der Theorie geforderten Bedingungen 1 bis 3 an Funkenspektren unter Variation von Gasart, Gasdruck und Stromdichte. Von besonderem Interesse schien dabei die Prüfung der Bedingung 3, da man beim Funken von thermischem Gleichgewicht, wenn überhaupt, dann erst nach dem eigentlichen Durchbruch sprechen kann. Die bisher an Funkenspektren durchgeführten Untersuchungen[3]), die sich nur auf die Frage nach der Intensitätsverteilung bezogen, hatten kein einheitliches Bild ergeben.

Wir haben deshalb aperiodische Kondensator-Stoßentladungen durch Hartglaskapillaren mit Füllungen von He, H_2, N_2, O_2 und CO_2 bei Drucken zwischen 2 und 105 Torr elektrisch und optisch genau untersucht. Gemessen wurde erstens photoelektrisch die Abhängigkeit der gesamten emittierten Strahlungsintensität von der Stromdichte und zweitens photographisch-photometrisch die relative spektrale Energieverteilung im sichtbaren Gebiet auf 50 Aufnahmen bei den verschiedenen Gasen, Gasdrucken und Stromdichten.

3. Experimentelles.

Um mit Kondensatorentladungen bei den relativ geringen Gasdrucken möglichst hohe Stromdichten zu erhalten, wurden als Funkenstrecken gasgefüllte Kapillaren gewählt. Ihr Durchmesser betrug 1,3 mm, ihre Länge lag zwischen 2 und 12 cm. Die Elektroden bestanden aus Aluminium,

---

[1]) W. Elenbaas, Physica **6**, 299, 1939; R. Rompe, P. Schulz u. W. Thouret, ZS. f. Phys. **112**, 369, 1939; P. Schulz, ebenda **119**, 167, 1942. — [2]) H. Maecker, ZS. f. Phys. **114**, 500, 1940; **116**, 257, 1941. — [3]) Vgl. A. Unsöld, loc. cit. sowie H. Schubert, Ann. d. Phys. **39**, 295, 1941.

die Kapillaren aus Jenaer Glas oder Supremax-Glas, da bei diesen Gläsern die Aufrauhung durch die Funken geringer als bei gewöhnlichen Glassorten war. Trotzdem mußten nach wenigen Funkenüberschlägen hoher Stromdichte (100000 bis 170000 A/cm²) die Kapillaren wegen zu starker Aufrauhung und der dadurch hervorgerufenen Ausweitung ausgewechselt werden. Eine Zertrümmerung der Kapillaren durch den Funken trat bei unseren aperiodischen Entladungen fast nie auf, war dagegen durch oszillierende Entladungen gleicher Stromdichte leicht zu erreichen.

Fig. 1 zeigt das Schaltschema. Die auf Spannungen bis zu 40000 Volt aufgeladenen Kondensatoren C von 0,25 bis 4,5 μF entluden sich nach Schließen des elektromagnetischen Schalters S über den zur Erhaltung

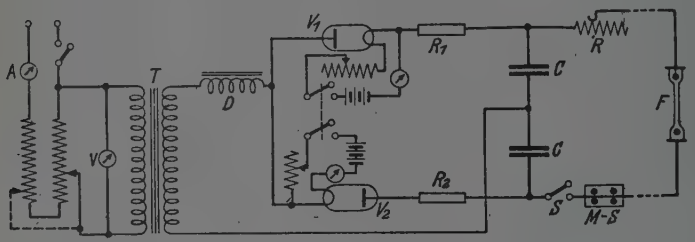


Fig. 1. Schaltschema des Auflade- und Entladungskreises.

aperiodischer Entladungen erforderlichen Widerstand R durch die Entladungskapillare F. Beobachtet wurde „end on“

Die Messung der Maximalstromstärke des Funkens geschah mittels magnetisierter Stahlstäbchen (bei MS aufgestellt) nach der von Blum und Finkelnburg[1]) verbesserten Methode, und zwar wurde gleichzeitig innerhalb und außerhalb des Entladungskreises gemessen, um den Einfluß von Störfeldern auszuschalten und die Meßgenauigkeit zu steigern. So betrug der mittlere Fehler einer Stromstärkemessung nur $\pm 5\%$. Die Maximalstromdichte wurde aus der gemessenen Stromstärke unter der Voraussetzung gleichmäßiger Entladungserfüllung der Kapillaren berechnet.

An einem und demselben Funken wurde jeweils gleichzeitig mit der Maximalstromstärke die Intensität der Funkenstrahlung auf folgende Art gemessen. Wegen der geringen Leuchtdauer des Funkens wurde eine Photozellenanordnung mit Fadenelektrometer in der Schaltung der Auflademéthode benutzt, mit der auch noch schwache Photoströme gemessen werden können. Fig. 2 zeigt die Schaltung; die Bedeutung des Zusatzkondensators C_Z sowie des Nebenschlusses mit C_i wird später erklärt.

[1]) E. Blum u. W. Finkelnburg, ZS. f. techn. Phys. 18, 61, 1937.

Zur Vermeidung von Trägheitserscheinungen und Kriechströmen sowie zur Gewährleistung des linearen Zusammenhangs von Strahlungsintensität und Photostrom wurde mit gut isolierten Schutzring-Vakuumzellen von Pressler gearbeitet. Die Proportionalität von Strahlungsintensität und Zellenstrom wurde nochmals besonders mittels des Abstandsgesetzes kontrolliert. Zum Schutz gegen die starken Felder des Entladungskreises war die gesamte Meßanordnung durch geerdete Blechhüllen gut abgeschirmt, so daß störungsfrei gemessen werden konnte.

Der Lichtblitz eines einzelnen Funkens, dessen Oszillationsfreiheit mit der Methode der magnetisierten Stäbchen[1]) kontrolliert wurde, erzeugt nach

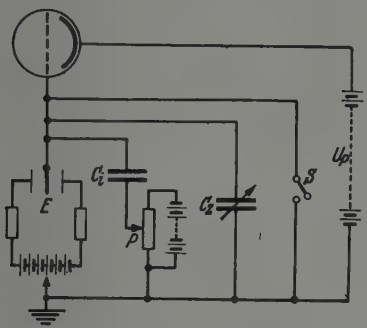


Fig. 2. Schaltung der Photostrom-Meßanordnung (E: Einfadenelektrometer).

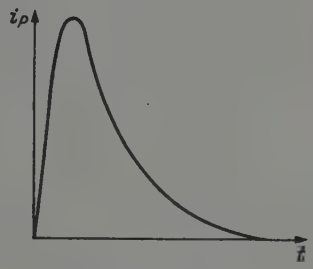


Fig. 3. Zeitlicher Verlauf des Photostroms.

oszillographischen Aufnahmen einen Photostrom von dem in Fig. 3 gezeigten zeitlichen Verlauf. Dieser Stromstoß lädt die Gesamtkapazität des Systems Zelle-Zuleitung-Elektrometer auf die vom Elektrometer E angezeigte Spannung U auf, die bei konstanter Kapazität der Strahlung proportional ist.

Es mußte aber noch eine Schwierigkeit behoben werden. Die Elektrometerempfindlichkeit wurde nach dem jeweils schwächsten vorkommenden Photostrom eingestellt. Da bei der Messung der Strahlungsintensität als Funktion der Stromdichte der zu messende Photostrom um einige Größenordnungen wuchs, wurde von einer gewissen Stromdichte an die Kapazität des Meßsystems durch einen einzigen Lichtblitz vollständig aufgeladen; das Elektrometer zeigte also bei noch größerer Strahlung keine höheren Werte mehr an. Ein gut isolierter Drehkondensator C_Z wurde daher zur regelbaren Vergrößerung der Kapazität parallel zum Elektrometer gelegt (s. Fig. 2). Eine Schwierigkeit beim Arbeiten mit der Caesium-Kalium-Photozelle sei noch erwähnt: ihr beträchtlicher Dunkelstrom. Die durch

[1]) E. Blum u. W. Finkelnburg, l. c.

ihn hervorgerufene Aufladung wurde gemäß Fig. 2 bei P durch stetig regelbare Influenzladungen kompensiert, wodurch der Elektrometerfaden bis zum Beginn des Lichtblitzes durch Regelung eines Potentiometers ruhig gehalten werden konnte. Das Elektrometer wurde, um möglichst lineare Empfindlichkeit zu erhalten, so justiert, daß bei gleichbleibender Dauerbeleuchtung der Zelle der Elektrometerfaden mit konstanter Geschwindigkeit über das Gesichtsfeld wanderte.

Mit dieser Anordnung wurden keine Absolutmessungen ausgeführt, sondern nur die Abhängigkeit der Strahlungsintensität des Einzelfunkens von der Maximalstromdichte gemessen. Voraussetzung dieser Messungen ist die Unabhängigkeit der Stromstärke-Zeit-Kurve des Einzelfunkens von der Maximalstromstärke; erwartungsgemäß zeigten oszillographische Aufnahmen, daß diese Voraussetzung erfüllt ist.

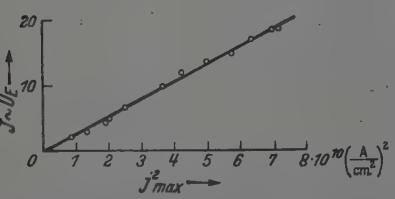


Fig. 4. Beispiel für die quadratische Abhängigkeit der Strahlungsintensität von der Maximalstromdichte des Funkens, aufgenommen mit Kaliumzelle.

Aus äußeren Gründen wurde die gesamte Funkenstrahlung ohne spektrale Zerlegung gemessen. Damit kommen zwei Fehler in Betracht. Erstens wird die Summe der kontinuierlichen und der gleichzeitig emittierten Linienstrahlung gemessen, während allein die Abhängigkeit der kontinuierlichen Strahlung von der Stromdichte interessiert. Der hierdurch entstehende Fehler kann aber bei höheren Stromdichten vernachlässigt werden, da spektrographische Aufnahmen (vgl. Fig. 8) zeigen, daß die Linienstrahlung gegenüber der kontinuierlichen Strahlung oberhalb 70000 Amp. pro cm² vernachlässigt werden kann. Schwieriger steht es um den zweiten möglichen Fehler. Die spektrale Zusammensetzung der Funkenstrahlung könnte sich, vor allem im kurzwelligen Bereich, mit der Stromdichte ändern. Dann könnten die Meßergebnisse Gesetzmäßigkeiten vortäuschen, die nur auf der für verschiedene Spektralbereiche verschiedenen Empfindlichkeit der Photozelle beruhen. Zur Untersuchung dieser Fehlermöglichkeit wurde mit zwei Photozellen sehr verschiedener spektraler Empfindlichkeit gearbeitet, einer Kalium- und einer Caesium-Kalium-Zelle. Die Ergebnisse waren nach Fig. 4 bis 7 innerhalb der Fehlergrenzen die gleichen; die spektrale Zusammensetzung der Strahlung ändert sich also nicht wesentlich mit der Stromdichte. Möglicherweise deuten aber die geringen Abweichungen, die die mit der Cs-K-Zelle aufgenommenen Meßpunkte höchster Stromdichte von der Kurve nach unten zeigen (im Gegensatz zu den Mes-

sungen mit der K-Zelle!), darauf hin, daß geringe Intensitätsverschiebungen etwa im UV bei höchster Stromdichte doch vorkommen. Weitere Untersuchungen sollen diesen Punkt klären.

Zur Untersuchung der spektralen Energieverteilung der Funkenkontinua im sichtbaren Gebiet diente der gleiche Entladungskreis; das Licht der Kapillaren wurde durch eine Linse auf dem Spalt des 3-Prismen-Glasspektrographen GH von Steinheil mit dem Öffnungsverhältnis 1 : 10 abgebildet. Je nach Stromdichte und Spaltweite ergaben 1 bis 6 Funken ein gut durchexponiertes Spektrum. Die den Entladungsraum abschließenden Quarzfenster überzogen sich nach mehreren Entladungen höherer Stromdichte mit einem weißlichen Belag, offenbar einem Verdampfungsprodukt, der jedesmal bei Sichtbarwerden entfernt wurde. Eine Kontrolle ergab, daß der Belag die Intensitätsverteilung im Kontinuum nicht merklich beeinflußte.

Als Vergleichslichtquelle diente der positive Krater eines bis dicht an die Zischgrenze belasteten Homogenkohlebogens mit parallelgeschalteter Kapazität von 100 μF. Seine spektrale Energieverteilung entspricht dann bei Einhaltung gewisser Bedingungen der eines schwarzen Strahlers von 3800° K. Verwendet wurden Homogenkohlen RW Gamma S sowie Graphitkohlen der Ringsdorff-Werke, und zwar

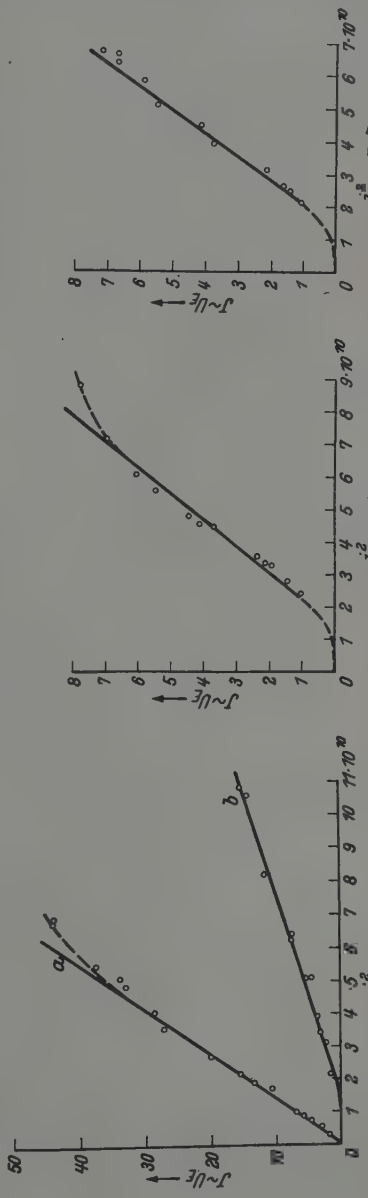


Fig. 5 bis 7. Beispiele für die Abhängigkeit der Strahlungsintensität der Funken vom Quadrat der Maximalstromdichte, aufgenommen mit Caesium-Kalium-Zelle.

von 6 bzw. 5 mm Durchmesser. Die Wellenlängen wurden mit Hilfe eines Eisenbogens bestimmt. Auf gleichen Strahlengang von Bogen- und Funkenlicht wurde sorgfältig geachtet.

Die Intensitätsänderungen des Vergleichsbogens wie die der Funkenstrahlung wurden durch Variation der Spaltbreite des Spektrographen gewonnen. Der Intermittenzeffekt wurde nicht berücksichtigt, da über ihn für Belichtungszeiten unter 10^{-5} sec in der Literatur keine einheitlichen Aussagen zu finden waren. Bei Aufnahme der Vergleichsspektren betrug die Belichtungszeit $^1/_{100}$ sec. Verwendet wurden die panchromatischen feinkörnigen Perutz Pervola-Platten. Die mit einem Registrierphotometer nach Koch-Goos und einem solchen von Zeiss gemessenen Schwärzungswerte S_x wurden mittels der Dispersionskurve des Spektrographen auf S_ν umgerechnet und aus der Schwärzungskurve dann der J_ν-Wert entnommen.

Bei allen Aufnahmen wurde der Funkenkreis mit dem elektromagnetisch betätigten Schalter S (Fig. 1) geschlossen. Dadurch wurden reproduzierbare Verhältnisse erreicht; außerdem konnte bei konstantem Druck durch Spannungsvergrößerung die Stromdichte erhöht werden. So wurden Funkenspektren bei jeweils konstanten Drucken zwischen 2 und 100 Torr und Maximalstromdichten zwischen 70000 und 170000 A/cm² (entsprechend 5500 bis 27000 Volt Zündspannung und 430 bis 2200 Amp. Maximalstromstärke) aufgenommen. Ausgewertet wurden insgesamt 50 Spektren auf 14 Platten. Dabei wurde jeweils die Intensität des Kontinuums an 15 bis 17 gleichmäßig verteilten Wellenlängen zwischen λ 6500 und 4000 Å gemessen und die J_ν-Werte bestimmt.

4. Ergebnisse.

a) Die Stromdichte-Abhängigkeit der Strahlungsintensität. Die Fig. 4 bis 7 zeigen einige typische Beispiele für den von uns gemessenen Zusammenhang zwischen der von der Photozelle aufgenommenen Funkenstrahlung und dem Quadrat der Maximalstromdichte. Als Maß der Intensität ist die am Elektrometer abgelesene Spannung U_E aufgetragen, die der vom Lichtblitz erzeugten Ladungsmenge proportional ist. Sieht man von dem Gebiet der geringen Stromdichten ab, in dem, wie oben erwähnt, die Linienstrahlung gegenüber der kontinuierlichen Strahlung noch eine störende Rolle spielt, so folgt aus den Fig. 4 bis 7, daß die von den Zellen aufgenommene Strahlungsenergie der Funken dem Quadrat ihrer maximalen Stromdichte proportional ist.

b) Die spektrale Energieverteilung der Funkenstrahlung. Fig. 8 zeigt eine Serie von Funkenspektren in CO_2 von 4 Torr, aus der deutlich zu

ersehen ist (vgl. Figurenunterschrift!), wie mit zunehmender Funkenstromdichte das Kontinuum plötzlich intensiv wird und oberhalb 70000 A/cm² gegenüber den Linien weit überwiegt. Gleichzeitig mit dieser Entwicklung des Kontinuums nimmt die Verbreiterung der noch sichtbaren Linien zu, während die Bogenlinien gegenüber den Funkenlinien zurücktreten und allmählich verschwinden. Dieser Verlauf ist bei allen untersuchten Gasen der gleiche. Unter unseren Verhältnissen (gegeben: Kapillare und Entladungskreis) wurde ziemlich genau bei 115000 A/cm² bei allen untersuchten Gasen H_2, N_2, O_2, He und CO_2 das Spektrum zu einem einheitlichen kontinuierlichen Band, das nur von einigen scharfen Funkenlinien und nun auch einigen Absorptionslinien unterbrochen wird. Diese Linien sind im wesentlichen den Bestandteilen des Kapillarenglases zuzuordnen, d. h. den Elementen Si, Ca und Na und sprechen damit für

Fig. 8. Veränderung der Funkenspektren des CO_2 bei 4 Torr. Gasdruck mit zunehmender Stromdichte. Auf Aufnahme 4 (oberhalb 70000 Amp./cm² wird plötzlich das Kontinuum intensiv gegenüber dem Linienspektrum, das bei höchsten Stromdichten fast völlig verschwindet. Durch Veränderung der Funkenzahl wurde die quadratische Zunahme der Gesamtintensität mit der Stromdichte ausgeglichen.

Aufnahme	1: 32000 Amp./cm² (mit Vergleichsspektren)	Aufnahme	8: 117800 Amp./cm² (mit Vergleichsspektren)
,,	2: 49800 ,,	,,	9: 129700 ,,
,,	3: 60100 ,,	,,	10: 140500 ,,
,,	4: 73000 ,,	,,	11: 148800 ,,
,,	5: 86300 ,,	,,	12: 157800 ,,
,,	6: 97700 ,,	,,	13: 166000 ,,
,,	7: 108600 ,,	Aufnahmen 14 bis 16: Kohlebogen-Vergleichsspektren.	

den schon von Anderson[1]) festgestellten atomaren Abbau der Kapillarenwand durch die Entladung.

Die Messung der Intensitätsverteilung des kontinuierlichen Funkenspektrums hatte in allen 50 Fällen das gleiche, in Fig. 9 an zwei Beispielen dargestellte Ergebnis. Unabhängig von Gasart, Gasdruck und Stromdichte des Funkens ergab sich die gegen Wellenzahlen ν aufgetragene Intensität J_ν innerhalb des sehr geringen Streubereiches der Meßpunkte von $\pm$ 8% als konstant. Das gilt für den untersuchten Bereich von 6500 bis 4000 Å.

c) Deutung der Ergebnisse und Vergleich der Plasmabremsstrahlung mit der Röntgenbremsstrahlung. Unsere Funkenstrahlung erfüllt also die oben S. 38 für Brems- und Rekombinationsstrahlung im Entladungsplasma

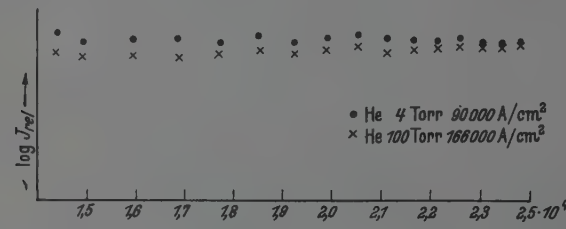


Fig. 9. Beispiel zweier Meßreihen der relativen spektralen Energieverteilung der Funkenkontinua, aufgetragen gegen Wellenzahlen: $J(\nu) = \text{const}$.

angegebenen Bedingungen 1 bis 3, so daß wir zu dem Schluß kommen, daß die Funkenkontinua tatsächlich entsprechend der Finkelnburgschen Deutung[2]) von 1934 als Brems- und Rekombinationsstrahlung der Elektronen im Entladungsplasma aufzufassen sind. Dieser Prozeß, der auch für das Kontinuum der Quecksilber-Hochdruckentladung und andere „Stromdichte-Kontinua" verantwortlich zu sein scheint, gewinnt damit für die Gasentladungsphysik eine erhebliche Bedeutung. Es liegt daher die Frage nach dem Wirkungsgrad, der Strahlungsausbeute dieses Prozesses nahe, und diese Frage führt auf den naheliegenden Vergleich mit dem schon lange bekannten und gut untersuchten Fall von Elektronenbremsstrahlung, dem Röntgenbremskontinuum.

Die Strahlungsausbeute des Röntgenbremskontinuums, d.h. der Wirkungsgrad der Umwandlung der Kathodenstrahlenergie in Röntgenbremsstrahlung ist bekanntlich (vgl. „K. Sp." S. 76!) ein sehr geringer. Im günstigsten Fall erreicht er einige Promille, während für den Fall der Bremsung von Gasentladungselektronen an einfach geladenen positiven

[1]) J. A. Anderson, Astrophys. Journ. **75**, 394, 1932. — [2]) W. Finkelnburg, ZS. f. Phys. **88**, 297, 768, 1934.

Plasmaionen nach der Röntgenformel [„K. Sp." S. 76, Gl. (20, 7)] sogar nur ein Wirkungsgrad von 10^{-7} — 10^{-8} sich ergibt. Tatsächlich aber werden nach Elenbaas [1]) beim Quecksilberhochdruckbogen bis zu 15% der umgesetzten elektrischen Energie in Form sichtbarer kontinuierlicher Strahlung emittiert. Kommt dieses Kontinuum also tatsächlich durch Elektronenbremsung und -Rekombination zustande, so besitzt dieser Prozeß im Plasma eine um viele Größenordnungen größere Ausbeute als die Röntgenstrahlerzeugung bei der Elektronenbremsung in der Antikathode. Leider konnten wir an unseren Funken Messungen der Absolutintensität nicht ausführen, weil die zum photographischen Vergleich der Funkenstrahlung mit bekannten Lichtquellen erforderlichen Schwarzschild-Exponenten nicht genügend bekannt sind. Nimmt man aber, was nicht unvernünftig scheint, zu einer ganz groben Abschätzung den Schwarzschild-Exponenten als 1 an, so gelangen wir auch bei unseren Funken zu einem Wirkungsgrad der Umwandlung von Elektronenenergie in sichtbare Bremsstrahlung von der Größenordnung von 10%.

Dieser gewaltige Ausbeuteunterschied der langwelligen kontinuierlichen Plasmastrahlung gegenüber der kurzwelligen Antikathoden-Bremsstrahlung in der Röntgenröhre scheint uns nun modellmäßig verständlich und für den Unterschied beider Strahlungen typisch.

Bei der Bremsung von Kathodenstrahlen im Antikathodenmaterial gelangen nur die wenigen Elektronen in einem oder ganz wenigen Stößen unter Röntgenstrahlemission zur Abbremsung, die in nahezu zentralem Stoß in Richtung eines Atomkerns die äußeren Elektronenhüllen eines Antikathodenatoms durchdringen und im starken Coulomb-Feld des Kerns abgebremst werden. Der weitaus größte Teil der Kathodenstrahlelektronen aber wird nicht genügend nahe an einen Kern herankommen, sondern seine Energie in einer großen Folge von meist elastischen Stößen mit Hüllenelektronen abgeben und so praktisch nur zur Aufheizung der Antikathode beitragen. Die geringe Strahlungsausbeute der Röntgenbremsstrahlung ist also modellmäßig leicht verständlich.

Anders liegt der Fall bei der Bremsung und Einfangung von Entladungselektronen im Plasma. Da wir hier langwellige (sichtbare und ultraviolette) Strahlung betrachten, genügt die Elektronenbremsung und Einfangung in den Feldern der einfach positiv geladenen Ionen, und aus diesen besteht ja ein wesentlicher Prozentsatz der schweren Plasmateilchen. Im Entladungsplasma gibt es also nicht wie im Antikathodenmetall nur wenige

[1]) W. Elenbaas, Physica 6, 299, 1939.

räumlich kleine Bezirke, in denen Elektronen unter Strahlung abgebremst und eingefangen werden können, sondern die bremsenden Coulomb-Felder der Entladungsionen erfüllen praktisch den ganzen Plasmaraum. Die hohe Strahlungsausbeute der Elektronenbremsung und -Rekombination im Gasentladungsplasma unter Emission sichtbarer und ultravioletter Strahlung scheint daher verständlich und der Prozeß auch technisch zur ökonomischen Erzeugung kontinuierlicher Strahlung geeignet.

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Darmstadt ausgeführt, dessen Direktor, Herrn Prof. Dr. Rau, wir für sein Interesse und die großzügige Bereitstellung aller erforderlichen Mittel herzlich danken. Unser Dank gilt ferner Herrn H. Hess für seine vielfache Hilfe bei den Versuchen.

Hamburg-Volksdorf und *Straßburg* (*Elsaß*), Physikalisches Institut der Reichsuniversität, Februar 1943.

Über die Lichtdurchlässigkeit des amorphen Selens.

Von **A. Becker** und **Ilsemarie Schaper** in Heidelberg.

Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 12. April 1943.)

Es wird die Lichtdurchlässigkeit von durch Kathodenzerstäubung hergestellten amorphen roten Selenschichten verschiedener Dicke im sichtbaren Gebiet und im anschließenden Ultrarot bis gegen 5 μ hin systematisch untersucht und ihre Abhängigkeit von der Temperatur zwischen -150 und $+150^0$ C verfolgt. Wenn auch die Genauigkeit der quantitativen Einzelergebnisse offenbar durch die Schwierigkeit der Dickenbestimmung und durch geringe, aus der Herstellungsweise der Schichten sich ergebende strukturelle Verschiedenheiten derselben beschränkt ist, so führt doch die mögliche einheitliche Zusammenfassung des umfangreichen Beobachtungsmaterials zu einer einwandfreien Kenntnis des durchschnittlichen Verhaltens des untersuchten Stoffes. Der festgestellte Temperatureinfluß besteht in einer mit abnehmender Temperatur erheblich steigenden Begünstigung der Durchlässigkeit nach kürzeren Wellen hin, während er im langwelligen Gebiet stark zurücktritt.

Die eigenartige Stellung, welche dem Selen infolge seines ausgezeichneten lichtelektrischen Verhaltens zukommt, macht es erforderlich, daß auch seine optischen Eigenschaften eingehender Untersuchung unterworfen werden. Der früher von dem einen von uns festgestellte auffallende Temperatureinfluß auf die Eigenschaften des Selenphotoelements[1]), die Tatsache nämlich, daß das Photoelement bei tiefer Temperatur sich gegenüber kurz- und langwelligem Licht gänzlich verschieden verhält, hat uns veranlaßt, dem optischen Problem der Lichtabsorption gesondert nachzugehen. Hierfür eignet sich vorzugsweise das amorphe rote Selen, wie es durch Kathodenzerstäubung unschwer in völlig klar durchscheinenden Schichten erhältlich ist, zumal es nicht ausgeschlossen erscheint, von hier aus auch den optischen Eigenschaften des in den Selenzellen vorhandenen metallischen Selens nahezukommen, für das im Schrifttum meist sehr ähnliche Angaben gemacht sind. Der Überblick über das einschlägige Schrifttum zeigte uns auch, daß die wesentlichen hierhergehörigen Fragestellungen trotz der erheblichen Zahl der ihnen gewidmeten Arbeiten durchaus noch nicht erschöpfend behandelt sind. Es liegen zwar an dicken Schmelzschichten sorgfältige Bestimmungen der optischen Konstanten aus dem Polarisationszustand

[1]) A. Becker, ZS. f. Phys. 112, 642; 114, 342, 1939.

des reflektierten Lichts vor[1]), die vornehmlich unter theoretisch optischen Gesichtspunkten durchgeführt sind, während unmittelbare Absorptionsmessungen, soweit uns bekannt, nur auf wenige Sonderfälle beschränkt und fast stets an Schichten unbekannter Dicke durchgeführt sind[2]). Die Frage des Temperatureinflusses ist erstmals — ebenso wie die Bezugnahme auf das lichtelektrische Verhalten — von Mönch[3]) in Angriff genommen worden. Er beschränkt sich aber auf die Feststellung der photographisch ermittelten Verschiebung der „unscharfen Absorptionskante" einer unbekannten Schichtdicke nach kürzeren Wellen bei der Temperatur der flüssigen Luft.

Unsere Messungen beziehen sich durchweg auf klare, gut spiegelnde Selenschichten, die durch Kathodenzerstäubung in hochverdünnter Luft auf 1 mm dicken Quarzglasplatten von 30 mm Durchmesser niedergeschlagen sind und deren amorphe Struktur durch eine besondere Prüfung[4]) nachgewiesen ist. Ihre jeweils durch sorgfältige Wägungen bestimmte Dicke haben wir zwischen 0,0002 und 0,022 mm, also etwa im Verhältnis 1 : 100 variiert. Sie erscheinen in der Durchsicht schwach gelb bis dunkelrot, während die dicksten Schichten in der Aufsicht glänzend schwarz erscheinen. Ihre Messung erfolgte im allgemeinen einige Tage nach der Herstellung. Schichten, welche schon nach mehreren Tagen eine auf strukturelle Veränderungen hindeutende Trübung bei Aufbewahrung im evakuierten Exsikkator erkennen ließen, haben wir nicht zu quantitativen Schlüssen herangezogen.

1. Messungen im sichtbaren Gebiet.

Für die Durchlässigkeitsbestimmungen im sichtbaren Gebiet haben wir das König-Martenssche Spektralphotometer[5]) benutzt. Um den Einfluß der Lichtschwächung durch die Quarzunterlage auf die Ergebnisse möglichst auszuschalten, erfolgt die Messung in allen Fällen derart, daß die die Selenprobe durchsetzende Lichtintensität mit der andererseits die klare Quarzplatte durchsetzenden verglichen wird,

---

[1]) C. K. Edmunds, Phys. Rev. **18**, 220, 1904; W. Meier, Ann. d. Phys. **31**, 1017, 1910; E. Schmidt, Diss. Rostock 1911; K. Foersterling u. V. Fréedericksz, Ann. d. Phys. **43**, 1228, 1914. — [2]) F. F. Martens, Verh. D. Phys. Ges. **4**, 144, 1902; R. W. Wood, Phil. Mag. (6) **3**, 613, 1902; W. W. Coblentz, Phys. Rev. **19**, 94, 1904; E Rütten, ZS. f. Phys. **60**, 3, 1930. — [3]) G. Mönch, Phys. ZS. **40**, 487, 1939. — [4]) Die Dr. F. Wecker im Institut mittels Röntgenstrahlen durchgeführt hat. — [5]) F. F. Martens u. F. Grünbaum, Ann. d. Phys. **12**, 984, 1903. An diesen Messungen war Frl. Gisela Reńger beteiligt.

so daß die letztere also jeweils die einfallende Intensität darstellt. Zur Beurteilung des Quarzeinflusses verweisen wir auf die Angaben der Tabelle 1.

Tabelle 1. Lichtschwächung durch eine 1 mm dicke Quarzglasplatte.

	λ mμ	550	580	635	700
beob.	R v. H.	7,8	8,1	7,4	7,1
	r (17°) v. H.	3,62	3,53	3,51	3,51
ber.	r (0°) v. H.	3,50	3,49	3,46	3,44
	R v. H.	6,76	6,74	6,69	6,65

Hierin bezeichnet R beob. die gesamte Lichtschwächung bei vertikalem Durchgang, r (17°) der bei einem Einfallswinkel von 17° von uns beobachtete Bruchteil der an der Vorderfläche des Quarzes reflektierten Intensität, r (0°) der aus dem bekannten Brechungsindex für vertikale Inzidenz berechnete an einer Fläche reflektierte Bruchteil und R ber. der hieraus nach der genäherten Beziehung $R = \frac{2r}{r+1}$ für beide Flächen berechnete Wert. Die Übereinstimmungen sind, da es uns nicht auf Präzisionsbestimmungen ankommt, für unsere vorliegenden Fälle ausreichend.

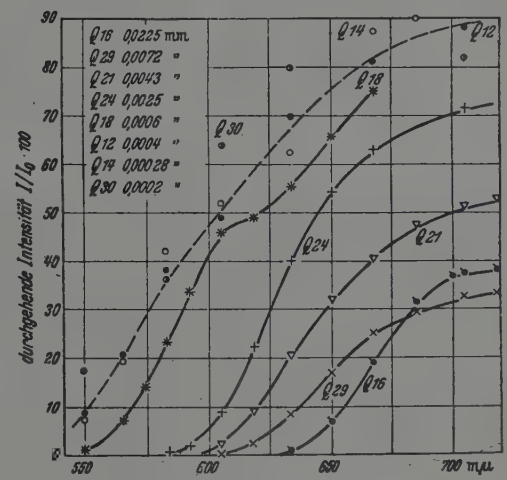


Fig. 1. Absorption und Schichtdicke.

a) Selendurchlässigkeit bei Zimmertemperatur. Die für 8 Selenproben verschiedener Dicke erhaltenen Meßergebnisse stellen wir in Fig. 1 zusammen. Man beobachtet in allen Fällen einen allmählichen Abfall der im Rot beträchtlichen Durchlässigkeit nach kürzeren Wellen hin, die bei abnehmender Schichtdicke immer mehr nach Blau hin verfolgbar ist. Es liegt also keine Absorption von solcher Stärke vor, daß von einer durch die Schichtdicke kaum wesentlich beeinflußbaren „Absorptionskante" gesprochen werden könnte. Es fällt auf, daß die dünnsten

Schichten zwar naturgemäß die größte Durchlässigkeit zeigen, daß aber deren Zusammenhang mit der Dicke nicht die gewünschte und erwartete Sicherheit erkennen läßt. Es liegt dies wohl zum Teil an der hier beträchtlichen Unsicherheit der Dickenangabe, an einem etwaigen zunehmenden Einfluß von Oberflächenschichten gegenüber dem Gesamtmaterial oder auch an Interferenzerscheinungen, wie sie vielleicht durch bisweilen auftretende Inflexionen der Kurven (*Q* 18) angedeutet sind. Ein einheitlicheres Bild zeigen die den dickeren Schichten zugehörigen Ergebnisse, während die dickste Schicht (*Q* 16) durch ihre relativ hohe Rotdurchlässigkeit den regelmäßigen Verlauf der Erscheinung mit der Dicke durchbricht.

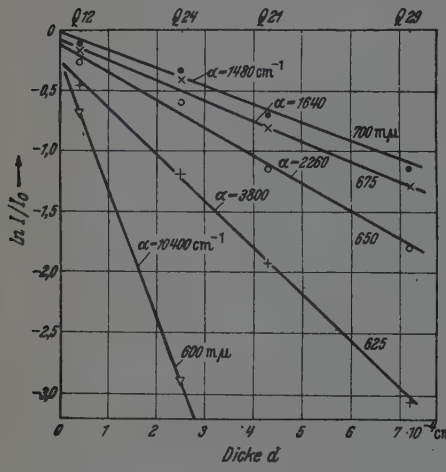


Fig. 2. Die Lichtabsorption im Selen.

Versucht man, die Ergebnisse wenigstens in Annäherung einheitlich zusammenzufassen, um allgemein auf die *Selenabsorption* zu schließen, so ist zu beachten, daß aus unseren Kurven zwar der Einfluß der Quarzunterlage, nicht aber derjenige der *Lichtreflexion am Selen* ausgeschaltet ist. Man könnte auch vermuten, daß etwa eine *Lichtdiffusion* in den Schichten eine, wenn auch okular nicht auffallend hervortretende Rolle spielen könnte. Um dies letztere zu prüfen, haben wir vergleichsweise Durchlässigkeitsmessungen mit sehr verschiedenen Abständen (0,2 bis 20 cm) der Selenschichten vom Photometerspalt durchgeführt und keinerlei Verschiedenheit der Ergebnisse feststellen können. Um den Reflexionseinfluß am Selen zu eliminieren, liegt es nahe, bei jeweils gleicher Wellenlänge Schichten verschiedener Dicke zu vergleichen. Ist R von der Dicke unabhängig, so muß sich eine lineare Beziehung zwischen $\ln J/J_0$ und d ergeben, und die Neigung der Geraden muß unmittelbar die Werte von $\alpha \cdot d$ darstellen, wenn α der gesuchte Absorptionskoeffizient ist; andererseits muß der Schnittpunkt der Geraden mit der Ordinatenachse ($d = 0$) über die Höhe der Reflexion aussagen. Das Ergebnis einer solchen Versuchsauswertung für die 4 Dicken *Q* 12, *Q* 24, *Q* 21 und *Q* 29 findet sich in Fig. 2 für 5 Wellengebiete. Dasselbe entspricht in der Tat befriedigend der Erwartung. Man bemerkt nur,

daß die der dünnsten Schicht zugehörigen Punkte im allgemeinen zu tief liegen, und dies muß offenbar auch den tatsächlichen Verhältnissen entsprechen, da andernfalls bei den längsten Wellen überhaupt keine Reflexion angezeigt ist.

Betrachten wir die gefundenen Absorptionswerte als Funktion der Wellenlänge, so ergibt sich der in Fig. 3 durch ○ bezeichnete Verlauf. Die Punkte schließen sich einem glatten Kurvenzug an, dessen steiler Anstieg nach kurzen Wellen deutlich hervortritt.

Beachten wir nun noch näher die Ordinatenschnittpunkte, so fallen diese für die kürzeren Wellen zusammen und liefern in diesem Fall ein Reflexionsvermögen von 26%, das gut mit den Angaben von Foersterling und Fréedericksz (a. a. O.) übereinstimmt. Durch das Höherrücken der Schnittpunkte nach längeren Wellen hin wird eine Abnahme der Reflexion angedeutet, wie sie ebenfalls — allerdings meist in geringerem Maße — im Schrifttum angezeigt wird. Wenn beispielsweise von Rütten[1]) im kurzwelligen Ultrarot die Durchlässigkeit einer Selenschicht zu über 80% gefunden wird, so spricht auch dies für ein erhebliches Zurücktreten der Reflexion[2]). Es ist bei dieser Sachlage zu erwarten, daß die von uns festgestellten Durchlässigkeiten insbesondere der dickeren Schichten soweit überwiegend durch den Absorptionsvorgang bestimmt sind, daß die Nichtberücksichtigung der Reflexion das festzustellende Absorptionsvermögen nicht in praktisch fühlbarem Maße zu fälschen vermag. Wir haben dies in der Weise näher geprüft, daß wir das Absorptionsvermögen gemäß der idealisierten Beziehung $J = J_0 \cdot e^{-\alpha d}$ auch einfach aus den Absolutwerten von J/J_0 berechnet haben. Das die gut übereinstimmenden Mittelwerte für die betrachteten 4 Dicken zusammenfassende Ergebnis wird in Fig. 3 durch • verzeichnet. Es zeigt sich in der Tat ein so guter Anschluß an die exaktere Herleitung der Werte, daß man den mitgeteilten Kurvenzug jedenfalls mit

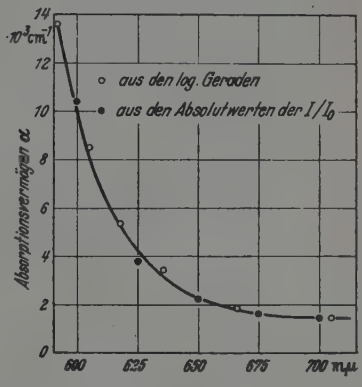


Fig. 3. Absorptionsvermögen und Wellenlänge.

[1]) E. Rütten, ZS. f. Phys. 60, 3, 1930. — [2]) Wir verweisen in diesem Zusammenhang auch auf die hohen Werte der Durchlässigkeit, welche beispielsweise für Q 10 (Fig. 5) bei 670 mμ beobachtet sind.

praktisch ausreichender Sicherheit als Ausdruck der tatsächlichen Absorptionsverhältnisse im roten Selen ansehen darf. Eine Ausnahme von diesem durchschnittlichen Verhalten macht nur die dickste Schicht Q 16, deren Durchlässigkeit aus bis jetzt uns nicht ersichtlich gewordenen Gründen erheblich höhere Werte besitzt, als sie bei der relativ großen Dicke erwartet werden sollten. Diese Schicht zeigte eine besonders glänzende, unter dem Mikroskop völlig homogene Oberfläche und klare dunkelrote Durchsicht. Zu ihrer Herstellung war allerdings eine längerdauernde, mit fühlbarem Temperaturanstieg verbundene Zerstäubungsdauer erforderlich (vgl. auch Abschn. 2).

b) Die Temperaturabhängigkeit der Durchlässigkeit. Zur Verfolgung des Temperatureinflusses auf das Absorptionsvermögen haben wir die in Fig. 4 veranschaulichte Anordnung benutzt, welche der früher von Mönch[1]) angegebenen ähnlich ist. Die Schicht Q befindet sich in einer metallischen Fassung, die auf den Boden eines Kupferrohres angeschraubt ist, welches bei G in ein Glasrohr R eingeschmolzen ist. Dieser Teil wird mittels Schliffes in eine durch Glasfenster $F_1 F_2$ verschlossene weitere Glasröhre eingesetzt, welche durch Phosphorsäure P getrocknet und durch den Hahnansatz hindurch evakuiert werden kann. Tiefe Temperaturen werden durch Einfüllen von fester Kohlensäure in Alkohol oder von flüssiger Luft in R hergestellt, höhere Temperaturen durch Wasser oder Glykol in R, in das gleichzeitig ein Heizdraht eingeführt ist. Die Temperatur des Schichtträgers, welche derjenigen der Schicht Q selbst nahe gleichgesetzt werden kann, wird durch ein bei TT angeschlossenes Thermoelement angezeigt. Die ganze Anordnung wird in den einen Strahlengang des Spektralphotometers eingeführt, während im zweiten Strahlengang jetzt außer einer Quarzplatte noch 2 Glasplatten wie F_1 und F_2 zum Zwecke der Ausschaltung des bei dieser Versuchsweise vermehrten Lichtverlustes eingeschaltet sind

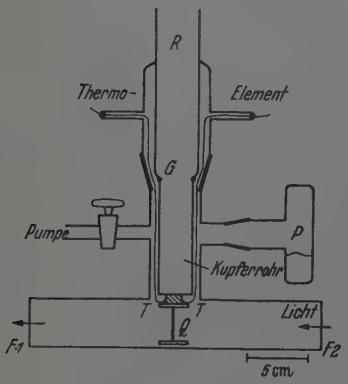


Fig. 4. Versuchsrohr für Temperaturvariation.

[1]) G. Mönch, ZS. f. Phys. 78, 732, 1932.

Die Kurven der Fig. 5 zeigen den Einfluß der Temperaturerniedrigung für zwei verschieden dicke Selenschichten Q 10 und Q 22. Deren Durchlässigkeit hat bei Zimmertemperatur nahe diejenigen Werte, welche der Dicke entsprechend nach den in Fig. 1 dargestellten Befunden an anderen Schichten zu erwarten sind. Die Temperaturerniedrigung führt zu einer Kurvenverschiebung nach kürzeren Wellen hin, die im langwelligen Rot im allgemeinen weniger erheblich zu sein scheint und in den übrigen Bereichen nahe gleiche Absolutbeträge annimmt derart, daß *die relative Steigerung der Durchlässigkeit mit abnehmender Wellenlänge ständig zunimmt.*

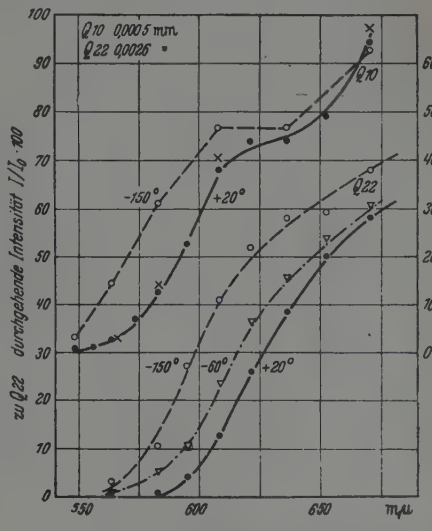


Fig. 5. Temperaturabhängigkeit der Absorption.

Die Verfolgung der Erscheinung an drei weiteren Schichten auch nach höheren Temperaturen hin führt zu den in Fig. 6 zusammengefaßten Ergebnissen. Q 21 und Q 29 sind die bereits im vorhergehenden Abschnitt näher betrachteten Proben. Die Kurvenverschiebung bei — 150° tritt hier wieder mit besonderer Deutlichkeit hervor. Wir zeigen hier auch, daß diese Feststellungen durchaus reproduzierbar und nicht etwa auf nicht rückgängige Schichtveränderungen anderer Art zurückzuführen sind. Während im Falle Q 21 die durch × wiedergegebenen Meßwerte der Ausgangsbeobachtung bei 20°

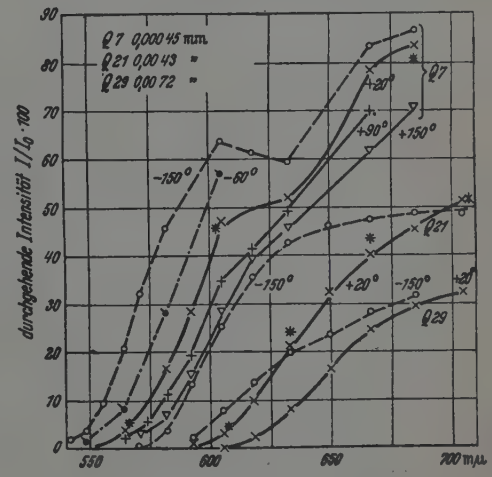


Fig. 6. Temperaturgang der Absorption.

zugehören, haben wir durch * diejenigen Werte eingetragen, welche nach Aufnahme der — 150°-Kurve wieder bei 20° meßbar waren. Auf eine solche Prüfung der Reproduzierbarkeit haben wir stets Wert gelegt. Sie ist auch bei Q 7 durch Einfügen der *-Punkte angedeutet, welche bei Zimmertemperatur erhalten sind, nachdem die Abkühlung und die Erhitzung mit siedendem Wasser erfolgt war. Die bis + 150° verfolgte Rechtsverschiebung der Kurve deutet an, daß diese Verschiebung sowohl nach tiefer als nach höherer Temperatur hin der jeweiligen Temperaturdifferenz nahe proportional zu verlaufen scheint. Der Versuch zu noch höherer Temperatur zu gehen, führte, wie zu erwarten war, infolge einsetzender Strukturänderung der Schicht nicht mehr zu reproduzierbaren Ergebnissen. Auffallend ist die wiederum bei dünnster Schicht sich bemerkbar machende Selektivität der Durchlässigkeit, welche bei — 150° besonders ausgeprägt ist. Sie erschwert leider eine ausreichend sichere quantitative Festlegung der Verschiebungen. Als durchschnittliches Ergebnis der Beobachtung kann in dieser Hinsicht folgendes festgestellt werden:

Die Verschiebung der Durchlässigkeitswerte ist für den ganzen untersuchten Wellenbereich praktisch konstant und mit der Temperaturänderung gleichsinnig und dieser mindestens nahe proportional. Die Veränderung der Temperatur hat also im wesentlichen lediglich eine *Parallelverschiebung der Durchlässigkeitskurven auf der Wellenlängenachse* zur Folge. Dies trifft zweifellos mit Annäherung zu; wie weit hiervon prinzipielle Abweichungen bestehen könnten, wäre nur durch Präzisionsmessungen zu entscheiden. Aus dieser Formulierung folgt in Übereinstimmung mit der Erfahrung, daß die relative Durchlässigkeitsänderung in einem betrachteten Wellengebiet mit der Steilheit der Durchlässigkeitskurve wächst. Es ist dementsprechend nur mit geringen Änderungen im langwelligen Rot (und offenbar auch im Ultrarot) zu rechnen, wo die Durchlässigkeit an sich keine erhebliche Wellenlängenabhängigkeit mehr zeigt. Die geringen und bisweilen die entgegengesetzte Richtung einnehmenden Temperatureinflüsse, welche unsere Kurven im langwelligen Rot zeigen, werden hiernach ohne weiteres verständlich, zumal wenn man die dort vorhandene Schwierigkeit der okularen Photometrierung mit berücksichtigt.

2. *Die Durchlässigkeit im Ultrarot.*

Da die lichtelektrische Empfindlichkeit des roten Selens bei 700 mμ ein Maximum besitzt[1]), ist die Kenntnis des Absorptionsverlaufs auch

[1]) B. Gudden u. R. Pohl, ZS. f. Phys. **35**, 249, 1925.

über 700 mμ hinaus von Bedeutung. Wir haben daher Wert darauf gelegt, das Verhalten einiger unserer Schichten auch im anschließenden Ultrarot zu verfolgen. Es stand uns hierfür der von Lehrer[1]) entwickelte Ultrarot-Spektrograph zur Verfügung[2]), der eine einwandfreie objektive Registrierung des Durchlässigkeitsverlaufs ermöglicht. In Fig. 7 geben wir die Registrierkurve der dicksten früher betrachteten Selenschicht Q 16 und der sie tragenden reinen Quarzplatte Q zusammen mit der bei Abdeckung des Lichts erhältlichen Nullinie des Apparats. Es macht sich hier mit auffallender Deutlichkeit die Absorptionsbande der Kohlensäure der Luft bei 2,7 und 4,3 μ und die den nutzbaren Wellenbereich begrenzende Quarzabsorption bemerkbar. Fig. 8 gibt

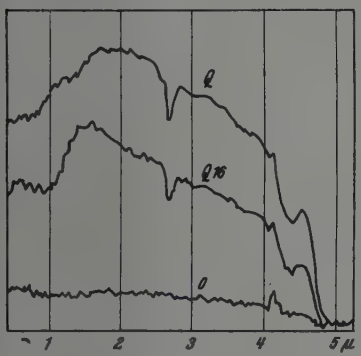


Fig. 7. Durchlässigkeit von Q 16 und reinem Quarz. Q 16 = 0,0225 mm.

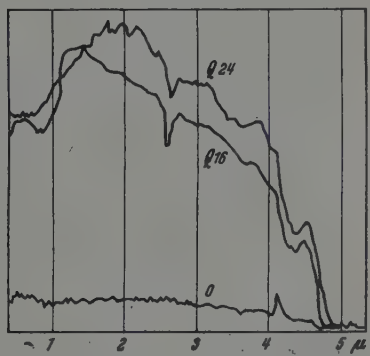


Fig. 8. Durchlässigkeit von Q 16 und Q 24. Q 16 = 0,0225 mm; Q 24 = 0,0025 mm.

die mit etwas vergrößerter Apparatempfindlichkeit aufgenommenen Kurven von Q 16 und der ebenfalls im sichtbaren Bereich ausgemessenen Schicht Q 24, deren Vergleich auch für Q 24 die vom Quarzeinfluß und von der Energieverteilung der Lichtquelle befreiten Absolutwerte der Durchlässigkeit zu ermitteln erlaubt. Man erkennt auch hier sofort, daß die Durchlässigkeit von Q 16 trotz seiner nahe 10fachen Dicke gegenüber Q 24 im langwelligen Gebiet außerordentlich hoch ist, so daß in der Gegend von 1 μ sogar Überschneidungen auftreten können, wie dies in Fig. 1 gegenüber Q 29 zu erkennen ist.

Das Resultat der quantitativen Auswertung der Kurven geben wir in Tabelle 2 zusammen mit den Anschlußwerten aus dem sichtbaren Gebiet.

---

[1]) E. Lehrer, ZS. f. techn. Phys. 23, 169, 1942. — [2]) Wir verweisen hierzu auf den Schluß der Arbeit.

Tabelle 2.

λ	μ	0,7	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$100 \cdot J/J_0$	Q 16	36,5	74,0	61,6	57,7	55,0	55,0	55,5	50,0
	Q 24	70,5	76,2	76,4	72,1	67,8	66,2	72,7	66,5

Die Werte bei 1 und 1,5 μ halten wir für etwas weniger gesichert, da der Vergleich der beiden Kurven Q 16 in diesem Bereich keine volle Übereinstimmung zeigt. Das scharfe Maximum von Q 16 bei 1,5 μ ist daher, wie auch die Betrachtung der Nachbargebiete zeigt, tatsächlich weniger ausgeprägt anzunehmen. Im übrigen ist der Anschluß der neuen Messungen an unsere im sichtbaren Gebiet ausgeführten sehr befriedigend, und es ist festzustellen, daß die Durchlässigkeit im wesentlichen im kurzwelligen Ultrarot ihren Höchstwert erreicht und weiterhin innerhalb unseres Meßbereichs keine erheblichen Veränderungen mehr erfährt bzw. nur langsame Abnahme zeigt.

3. Lichtelektrisches und optisches Verhalten. Selenstruktur.

Versucht man, den Befund unserer optischen Untersuchung mit der Kenntnis der lichtelektrischen Eigenschaften des roten Selens in Beziehung zu bringen, so stößt man unzweifelhaft auf erhebliche Schwierigkeiten. Denn es zeigt sich, daß die lichtelektrische Empfindlichkeit, gemessen durch den auf gleiche auffallende Lichtenergie bezogenen lichtelektrischen Primärstrom[1]), etwa dort ein Maximum hat, wo die Lichtabsorption ihrem kleinsten Wert sich annähert, und daß der Abfall des Primärstromes nach kürzeren Wellen etwa dem *Abfall* der Durchlässigkeit parallel geht, während nach längeren Wellen hin kein solcher Zusammenhang besteht.

Auch der Temperatureinfluß auf Photo-Strom und Spannung des Selenphotoelements[2]) wird durch die festgestellte Temperaturabhängigkeit des optischen Verhaltens des roten Selens nicht verständlich, wenn man versuchsweise mit Mönch[3]) annehmen wollte, daß die lichtelektrischen Eigenschaften des grauen Selens im wesentlichen durch Spuren beigemischten roten Selens bedingt seien. Denn in diesem Fall fällt abnehmende Absorption der kurzen Wellen mit einem Rückgang ihrer lichtelektrischen Wirkung bis zu deren völligem Verschwinden

[1]) B. Gudden u. R. Pohl, ZS. f. Phys. **35**, 248, 1925. — [2]) A. Becker, ZS. f. Phys. **112**, 642, 1939; **114**, 342, 1939. — [3]) G. Mönch, Phys. ZS. **40**, 487, 1939.

zusammen, während andererseits das bei jeder Temperatur wenig absorbierte langwellige Licht ausschlaggebende lichtelektrische Wirkung behält. Man könnte bei dieser Sachlage vermuten, daß die Absorption eines Wellengebietes in der Selenzelle von der gleichzeitigen Gegenwart eines anderen Gebietes beeinflußt sein könnte, wenn es überhaupt gelingen sollte, was übrigens nicht anzunehmen ist, den lichtelektrischen Vorgängen lediglich durch optische Erwägungen näherzukommen [1]). Allerdings bedarf es hierzu noch eingehenderer Kenntnis der optischen Eigenschaften des *metallischen Selens*, dessen Durchlässigkeit bisher kaum in variierten Versuchen zur Messung gekommen ist. Es fällt jedenfalls auf, daß nach bisheriger Kenntnis, wie sie einerseits aus einer gelegentlichen Durchlässigkeitsmessung [2]), andererseits aus Reflexionsmessungen [3]) gewonnen wurde, das optische Verhalten der beiden Selen-Modifikationen nicht sehr wesentlich verschieden zu sein scheint und daß auch in der spektralen Verteilung der lichtelektrischen Empfindlichkeit kein erheblicher Unterschied bestehen soll. Dann wäre aber auch kein Grund, die lichtelektrischen Eigenschaften des metallischen Selens auf die gleichzeitige Gegenwart der amorphen Modifikation zurückführen zu wollen, es sei denn, daß das letztere jeweils mengenmäßig dominieren würde, so daß es auch für das optische Verhalten im wesentlichen verantwortlich sein könnte.

Die Frage nach dem Ablauf einer Modifikationsänderung, insbesondere nach dem Übergang der amorphen in die kristalline Modifikation des Selens ist in diesem Zusammenhang von Interesse. Bei dem Versuch, die von uns untersuchten Schichten roten Selens durch allmähliches Erhitzen in die graue Modifikation überzuführen, haben wir festgestellt, daß sehr wohl rein bläulich grau durchscheinende Schichten erhalten werden können, ohne daß die rote Modifikation bis zur Unmerklichkeit zurücktritt. Eine Veranschaulichung der den allmählichen Fortgang der Formierung begleitenden Vorgänge gibt Fig. 9, welche ein bei 60facher Vergrößerung in der Durchsicht aufgenommenes mikroskopisches Bild der früher betrachteten Selenschicht $Q\,7$ gibt. Die Formierung der Schicht erfolgte durch Anlegen eines auf 200° erhitzten Metallstabes an die Rückseite der sie tragenden Quarzplatte, nachdem ein Beginn der Formierung an der betreffenden Stelle schon

---

[1]) Bezüglich älterer Vorstellungen zu ähnlichen Fragen verweisen wir auf das in dem Buch von Chr. Ries, Das Selen (Diessen 1918) besprochene Schrifttum. — [2]) A. H. Pfund, Phys. ZS. **10**, 342, 1909. — [3]) K. Foersterling u. V. Fréedericksz, Ann. d. Phys. **43**, 1229, 1914.

bei den beschriebenen Erhitzungsversuchen (Abschn. 1 b) stattgefunden hatte. Es erfolgte auf diese Weise von rechts nach links auf unseren Bildern ein Temperaturabfall, so daß ein allmählicher Übergang von unveränderten zu voll formierten Stellen auftrat. Wir haben hieraus unter dem Mikroskop die beiden Stellen herausgewählt, von denen die Strukturänderung gerade beginnt (Bild a) und an denen sie nahe vollständig zum Abschluß gekommen ist (Bild b). Die dunklen Stellen der Bilder entsprechen dem Vorliegen des roten Selens, während die

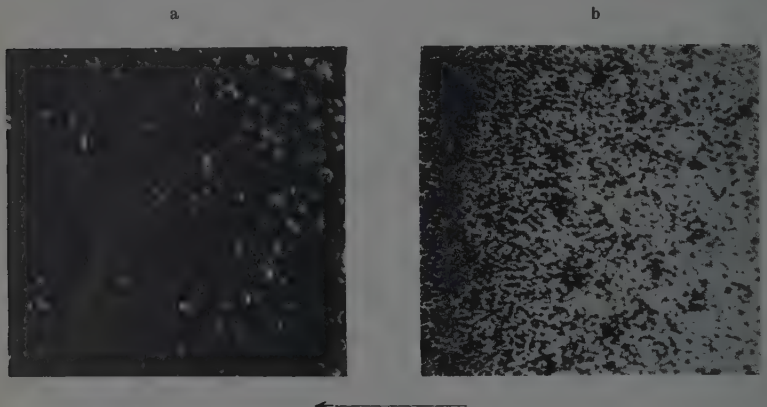


Fig. 9. Übergang der roten Selen-Modifikation in die graue.

hellen Stellen dessen Umwandlung in die metallische Modifikation anzeigen. Man sieht, wie die ursprünglich homogene rote Schicht optisch stark inhomogen wird und daß diese Inhomogenität auch dann noch vorhanden ist, wenn offenbar ein Endzustand der Formierung eingetreten ist. Im Mikroskop zeigt sich dabei ein eng verschlungenes Netzwerk von roten und blaugrauen Linien, deren Färbung offenbar auch durch Beugungserscheinungen beeinflußt ist. Für den Lichtdurchgang ist die Schicht ein trübes Medium geworden, das sich wenig dazu eignet, daß aus seinem Verhalten auf die optischen Eigenschaften des reinen metallischen Selens geschlossen wird. Es ist immerhin bemerkenswert, daß die spektrale Verteilung der Durchlässigkeit dieser strukturell veränderten Schicht mit derjenigen der roten Ausgangsschicht soweit übereinstimmt, wie dies Fig. 10 veranschaulicht, daß der Anstieg der Durchlässigkeit von den kurzen Wellen nach Rot hin bestehen bleibt, während andererseits eine relativ erheblichere Durchlässigkeit im kurzwelligen Bereich hinzugekommen ist. Die erhaltene Kurve zeigt in

dieser Hinsicht ganz den gleichen Verlauf wie der von Pfund[1]) für eine von ihm formierte Schicht angegebene Befund. Die geringen Beträge des Absolutwertes der Durchlässigkeit unserer Schicht sind offenbar zum Teil Folge der vorhandenen Lichtstreuung. Wie weit es möglich ist, zu größerer Homogenität noch gut durchlässiger dünnster Schichten zu gelangen, wird noch zu prüfen sein. Von dem Ergebnis wird es auch

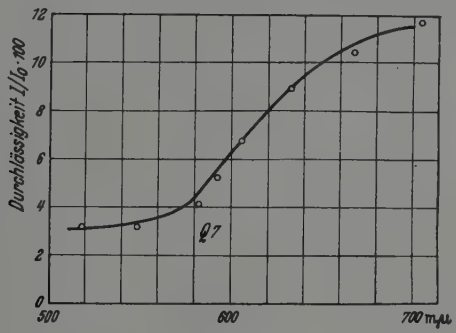


Fig. 10. Durchlässigkeit des grauen Selens.

abhängen, wieweit es möglich sein wird, definierte Eigenschaften der Selenzellen weniger durch reine Empirie als durch ihre theoretische Beherrschung zu erzielen.

Der Gesellschaft der Freunde der Universität Heidelberg haben wir für ihre Unterstützung der Arbeit zu danken. Besonderen Dank schulden wir auch den Herren Dr. P. Gmelin und Dr. Luft dafür, daß sie es uns ermöglicht haben, anläßlich unseres Besuchs der I.-G.-Werke Ludwigshafen-Oppau, die Registrierungen im Ultrarot vorzunehmen.

Heidelberg, Philipp-Lenard-Institut der Universität.

[1]) A. H. Pfund, Phys. ZS. **10**, 343, 1909.

Über eine Ionenquelle für massenspektroskopische Isotopentrennung*).

Von **W. Walcher** in Göttingen.

Mit 18 Abbildungen. (Eingegangen am 18. Mai 1943.)

Die massenspektroskopische Isotopentrennung stellt an die Ionenquelle besondere Anforderungen hinsichtlich Richtungs- und Geschwindigkeitshomogenität der erzeugten Ionen. Es wird gezeigt, daß durch Ionisierung eines Atomstrahls durch einen stromstarken Elektronenstrahl diese Anforderungen erfüllt werden können. — Während bei kondensierbaren Dämpfen ein Atomstrahl immer in der gewünschten Form erzeugt werden kann, ist dies bei Gasen nur bei richtiger Dimensionierung der Spalte in Verbindung mit der Pumpanordnung möglich. Beziehungen zur Berechnung werden angegeben. — Weiter werden Formeln für die erreichbaren Ionenströme angegeben. Daraus wird als günstigste Anordnung der Ionenquelle abgelesen: Bei gleich großem Ofen- und Blendspalt muß der Stoßraum unmittelbar hinter dem Blendspalt liegen; dieser wiederum muß homogen vom Elektronenstrahl überstrichen werden; aus Gründen der Raumladung wie der Ofentemperatur sind dabei die Spalte möglichst groß zu machen. Aus dem Potentialverlauf im Raumladungsfeld des Stoßraumes werden die optimale „Ziehspannung" und damit die Geschwindigkeitsinhomogenität des Ionenstrahls berechnet und die günstigste Dimensionierung des Stoßraumes abgeleitet. — Experimentelle Ergebnisse an einer hiernach ausgeführten Ionenquelle stimmen mit der Erwartung überein. Eine mit Silber beschickte Ionenquelle liefert in Verbindung mit dem früher beschriebenen Trennspektrographen etwa je 1,5 μg Ag^{107} und Ag^{109} pro Stunde bei einer Reinheit von etwa 99%, während bei geringeren Ansprüchen an die Reinheit entsprechend größere Mengen zu erzielen sind. — Es ist somit möglich, alle Elemente, von denen ein Dampf oder eine verdampfbare Verbindung hergestellt werden kann, massenspektroskopisch in wägbaren Mengen in ihre Isotope zu zerlegen.

1. Einleitung. Wie schon früher [1]) betont wurde, ist die erfolgreiche Isotopentrennung mit dem Massenspektrographen von dem Vorhandensein starker Ionenquellen abhängig. Eine Ionenquelle, die in vieler Hinsicht die an sie gestellten Forderungen erfüllt, besteht in einer Anordnung, in der ein Atomstrahl durch einen Elektronenstrahl durch Stoß ionisiert wird. Insbesondere scheint eine solche Quelle für eine große Anzahl von Elementen — für alle, von denen ein Dampf oder eine dampfförmige Verbindung herstellbar ist — brauchbar und damit von universeller Verwendbarkeit zu sein.

---

*) Teil einer Kieler Habilitationsschrift. Die Arbeit wurde im Institut für Experimentalphysik der Universität Kiel ausgeführt, äußere Gründe haben ihre Veröffentlichung längere Zeit verzögert.

[1]) W. Walcher, ZS. f. Phys. **121**, 604, 1943.

Derartige Ionenquellen wurden schon in einer Reihe von Arbeiten[1]) untersucht, doch werden all diese Anordnungen — obwohl ihre Ergiebigkeit teilweise erfreulich hoch ist — nicht den Anforderungen gerecht.

2. Die Anforderungen, die an eine Ionenquelle für einen Trennspektrographen gestellt werden[2]), *und eine Möglichkeit zu ihrer Verwirklichung.* Das Ionenbündel, das aus der Ionenquelle herausgezogen wird, soll sich durch eine elektrische Immersionslinse zu einem parallelen oder konvergenten[3]) Bündel formieren lassen, wobei die innere Apertur der Strahlung denkbar gering sein soll. Die letztgenannte Forderung ist

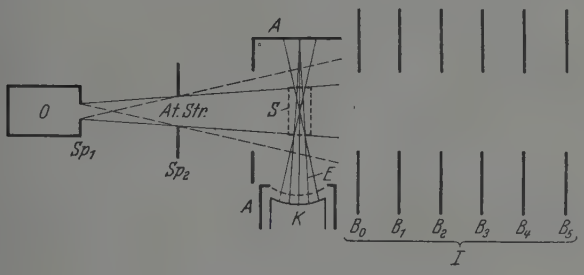


Fig. 1. Schema der Atomstrahlionenquelle.

gleichbedeutend mit der Forderung, daß die Anfangsgeschwindigkeit der Teilchen in der Ionenquelle senkrecht zur Richtung des Beschleunigungsfeldes im Entstehungsort — die bei praktischen Anordnungen vernünftigerweise möglichst parallel zur optischen Achse gewählt wird — möglichst klein sein soll. Darüber hinaus soll die Absolutgeschwindigkeit der Teilchen — ihre kinetische Energie — möglichst homogen sein.

Die seitliche Geschwindigkeitskomponente von Teilchen läßt sich bekanntlich dadurch besonders klein machen, daß man einen Atomstrahl vorgegebenen Öffnungsverhältnisses verwendet. Daher liegt der zu besprechenden Ionenquelle das in Fig. 1 skizzierte Prinzip zugrunde. Dem aus O kommenden Atomstrahl wird durch die Spalte Sp_1 und Sp_2 das gewünschte Öffnungsverhältnis erteilt; im Stoßraum S werden die

[1]) Als wichtigste sollen hier erwähnt werden: R. Planiol, Ann. de phys. **9**, 177, 1938; L. P. Smith u. G. W. Scott jun., Phys. Rev. **55**, 946, 1939; G. W. Scott jun., ebenda, S. 954; A. F. Finkelstein, Rev. Scient. Instr. **11**, 94, 1940; H. Heil, ZS. f. Phys. **120**, 212, 1943; vgl. auch den zusammenfassenden Bericht H. Korsching, Neuere Ionenquellen, Phys. ZS. **42**, 74, 1941. — [2]) Zugrunde gelegt sind Anordnungen, wie sie bei W. Walcher, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. **18**, 213ff., 1939 beschrieben sind. — [3]) Vgl. W. Walcher, ZS. f. Phys. **121**, 719, 1943.

Atome des Atomstrahles ionisiert. Die Ionen werden durch ein zwischen A und B_0 liegendes Feld aus dem Ionisationsraum gezogen und durch die Immersionslinse B_0 bis B_5 zu einem obige Bedingungen erfüllenden Bündel geformt.

Im folgenden sollen die einzelnen Teile der Ionenquelle — Atomstrahl, Stoßausbeute, Elektronenstrahl, Ziehfeld — zunächst theoretisch untersucht und anschließend die experimentellen Ergebnisse mitgeteilt werden.

A. Der Atomstrahl.

3. Die Teilchendichte in einem Atomstrahl. In Fig. 2 sei O ein Ofenraum, in dem sich ein Gas oder Dampf der konstanten Dichte ν_0 (Teilchen/cm³) befinde. Durch die Öffnung dF beliebiger Form trete ein Atomstrahl, der am Raumpunkt A die Dichte $\nu(x,y,z)$ (Teilchen/cm³) erzeugt. Zur Berechnung von ν gelangt man durch eine einfache Betrachtung. Die Geschwindigkeitsverteilung im Ofenraum ist isotrop, also ist die Dichte der Teilchen, deren Geschwindigkeitsvektoren innerhalb eines Raumwinkelelements $d\Omega_0$ liegen, gleich $\frac{\nu_0}{4\pi} d\Omega_0$. Die Zahl der Teilchen dieser Art, die durch ein Flächenelement df_0 senkrecht zur Achse von $d\Omega_0$ im Inneren des Ofens hindurchströmen, ist also $\frac{\nu_0}{4\pi} df_0 d\Omega_0 \bar{c}$, wo $\bar{c}$ die mittlere Geschwindigkeit dieser Teilchen ist. Hinsichtlich des Teilchenstromes ist nun ein an der Stelle A befindliches, zu r senkrechtes Flächenelement df in genau der gleichen Situation wie ein solches im Ofen: Aus dem Loch dF geht ein Teilchenstrom im Raumwinkel $d\Omega = dF \frac{z}{r^3}$ durch das Flächenelement df, und dieser ist ebenso groß, wie wenn er ganz im Innern des Ofens verlaufen würde. Das ist leicht einzusehen: In dem vom Teilchenstrom außerhalb des Ofens überstrichenen Raumstück finden keine Stöße statt (Atomstrahl!). Auf dem diesem Raumstück entsprechenden Stück im Innern des Ofens werden aber die durch Stöße entfernten Teilchen durch entgegengesetzte Stöße genau wieder ersetzt, so daß die fraglichen Teilchenströme innen

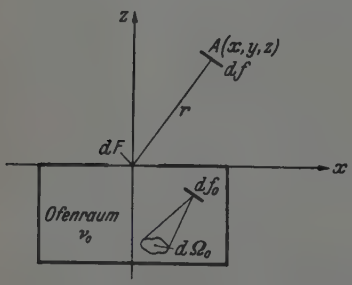


Fig. 2. Zur Berechnung der Teilchendichte im Atomstrahl.

und außen identisch gleich sind. Demnach ist also der Teilchenstrom durch df gleich

$$\frac{\nu_0}{4\pi} d\Omega\, df\, \bar{c}$$

und damit die Dichte in $A(x, y, z)$:

$$d\nu(x, y, z) = \frac{\nu_0}{4\pi} d\Omega, \tag{1}$$

wobei $d\Omega$ der Raumwinkel ist, unter dem das Loch vom Aufpunkt aus erscheint.

Die Dichte in irgendeinem Punkt eines Atomstrahles, der aus irgendeiner beliebigen Öffnung F austritt, ist durch Integration der Gleichung (1) zu finden:

$$\nu(x, y, z) = \frac{\nu_0}{4\pi} \Omega. \tag{2}$$

Ω ist darin der Raumwinkel, unter dem die Öffnung F vom Aufpunkt aus erscheint.

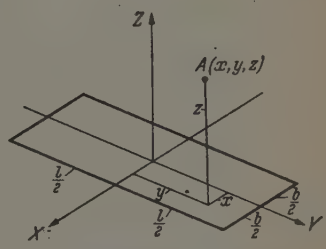


Fig. 3. Rechteckspalt; Koordinaten des Aufpunktes.

Aus (2) ergeben sich sofort folgende Sonderfälle:

1. Unendlich langer Spalt in y-Richtung, Breite $b \ll z$; hier ist

$$\Omega = 2bz/(x^2 + z^2),$$

also

$$\nu_{Spalt} = \frac{\nu_0}{2\pi} b \frac{z}{x^2 + z^2}. \tag{2a}$$

2. Rechteckiger Spalt, Projektion des Aufpunktes innerhalb des Spaltrandes (Fig. 3):

$$\begin{aligned}\Omega = \operatorname{arctg} & \frac{\left(\frac{b}{2} - x\right)\left(\frac{l}{2} - y\right)}{z\sqrt{\left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{l}{2} - y\right)^2 + z^2}} + \\ + \operatorname{arctg} & \frac{\left(\frac{b}{2} - x\right)\left(\frac{l}{2} + y\right)}{z\sqrt{\left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{l}{2} + y\right)^2 + z^2}} + \\ + \operatorname{arctg} & \frac{\left(\frac{b}{2} + x\right)\left(\frac{l}{2} - y\right)}{z\sqrt{\left(\frac{b}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{l}{2} - y\right)^2 + z^2}} + \\ + \operatorname{arctg} & \frac{\left(\frac{b}{2} + x\right)\left(\frac{l}{2} + y\right)}{z\sqrt{\left(\frac{b}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{l}{2} + y\right)^2 + z^2}}.\end{aligned} \tag{2b}$$

3. Kreisrundes Loch vom Durchmesser d, wobei $z \gg d$ sein soll:

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \nu &= \nu_0 \frac{d^2}{16} \cdot \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{aligned}\right\} \qquad (2c)$$

Stellt man — wie bei Atomstrahlanordnungen oft üblich — hinter den Ofenspalt (Sp_1 in Fig. 4) noch eine zweite Blende Sp_2, so ist Gleichung (2) auch anwendbar auf die Berechnung der Teilchendichte *hinter* Sp_2, sofern man nur unter Ω den Raumwinkel versteht, in dem die Teilchen aus dem Ofen zum Aufpunkt A (x, y, z) gelangen können.

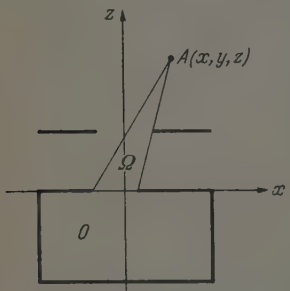


Fig. 4. Begrenzung des Raumwinkels durch zwei Spalte.

4. Möglichkeit der Erzeugung eines Atomstrahles. Es ist bekannt, daß ein Atomstrahl nur dann zustande kommt, wenn Stöße der Atome im Strahl weitgehend vermieden werden. Dazu ist es einerseits nötig, daß die Größe des Ofenspaltes höchstens von der Größe der freien Weglänge ist [1]), was immer einzurichten geht; andererseits muß hinter dem Ofenspalt eine Gasdichte herrschen, die klein gegen die Dichte im Atomstrahl ist. Bei Metalldämpfen, die an jeder Wand kondensieren, ist dies leicht möglich. Bei Gasatomstrahlen hingegen hängt der Druck hinter dem Ofenspalt von der Sauggeschwindigkeit der Pumpe ab, und es ist zu untersuchen, wieweit die Bedingung kleinen Außendruckes zu erfüllen ist.

Bezeichnet man mit Z den Molekülstrom in Mol/sec, so findet man für einen Spalt, an dem die Druckdifferenz $p_0 - p$ herrscht:

$$Z = \frac{p_0 - p}{R_{Spalt}} \frac{\text{Mol}}{\text{sec}} \quad \text{mit} \quad R_{Spalt} = 17\sqrt{\mu T}/F. \qquad (3)$$

(F = Spaltfläche in cm², p_0 Druck vor dem Spalt, p hinter dem Spalt in mm Hg, μ Molekulargewicht des Gases, T abs. Temperatur), eine dem Ohmschen Gesetz entsprechende Form. Für ein Rohr von kreis-

[1]) Andere Atomstrahlexperimente (vgl. z. B. W. Paul, ZS. f. Phys. 117, 774, 1941) und die eigenen Untersuchungen haben gezeigt, daß man ohne Gefahr mit der freien Weglänge bis etwa $^1/_{10}$ der Ofenspaltdimensionen gehen kann

förmigem Querschnitt der Länge L cm und dem Radius R cm ergibt sich bei einer Druckdifferenz $p_0 - p$ ein Teilchenstrom:

$$Z = \frac{p_0 - p}{R_{Rohr}} \frac{\text{Mol}}{\text{sec}} \quad \text{mit} \quad R_{Rohr} = 2{,}06 \frac{L}{R^3} \sqrt{\mu T}\,^{1}). \tag{4}$$

In Fig. 5 ist die Förderleistung einiger Leybold-Pumpen in der Einheit Mol/sec in Abhängigkeit vom Druck im Rezipienten aufgetragen;

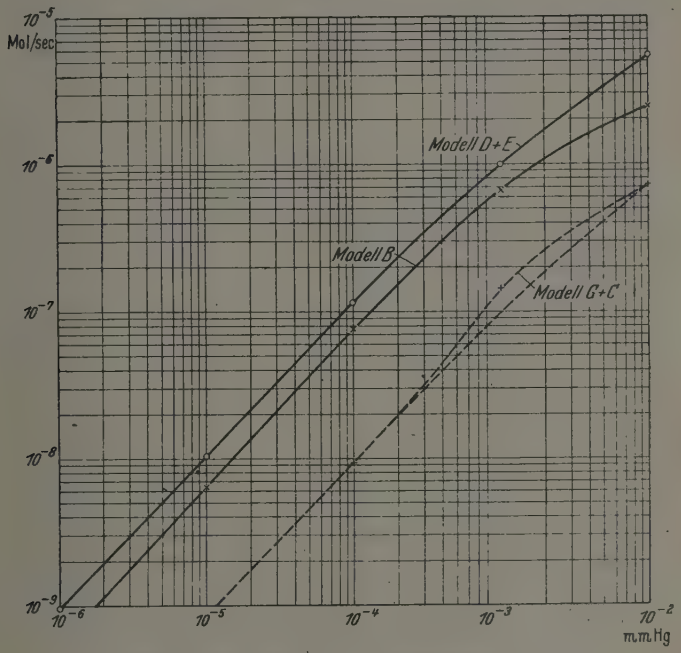


Fig. 5. Förderleistung von Diffusionspumpen für Luft.

der Rezipient ist dabei ohne Pumpleitung an den Pumpenschliff angeschlossen. Wie man sieht, steigt die Förderleistung im interessierenden Druckbereich ($p < 10^{-3}$ mm Hg) etwa proportional zum Druck an, ist also in diesem Gebiet darstellbar durch die Beziehung:

$$Z_P = \frac{p}{R_p} \frac{\text{Mol}}{\text{sec}} \tag{5}$$

Den Proportionalitätsfaktor R_P kann man als „inneren Widerstand" der Pumpe auffassen, wenn man den Druck hinter der Pumpe Null

[1]) Die angeschriebenen Formeln gelten für Molekularströmung; vgl. z. B. M. Knudsen, Ann. d. Phys. 28, 75, 999, 1909.

setzt. Damit ist es leicht möglich, für jede Anordnung von Spalt, Pumpleitung und Pumpe in Analogie zum elektrischen Fall die Druckverhältnisse zu berechnen.

Für eine Spaltfläche von 0,5 cm² und Wasserstoffgas von Zimmertemperatur ergibt sich an Leybold-Pumpe Modell E [1]) für das Druckverhältnis vor und hinter dem Spalt, wenn man zwischen Spalt und Pumpe eine Leitung mit Kühlfalle von 100 cm Länge und 5 cm Durchmesser (bzw. gleichwertigem Querschnitt) und einem Hahn von 3,5 cm Durchlaßöffnung schaltet: $p_0/p = 2{,}27$. Im Außenraum herrscht bei dieser günstig gewählten Pumpanordnung etwa die Hälfte des Druckes im Ofen, so daß ein Atomstrahl nur bei ganz niedrigen Ofendrucken zustande kommen kann.

Durch die Bedingungen (3), (4) und (5) ist also u. U. die Ausbeute einer Atomstrahl-Ionenquelle, die mit einem nichtkondensierbaren Gas beschickt wird, begrenzt.

B. Erreichbare Ionenströme.

5. Berechnung der Ionenströme und Wirkungsgrad der Ionenquelle. Es soll nun untersucht werden, wie groß die durch Stoßionisierung eines Atomstrahles zu erzielenden Ionenströme sind und unter welchen Voraussetzungen der Wirkungsgrad einer solchen Ionenquelle am besten wird.

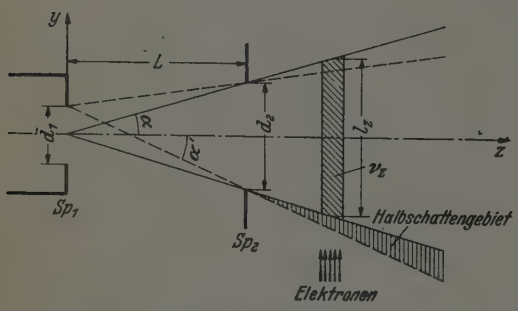


Fig. 6. Zur Berechnung des Ionenstromes.

In Fig. 6 sei Sp_1 der quadratische Ofenspalt der Seitenlänge d_1, in der Entfernung $z = L$ von diesem stehe der ebenfalls quadratische Blendspalt Sp_2 mit der Seitenlänge d_2. An der Stelle z kreuze ein Elektronenstrom der Stromstärke I_E den durch Sp_1 und Sp_2 ausgeblendeten Atomstrahl des Öffnungsverhältnisses $\operatorname{tg}\alpha = d_2/2\,L$ derart, daß der gesamte Elektronenstrom gleichmäßig über den quadratischen Querschnitt des Atomstrahles verteilt sei und kein Anteil desselben außerhalb des Atomstrahles verlaufe. Die Breite

[1]) Diese Daten entsprechen etwa den von H. Heil bei seinen Versuchen (l. c.) mit einer Wasserstoffionenquelle gewählten Größen.

des Elektronenstrahles in der z-Richtung sei zunächst beliebig, jedoch so klein, daß $\nu(z)$, die Teilchendichte im Atomstrahl im Stoßraum, als z-unabhängig angenommen werden kann. Da bei nicht zu großen $\operatorname{tg}\alpha$ die Teilchendichte ν in einem Querschnitt an der Stelle z nur wenig schwanken wird, soll gesetzt werden:

$$\nu(z) = \frac{\nu_0 d_1^2}{4\pi z^2}, \tag{6}$$

was aus (2 b) für $z \gg d_1$ folgt.

Ein Elektron, das den Atomstrahl der Dichte $\nu(z)$ längs des Weges l_z durchsetzt, erzeugt auf diesem Wege

$$m = \frac{s}{\nu^*} \nu \cdot l_z$$

Ionenpaare, worin s die differentiale Ionisierung und ν^* die einem Druck von 1 mm Hg und einer Temperatur von 0^0 C entsprechende Dichte ($\nu^* = 3{,}6 \cdot 10^{16}$ Teilchen/cm^3) bedeuten. Der dauernd fließende Elektronenstrom I_E wird daher im Stoßraum so viele Ionenpaare und damit positive Ionen bilden, daß aus diesem Raum dauernd ein Ionenstrom

$$I_J = I_E \cdot \frac{s}{\nu^*} \cdot \nu \cdot l_z \tag{7}$$

entnommen werden kann. Setzt man hierin $l_z = 2 z \operatorname{tg}\alpha$ und $\nu(z)$ aus (6) ein, so erhält man

$$I_J = I_E \cdot \frac{s}{\nu^*} \frac{\nu_0 d_1^2}{2\pi z} \operatorname{tg}\alpha. \tag{8}$$

Will man diesen Ionenstrom möglichst groß machen, so muß zunächst z so klein wie möglich, im vorliegenden Falle $z = L$ werden. Weiterhin darf, damit die Bedingungen für das Zustandekommen eines Atomstrahles gewahrt bleiben, die Breite des Ofenspaltes höchstens von der Größenordnung der freien Weglänge der Teilchen im Ofen gemacht werden:

$$d_1 \approx \lambda_0 = \frac{3 \cdot 10^{14}}{\nu_0}. \tag{9}$$

Der Faktor $3 \cdot 10^{14}$ ist ein Mittelwert, er schwankt für verschiedene Gase bzw. Dämpfe etwa zwischen 1 und $5 \cdot 10^{14}$ [1]).

Damit wird zunächst

$$I_J = I_E \cdot \frac{s}{\nu^*} \cdot \frac{3 \cdot 10^{14}}{\pi \cdot 2L} d_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha. \tag{10}$$

[1]) Vgl. Knoll-Ollendorf-Rompe, Gasentladungstabellen, S. 23.

Man sieht jetzt, daß I_J um so größer wird, je größer man unter Einhaltung der Bedingung (9) den Ofenspalt macht. Eine steigende Vergrößerung von d_1 führt jedoch zu steigender Erweiterung des Halbschattengebietes (s. Fig. 6), so daß in diesem Gebiet das vorgeschriebene Öffnungsverhältnis $\operatorname{tg}\alpha = d_2/2\,L$ immer mehr überschritten wird. Vernünftigerweise kann man im Halbschattengebiet ein $\operatorname{tg}\alpha' = 2\operatorname{tg}\alpha$ zulassen; in diesem Falle wird gerade $d_1 = d_2$ und damit aus Gleichung (10)

$$I_J = I_E \cdot s \cdot \frac{3 \cdot 10^{14}}{\pi\, \nu^*} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

oder

$$I_J = I_E \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot s \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \qquad (11)$$

oder der „Elektronenwirkungsgrad" der Ionenquelle:

$$\alpha_E = \frac{I_J}{I_E} = 3 \cdot 10^{-3} \cdot s \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha. \qquad (12)$$

Die Voraussetzungen für diesen günstigsten Fall seien nochmals hervorgehoben: 1. Der Stoßraum liegt unmittelbar hinter dem Blendspalt; 2. der Ofenspalt ist ebenso groß wie der Blendspalt; 3. der Elektronenstrom I_E überstreicht homogen die Blendspaltfläche.

Als praktisches Beispiel soll die Ionisierung eines Silberatomstrahles mit 100 mA Elektronen von 200 Volt ($s \sim 10$) berechnet werden, wenn der Atomstrahl ein Öffnungsverhältnis $\operatorname{tg}\alpha = 1:10$ besitzt. Dann ist $\alpha_E = 3 \cdot 10^{-4}$, und der erzielbare Ionenstrom beträgt etwa 30 μA.

Bei Betrachtung der Gleichung (12) fällt auf, daß die Apparatdimensionen nicht mehr enthalten sind. Man kann also bei gegebenem $\operatorname{tg}\alpha$ eine kleine Anordnung oder eine geometrisch ähnliche große Anordnung wählen. In der Praxis wird diese Wahl von zwei Gesichtspunkten beeinflußt werden: 1. Der gesamte Elektronenstrom muß den Blendspalt Sp_2 überstreichen; das wird u. U. wegen zu hoher Raumladung Schwierigkeiten machen, und man wird deshalb die Anordnung größer machen; 2. bei Einhaltung der Bedingung (9) — auch mit Berücksichtigung des früher besprochenen Faktors 10 — kommt man bei großen Spaltdimensionen zu kleinen Dichten ν_0 im Ofen, d. h. bei Dämpfen zu niedrigeren Temperaturen. Das wird bei schwerverdampfbaren Metallen eine große Rolle spielen.

6. Günstigste Anordnung für eine Ionenquelle ohne vorgeschriebenes Öffnungsverhältnis des Atomstrahles. Eine solche Anordnung wurde

bereits von Heil beschrieben (l. c.); Heil verwendet einen länglichen Ofenspalt von $b = 3$ mm Breite und $l = 15$ mm Länge und läßt einen Elektronenstrom von 1 mA in der Höhe $z = 1$ mm über dem Spalt pendeln [1]). Für diesen Fall findet man für die Spaltmitte aus (2b)

$$\nu = \frac{\nu_0}{\pi} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{2z} \approx \frac{\nu_0}{\pi} \text{ Teilchen/cm}^3$$

und damit

$$\alpha_E = \frac{I_J}{I_E} = \frac{s}{\pi} \frac{\nu_0}{\nu^*} \cdot l_E .$$

Setzt man für den Elektronenweg $l_E = \varkappa \cdot l$, wobei $\varkappa$ die Zahl der Pendelungen bedeutet, und berücksichtigt man Gleichung (9) in der Form $\nu_0 \approx 3 \cdot 10^{14}/b$, so erhält man mit $\nu^* = 3{,}6 \cdot 10^{16}$

$$\alpha_E = 3 \cdot 10^{-3} \cdot s \cdot \varkappa \cdot \frac{l}{b} . \tag{13}$$

Ein Vergleich mit (12) lehrt, daß — abgesehen vom Pendelfaktor — der Wirkungsgrad der ausgeblendeten Quelle um den Faktor $\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot b/l$ schlechter ist.

C. Das Herausziehen der Ionen aus dem Stoßraum.

Die im Stoßraum erzeugten Ionen bilden zusammen mit den Elektronen des stoßenden Strahles eine Raumladung. Auf Grund dieser Tatsache wird im Stoßraum nicht ein konstantes Potential herrschen, sondern zwischen dem Inneren und den Wänden wird eine Potentialdifferenz bestehen. Sollen nun alle gebildeten Ionen nach einer Seite (in der positiven z-Richtung) aus dem Stoßraum entfernt werden, so muß zwischen seine Wände — bzw. seine Grenzflächen im Sinne von Potentialflächen — eine äußere Spannung, die Ziehspannung, gelegt werden. Die Größe dieser Spannung ist maßgebend für die Geschwindigkeitsinhomogenität des erzeugten Ionenstrahles, ihre Kenntnis daher von besonderer Wichtigkeit. Insbesondere wird die Abhängigkeit der Größe der Ziehspannung von den verschiedenen Parametern wichtige Hinweise für die Dimensionierung des Stoßraumes geben.

7. Voraussetzungen für die rechnerische Erfassung. Zur rechnerischen Erfassung der Potentialverhältnisse im Stoßraum werde das in

---

[1]) Die Möglichkeit des Pendelns besteht auch bei der unter Ziffer 5 beschriebenen Anordnung. Das magnetische Pendelfeld zerstört jedoch den Vorteil geringer seitlicher Geschwindigkeitskomponenten, den man durch den Blendspalt gewonnen hat.

Fig. 7 skizzierte Schema verwendet. Der Stoßraum sei begrenzt durch die Kondensatorplatten $z = 0$ und $z = D$ und erfüllt von dem zu ionisierenden Gas oder Dampf von der Teilchendichte ν. Er sei im übrigen in der x- wie in der y-Richtung unendlich ausgedehnt. Von unten trete in der y-Richtung ein Elektronenstrom der homogenen Stromdichte j^- in den Stoßraum, der in dem betrachteten Bereich nach *Größe* und *Richtung* unverändert bleiben soll. Die erste dieser Forderungen ist bei einer Anordnung nach Fig. 6 wegen des kleinen α_E [vgl. Gleichung (12)] beliebig genau erfüllt, die zweite dann, wenn die Ziehspannung klein gegen die Beschleunigungsspannung der Stoßelektronen (Stoßspannung) ist.

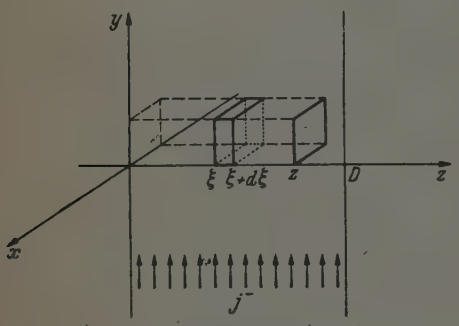


Fig. 7. Zur Berechnung der Potentialverteilung im Stoßraum.

Weiterhin soll angenommen werden, daß alle durch Stoß gebildeten Ionen den Stoßraum *unter dem Einfluß des* dort herrschenden *Feldes* verlassen, daß also keinerlei andere Prozesse (Rekombination, Elektronenanlagerung) zur Vernichtung von Ionen führen. Diese Bedingung ist unter den obwaltenden Umständen ebenfalls erfüllt, wie man leicht aus der Größe der Rekombinationskoeffizienten bzw. Anlagerungswahrscheinlichkeiten abschätzt. Negative Ionen sollen nicht in einer ins Gewicht fallenden Menge auftreten, was wiederum für Metalldämpfe gültig ist. Die durch Ionisation gebildeten Elektronen sollen den Ionisationsraum genügend schnell verlassen und zur Raumladung keinen Beitrag liefern.

Damit alle im Stoßraum gebildeten Ionen in der positiven z-Richtung abfließen können, darf die elektrische Feldstärke an keiner Stelle die Richtung der negativen z-Achse haben. Das bedeutet für die gesuchte Potentialfunktion $\varphi(z)$, daß sie im Gebiet $0 \leqq z \leqq D$ monoton abfallen muß. Im Grenzfall ist dies gerade noch erfüllt, wenn $\varphi'(z)$ an der Stelle $z = 0$ Null wird.

8. Die Differentialgleichung für das Potential im Stoßraum. Das Potential im Stoßraum ist durch die Poissonsche Gleichung bestimmt, die im vorliegenden linearen Falle die Form annimmt

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = -4\pi\varrho(z). \tag{14}$$

Die Raumladungsdichte $\varrho(z)$ setzt sich dabei zusammen aus der Raumladungsdichte der positiven $\varrho^+(z)$ und der negativen Ladungen $\varrho^-(z)$:

$$\varrho = \varrho^+ - \varrho^- = \varrho^+ - \frac{j^-}{v^-}. \tag{15}$$

Die Größe ϱ^+ findet man aus folgender Betrachtung: Auf die Fläche der Länge $x = 1$ cm und der Breite $\mathrm{d}\xi$ in z-Richtung (vgl. Fig. 7) treffen in einer Sekunde

$$\frac{\mathrm{d}n^-}{\mathrm{d}t} = \frac{j^-}{e}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\varrho^- v^-}{e}\,\mathrm{d}\xi$$

Elektronen. Diese erzeugen in einem Kästchen, das dieselbe Grundfläche und die Höhe $y = 1$ cm besitzt, in der Sekunde

$$\frac{\mathrm{d}n^+}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}n^-}{\mathrm{d}t}\,\frac{v}{v^*}\,s = \frac{\varrho^- v^-}{e}\,\frac{v}{v^*}\,s\cdot\mathrm{d}\xi$$

Ionen, die im Felde der gesuchten Potentialverteilung beschleunigt werden und damit zur Ionenstromdichte den Anteil

$$\mathrm{d}j^+ = e\,\frac{\mathrm{d}n^+}{\mathrm{d}t}$$

beitragen. Dieser differentielle Stromanteil, der ja voraussetzungsgemäß zwischen ξ und $\xi + \mathrm{d}\xi$ erzeugt wurde, liefert an der Stelle z einen differentiellen Raumladungsanteil der Größe

$$\mathrm{d}\varrho^+ = \frac{1}{v^+}\,\mathrm{d}j^+,$$

wo v^+ die Geschwindigkeit bedeutet, welche die bei ξ entstandenen Teilchen nach Durchlaufen der Potentialdifferenz $\varphi(\xi) - \varphi(z)$ an der Stelle z erlangt haben:

$$v^+ = +\sqrt{\frac{2e}{m^+}\left(\varphi(\xi) - \varphi(z)\right)}.$$

Zur gesamten positiven Raumladungsdichte in z tragen nun in gleicher Weise alle zwischen $z = 0$ und z entstandenen Ionen bei, so daß man durch Integration findet:

$$\varrho^+(z) = \int_0^z \varrho^- v^-\,\frac{v}{v^*}\,s\,\sqrt{\frac{m^+}{2e}}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\varphi(\xi) - \varphi(z)}}. \tag{16}$$

Setzt man dies in (15) bzw. (14) ein, so erhält man für φ die Integro-Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}z^2} = \alpha - \beta\int_0^z \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\varphi(\xi) - \varphi(z)}} \tag{17}$$

mit den Konstanten:

$$\alpha = 4\pi\varrho^-, \quad \beta = 4\pi\varrho^- v^- \frac{v}{v^*} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{m^+}{2e}}.$$

Für die praktische Anwendung schreibt man die Konstanten am besten in der Form

$$\alpha = 628 \frac{j^-}{\sqrt{U_S}},$$

wo j^- die Stromdichte in A/cm² und U_S die Stoßspannung in Volt ist und

$$\beta = 1560 j^- \frac{v}{v^*} \cdot s\sqrt{M},$$

wo M die Massenzahl der Ionen bedeutet.

9. Der Potentialverlauf im Stoßraum. Die Differentialgleichung (17) ist durch den einfachen Ansatz

$$\varphi(z) = -\gamma^2 z^2 \tag{18}$$

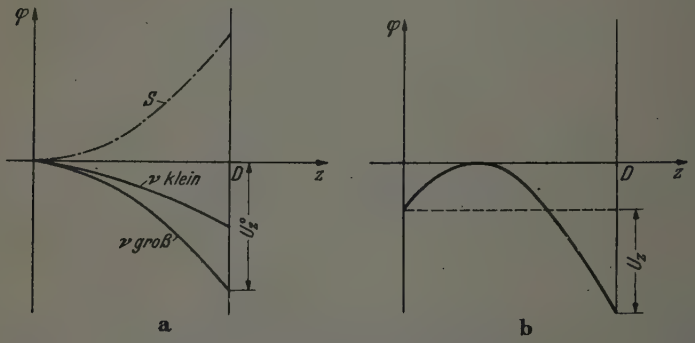


Fig. 8. Potentialverlauf im Stoßraum. a) Optimale Ziehspannung U_z^0 für verschiedene Teilchendichte ν; S singuläre Lösung für $\nu = 0$. b) Ziehspannung kleiner U_z^0.

zu lösen; er enthält bereits die Randbedingungen $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(0) = 0$, von denen die letztere den in Ziffer 7 erwähnten Grenzfall ausdrückt, der mit einer minimalen Ziehspannung gerade alle im Stoßraum gebildeten Ionen erfaßt. Für γ erhält man durch Einsetzen von (18) in (17) die Bestimmungsgleichung 3. Grades:

$$\gamma\left(\gamma^2 + \frac{\alpha}{2}\right) = \beta \cdot \frac{\pi}{4}, \tag{19}$$

die für jedes positive α und β (nur solche Werte sind physikalisch reell) eine Lösung liefert.

Gleichung (18) stellt eine nach unten geöffnete Parabel dar, deren Scheitel im Koordinatenanfangspunkt liegt (Fig. 8a). Für $\beta = 0$, d. h. für den Fall, daß kein Gas im Stoßraum vorhanden ist, liefert Glei-

chung (19) die beiden Lösungen $\gamma = 0$ und $\gamma^2 = -\frac{\alpha}{2}$; davon ist die erste, die einem konstanten Potential (z. B. $\varphi = 0$) im Stoßraum entsprechen würde, physikalisch unbrauchbar, während die zweite, die nur durch die konstante negative Raumladung bedingte Potentialverteilung, wie sie durch die Parabel S in Fig. 8a dargestellt ist, liefert. Für kleine β (kleine Gasdichten ν) ist γ^2 gegen $\alpha/2$ vernachlässigbar, was zu der Bestimmungsgleichung für γ führt:

$$\gamma = \frac{\pi}{2}\,\frac{\beta}{\alpha}. \tag{19a}$$

Aus Gleichung (18) findet man die für gegebenes α und β anzuwendende Ziehspannung:

$$U_z^0 = |\varphi(D)| = \gamma^2 D^2.$$

Auch für den Fall, daß die zwischen $z = 0$ und $z = D$ liegende Spannung kleiner als dieses U_z^0 ist, liefert Gleichung (18) den Potentialverlauf. Das Maximum der Parabel liegt in diesem Falle im Inneren des Stoßraumes (Fig. 8b), alle links des Maximums gebildeten Ionen werden nach links und nur der Rest nach rechts in der nutzbaren Richtung abgeführt. Weiterhin erkennt man, daß selbst bei der Ziehspannung Null immer noch die Hälfte der gebildeten Ionen nutzbar gemacht werden kann. Der Potentialunterschied zwischen Mitte und Rand beträgt dann $U_z^0/4$.

Sind die Grenzen des Stoßraumes nicht durch materielle Kondensatorplatten festgelegt, sondern liegen die Elektroden in einem gewissen Abstand von diesen Grenzen, so wird eine weitere Spannung notwendig sein, um den aus dem Stoßraum gezogenen Strom zur Elektrode zu bringen. Diese kann eine beträchtliche Höhe erreichen, doch ist sie im vorliegenden Falle uninteressant, da alle Teilchen gleichmäßig diese Spannung durchlaufen; sie kann also keine Geschwindigkeitsinhomogenität mehr verursachen.

10. Einfluß der Stoßraumbreite D und der Spaltbreite d auf die Ziehspannung U_z^0; Größe der Ziehspannung. In Ziffer 5 wurde gezeigt, daß eine Anordnung nach Fig. 9 für die Ionisierung eines Atomstrahles von vorgegebenem Öffnungsverhältnis am günstigsten ist. An dem früher gewählten Beispiel eines Silberatomstrahles ($\operatorname{tg}\alpha = 1:10$), der mit $I_E = 100$ mA Elektronen bei einer Stoßspannung von $U_S = 200$ Volt ionisiert wird, soll der Ein-

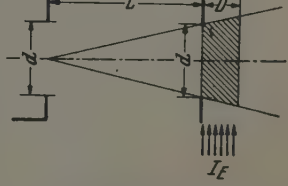


Fig. 9. Günstigste Anordnung der Atomstrahlionenquelle.

fluß der Spaltbreite d und der Stoßraumbreite D untersucht werden. Die Konstanten α und β werden für diesen Fall

$$\alpha = \frac{628}{\sqrt{U_S}} \cdot \frac{I_E}{d \cdot D} = \frac{4{,}5}{d \cdot D},$$

$$\beta = 4{,}1 \frac{I_E}{d^2 \cdot D} = \frac{0{,}41}{d^2 \cdot D}.$$

Dabei sind in β für ν bzw. ν_0 die Werte Gleichung (6) und (9) eingesetzt, ferner ist $s = 10$ und $M = 100$ gesetzt.

Mit den der Betrachtung unterliegenden Werten von D und d nehmen α bzw. β solche Werte an, daß γ mit der Näherung für kleine β-Werte berechnet werden kann:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{0{,}15}{d}.$$

Nun ist die Ziehspannung

$$U_z^0 = \gamma^2 D^2 = 0{,}022 \frac{D^3}{d^3},$$

und daraus ist sofort abzulesen, daß *großes* d und *kleines* D für *kleine Ziehspannung günstig* sind. Für $d = 1$ cm, $D = 1$ cm wird z. B. $U_z^0 = 0{,}022$ ESE ≈ 7 Volt, ein Betrag, der für den ausgeführten Trennspektrographen [1]) zulässig ist.

11. Verhalten des Ionenstromes bei konstant gehaltener Ziehspannung und steigender Teilchendichte ν. Im Hinblick auf die später mitgeteilten Versuchsergebnisse soll noch der Fall besprochen werden, daß bei unveränderten Spannungen am elektrischen Teil der Ionenquelle durch Steigerung der Ofenheizung die Dichte ν im Stoßraum erhöht wird. Bei kleinen Dichten wird die am Stoßraum liegende Ziehspannung immer ausreichen, um alle gebildeten Ionen zu erfassen, der Ionenstrom wird also proportional ν ansteigen. Bei wachsendem ν wird man aber die Grenze erreichen, wo die Ziehspannung gerade den in Fig. 8a dargestellten Potentialverlauf erzeugt, während bei noch weiter gesteigertem ν der Potentialverlauf in die Fig. 8b dargestellte Form übergeht, wo nicht mehr alle Ionen erfaßt werden. Da das Maximum der Parabel bei wachsendem ν nach rechts rutscht, wird jetzt I_J unterproportional mit ν anwachsen, und zwar — wie nicht näher ausgeführt werden soll — etwa wie:

$$I_J \sim \nu^{1/3}.$$

[1]) W. Walcher, ZS. f. Phys. **108**, 376, 1938.

D. Die Elektronenquelle.

Aus den bisherigen Überlegungen ergeben sich bereits die Forderungen, die an die Elektronenquelle gestellt werden: Sie soll einen möglichst hohen Elektronenstrom in einem möglichst schmalen Stoßraum liefern. Zu diesem Zweck fokussiert man am besten den Emissionsstrom einer großflächigen Kathode mit zylinderförmiger emittierender Fläche in eine Brennlinie, wie Fig. 10 zeigt, und stellt diese Anord-

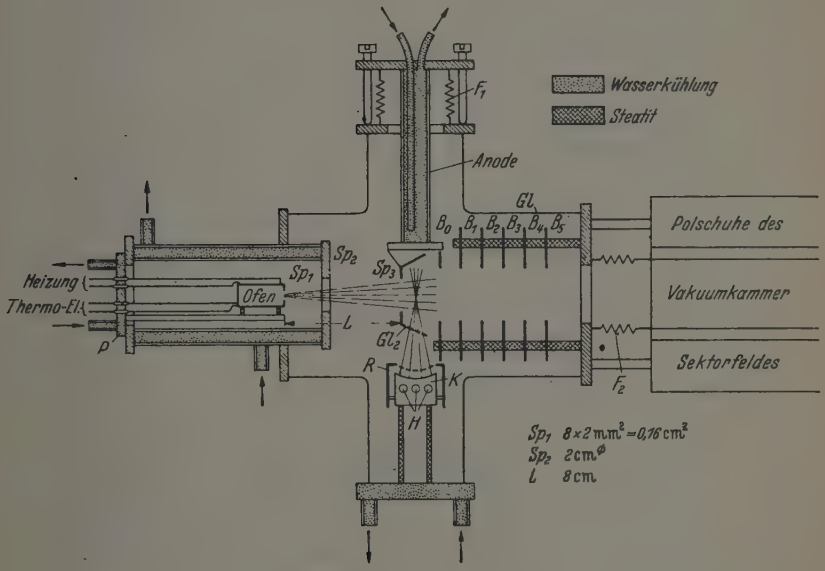


Fig. 10. Übersichtszeichnung der ausgeführten Ionenquelle.

nung so auf, daß der Atomstrahl im schmalsten Querschnitt den Elektronenstrahl kreuzt. Rechnet man die Breite dieses engsten Querschnittes aus [1]), so sieht man, daß bei den verlangten Stromstärken ($I_E \sim 100\,mA$) der Strahl sich kaum verjüngt und fast unmittelbar hinter der Kathode auseinanderlaufen muß. Das Experiment jedoch zeigt, daß durchaus ein engster Querschnitt in der Nähe des geometrischen Fokus vorhanden ist. Dies läßt sich nur so erklären, daß der Elektronenstrahl längs seiner ganzen Bahn im Restgas ionisiert

[1]) Vgl. W. Walcher, ZS. f. Phys. 121, 719, 1943.

und sich so eine positive Raumladung schafft, die seine eigene Raumladung kompensiert [1]).

E. Experimentelle Ergebnisse.

12. Aufbau der Ionenquelle. a) Anordnung. Die Anordnung der einzelnen Teile der Atomstrahlionenquelle zeigt Fig. 10. *Gl* ist ein Glaszylinder aus Duranglas von 150 mm Durchmesser mit vier seitlichen Ansätzen von 70 mm Durchmesser. Der nach vorn gerichtete (in Fig. 10 nicht gezeichnete) Ansatz dient als Pumpstutzen, während der hintere (ebenfalls nicht eingezeichnet) ein Beobachtungsfenster trägt. Durch den oberen Ansatz ist die Anode eingeführt, die als Stoßraum ausgebildet ist (siehe c) und mit Hilfe eines Federungskörpers F_1 geschwenkt werden kann; die Anode ist wassergekühlt. Von unten ist durch den vierten Ansatz die Elektronenquelle eingeführt (nähere Beschreibung unter d). Die linke Frontplatte trägt den Ofenraum, einen doppelwandigen Zylinder mit Wasserkühlung aus Messing, der einerseits durch den Spalt Sp_2 abgedeckt wird [2]), andererseits durch die Grundplatte P, die eine Haltestange für den Ofen trägt, seinen Abschluß findet. Die rechte Frontplatte ist an den Polschuhen des Sektorfeldes verstellbar befestigt und trägt auf diese Weise die ganze Ionenquelle, der Federungskörper F_2 vermittelt ihren Anschluß an die Vakuumkammer des Sektorfeldes. Auf der rechten Frontplatte ist ferner das Blendensystem B_0 bis B_5 auf Steatitstäbchen aufgebaut [3]).

Die gesamte elektrische Schaltung zeigt Fig. 11. Da die Ionen bei ihrem Eintritt in das Sektorfeld Erdpotential haben müssen, liegt der Stoßraum (die eigentliche Ionenquelle) auf der vollen Beschleunigungsspannung von 6 bis 10 kV. Alle Teile müssen deshalb gegen diese Spannung isoliert sein, insbesondere müssen die den Stoßstrom liefernde Spannungsquelle und die Wasserkühlung auf Hochspannung liegen. Ersteres wird durch Verwendung einer mit isolierter Welle angetriebenen 500 Volt-Maschine erreicht, letzteres, indem der in sich geschlossene

---

[1]) Es handelt sich hier um dasselbe Problem wie bei der Frage nach der Existenz von sog. Fadenstrahlen. Die Erklärung, die für deren begrenzte Existenzbereiche gegeben wird, scheint nicht auszureichen, da im vorliegenden Fall, wo die Gasdrucke mehrere Zehnerpotenzen niedriger sind als die im Existenzgebiet der Fadenstrahlen, dieselben Prozesse für die Kompensation der negativen Raumladung herangezogen werden müssen, was aus einer genaueren Überlegung folgt. — [2]) Sp_2 bestimmt nicht den Öffnungswinkel (Sp_3!), sondern dient nur zur Vorausblendung. — [3]) Blendensystem und Sektorfeld sind bereits früher beschrieben worden: ZS. f. Phys. **108**, 376, 1938.

Kühlwasserkreis durch eine kleine, isoliert aufgestellte Pumpe in Umlauf versetzt wird, wobei das Kühlwasser durch einen Liebig-Kühler strömt, der seinerseits an die Wasserleitung angeschlossen ist. Die elektrische Immersionslinse B_0 bis B_5 erhält ihre Spannungen aus dem in Fig. 11 gezeichneten Hochohmpotentiometer.

b) Der Ofen. Der Ofen ist in allen Einzelheiten nach Paul[1]) gebaut, es kann daher auf die Beschreibung in der zitierten Arbeit verwiesen werden. Der Ofenraum besteht aus einem Molybdänzylinder mit einem Ofenspalt (Sp_1 in Fig. 10) von 2 mm × 8 mm, wobei die längere Ausdehnung in der Horizontalen liegt. Die Temperatur des Ofens wird durch ein Thermoelement gemessen.

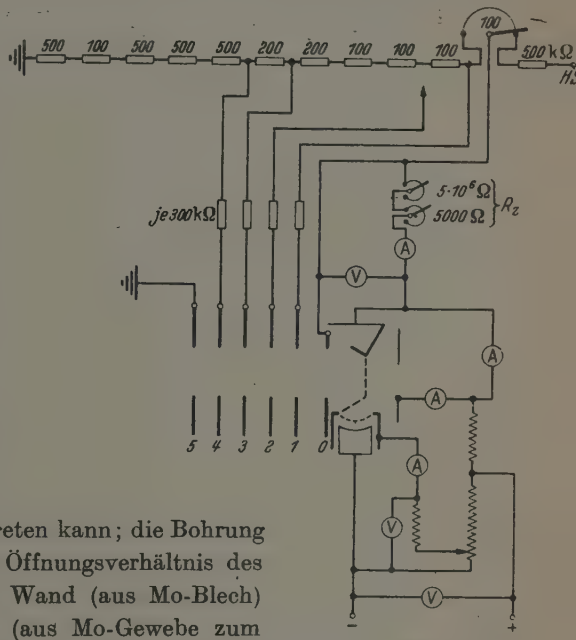


Fig. 11. Schaltbild der elektrischen Anordnung.

c) Ausbildung des Stoßraumes. Der Stoßraum hat die in Fig. 10 skizzierte Form. Seine Rückwand ist durchbohrt, damit der Atomstrahl eintreten kann; die Bohrung bestimmt gleichzeitig das Öffnungsverhältnis des Atomstrahles. Die obere Wand (aus Mo-Blech) und die untere Wand G (aus Mo-Gewebe zum Durchtritt des Elektronenstrahles) sind in der gezeichneten Weise gestellt, damit die Potentialflächen des zwischen A und B liegenden Ziehfeldes bzw. des von B_1 her durchgreifenden Feldes möglichst glatt werden (siehe z. B. Fig. 15).

d) Die Elektronenquelle. Die Elektronenquelle besteht aus einem geschlossenen Kästchen aus Nickelblech, dessen obere Fläche zylindrisch gekrümmt ist (Länge 3 cm, Bogensehne 2 cm, Krümmungsradius des Zylinders 4 cm); diese Fläche trägt die emittierende Oxydschicht. Die Heizung erfolgt durch drei parallele im Kästchen untergebrachte

[1]) W. Paul, l. c. Herrn Dr. Paul danke ich für mannigfache Hilfe beim Bau des Ofens und im Verlauf der Untersuchungen.

W-Wendeln, die Heizleistung beträgt bei einer Emission von 500 mA etwa 100 bis 200 Watt. In 2 mm Abstand vor der Zylinderflächenkathode steht ein Mo-Gitter R mit gleichem Krümmungsradius als Raumladegitter; an diesem liegt die Raumladegitterspannung U_R, während die eigentliche Stoßspannung U_S an die Anode gelegt wird. Die Kathode ist zur Verhinderung von Wärmeableitung mit Steatitstäbchen von etwa 10 cm Länge auf der zugehörigen Grundplatte aufgebaut.

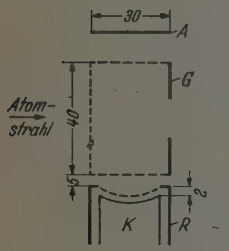


Fig. 12. Anordnung zur Untersuchung der Elektronenquelle. K = Kathode, R = Raumladegitter, G = Stoßraumgitter, A = Anode.

Zur Erzielung eines möglichst hohen Ionenstromes ist ein möglichst großer Elektronenstrom bei bester Strahlform (vgl. Ziffer 6) erwünscht. Zur Untersuchung der optimalen Betriebsbedingungen wurde in der Anordnung Fig. 12 die Abhängigkeit der verschiedenen Gitterströme, insbesondere des Stoßstromes, von den Gitterspannungen aufgenommen. Dabei wurde stets die Strahlform durch das Beobachtungsfenster kontrolliert; dies ist möglich, da der Elektronenstrahl das immer vorhandene Restgas (vgl. Ziffer 14) schwach zum Leuchten anregt.

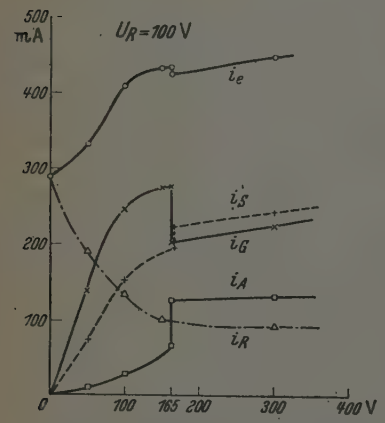


Fig. 13. Stromverteilung in Anordnung Fig. 12. i_e = Emissionsstrom der Kathode. Abszisse: Stoßspannung, an A und G.

Fig. 13 gibt den charakteristischen Verlauf der einzelnen Ströme wieder. Dabei ist bei einer Raumladegitterspannung von $U_R = 100$ Volt die Stoßspannung von 0 bis 350 Volt verändert worden. Bei allen derartigen Kennlinien ist charakteristisch der Sprung in allen Strömen bei einer Spannung, die ganz roh das eineinhalbfache der Raumladegitterspannung beträgt. Oberhalb dieser Sprungspannung *wird der Stoßstrom*[1]) *größer*, dazu aber — und das ist wesentlich — die Strahlform günstiger, was sowohl durch Ansehen als durch die Breite der Massenlinien am Ende des Massenspektrographen in Erscheinung tritt. Bei höherer Raumladespannung rückt — wie erwähnt — der Sprung nach höheren Stoßspannungswerten, sämtliche Ströme werden — was

[1]) Der Stoßstrom ist in passender Weise aus dem Anodenstrom und dem Gitterstrom errechnet.

ohne weiteres klar ist — größer. Dafür fällt aber, wenn man im günstigen Bereich oberhalb der Sprungspannung arbeiten will, die differentiale Ionisierung ab, und man wird in jedem Falle die Verhältnisse optimal zu wählen haben. Bei langer Betriebsdauer der Apparatur nehmen die Restgasdrucke immer mehr ab, so daß offenbar die unter D erwähnte positive Raumladung nicht mehr stabil zustande kommt; dann zerflattert der Elektronenstrahl (vgl. Anm. 1, S. 77), und der Stoßstrom sinkt auf einen Bruchteil ab. In diesem Falle kann man sich durch Zusatz von Spuren H_2 durch ein Palladiumrohr vom Hartwerden der Apparatur unabhängig machen.

13. Ionisierung im Restgas. Wie erwähnt, spielt das Restgas für die Stabilität der Ionenquelle eine nicht zu unterschätzende Rolle; deshalb wurde das Massenspektrum der Restgasionen nebst deren Intensitäten aufgenommen [1]) und für diejenigen Gase, für welche die

Tabelle 1. Intensität der Restgasionen.
Beschleunigungsspannung $U_B = 6$ kV; Stoßstrom $I_S = 260$ mA; Stoßspannung $U_S = 300$ Volt.

M	Ion	I_J in Amp.	s [2])	p mm in Hg [3])
1	H_1^+	$1{,}5 \cdot 10^{-7}$		
2	H_2^+	$1{,}1 \cdot 10^{-6}$	2	10^{-6}
3	H_3^+	$1{,}5 \cdot 10^{-9}$		
6	C^{++}	$1 \cdot 10^{-8}$		
8	O^{++}	$5 \cdot 10^{-9}$		
12	C^+			
13	CH^+	$2 \cdot 10^{-7}$		
14	CH_2^+			
15	CH_3^+			
16	O^+			
17	OH^+	$5 \cdot 10^{-7}$		
18	OH_2^+	$6 \cdot 10^{-7}$		
20	Ca^{++}			
28	CO^+	$3 \cdot 10^{-6}$	7,5	$5 \cdot 10^{-7}$
32	O_2^+			
35 + 37	Cl^+			
40	Ca^+			
44	CO_2^+	$4 \cdot 10^{-7}$		
46	Mo^{++}			
58/60	Ni^+			
66,7	Hg^{+++}	$1{,}2 \cdot 10^{-7}$	0,6	$2 \cdot 10^{-7}$
92	Mo^+			
100	Hg^{++}	$2{,}5 \cdot 10^{-7}$	2	$1{,}5 \cdot 10^{-7}$
138	Ba^+			
200	Hg^+			

[1]) Nach mehreren Stunden Betriebsdauer der Apparatur, also ziemlich am Anfang. — [2]) Nach Knoll-Ollendorf-Rompe, Gasentladungstabellen. — [3]) Berechnet nach Gl. (7).

differentiale Ionisierung bekannt ist, aus Gleichung (7) der Gasdruck berechnet. Tabelle 1 enthält eine Zusammenstellung der wichtigsten Massen nebst ihrer Bedeutung. Am stärksten unter den Restgasen sind H_2, CO, O_2 und CO_2 sowie Hg. Ersteres stammt aus den glühenden

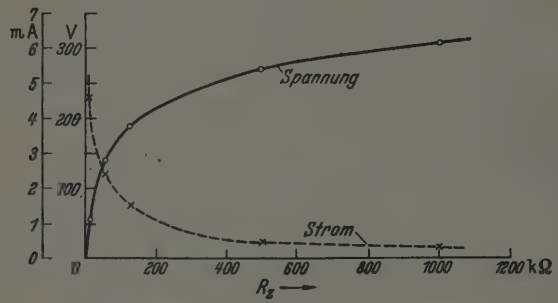


Fig. 14. Abhängigkeit der Ziehspannung vom Schließungswiderstand.

Metallen, während die anderen aus der Oxydpaste der Kathode kommen dürften; Hg rührt von der Pumpe — trotz Kühlung mit flüssiger Luft — her. Die Summe der Teildrucke beträgt einigemal 10^{-6} mm Hg, während am Mc Leodschen Manometer 10^{-5} mm Hg abgelesen wurden.

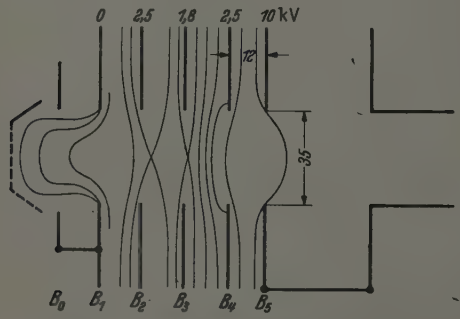


Fig. 15. Gestalt des Beschleunigungsfeldes ohne Ziehspannung.

14. Erzeugung und Gestalt des Ziehfeldes. Das Ziehfeld (die Ziehspannung) kann prinzipiell durch Anlegen einer Batterie zwischen A und B_0 erzeugt werden. Da jedoch auf die Blende B_0 stets Streuelektronen treffen, fließt, wenn man B_0 mit A verbindet, in der Verbindungsleitung ein Teil des Elektronenstromes ab. Legt man in diese Verbindungsleitung einen Wiederstand, so erzeugt dieser Strom gerade

einen Spannungsabfall, also eine Ziehspannung, im richtigen Sinne. Durch Veränderung des Widerstandes (R_z in Fig. 11) läßt sich auch die Ziehspannung variieren (vgl. Fig. 14). Neben dieser Möglichkeit zur Erzeugung eines Ziehfeldes besteht auch noch die Möglichkeit, allein das Beschleunigungsfeld in den Stoßraum hineingreifen zu lassen. Die diesem Fall entsprechende Gestalt des Potentialfeldes ist in Fig. 15 dargestellt.

15. Abhängigkeit des Ionenstromes von der Beschleunigungsspannung. Die zuletzt erwähnte Art der Erzeugung des Ziehfeldes hat den Vorteil, *daß die Teilchenbahnen dieselben bleiben*, wenn die gesamte Beschleuni-

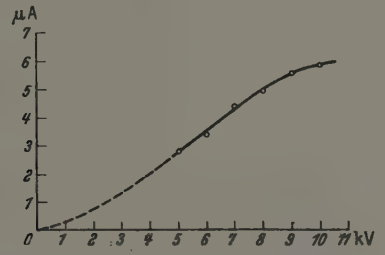


Fig. 16. Abhängigkeit des Ionenstromes von der Beschleunigungsspannung. $I_E = 200$ mA, $U_S = 300$ Volt, Ofenheizung unter Optimalwert [Gl. (9)].

gungsspannung (*HS* in Fig. 11) verändert wird. Man kann auf diese saubere Weise also den Ionenstrom in Abhängigkeit von der Ziehspannung untersuchen, was in Fig. 16 geschehen ist.

Der Ofen war dabei mit Silber gefüllt. Silber hat zur Prüfung der Apparatur verschiedene Vorteile: es verdampft bei nicht allzu hohen Temperaturen genügend und kondensiert überall an den Wänden der Ionenquelle, und zwar ohne Oberflächenwanderung und ins Gewicht fallende Reflexion. Es hat zwei gleich starke Isotope (107, 109), die um zwei Masseneinheiten getrennt sind und deren Massenzahl schon im Bereich der höheren Massen (wo die Dispersion nicht mehr sehr groß ist) liegt. Der Ionenstrom zeigt entsprechend dem in Ziffer 8 Besprochenen einen Anstieg, der in eine Sättigung übergeht. Der gemessene Höchstwert beträgt etwa 6 μA. Mit den in Fig. 10 angegebenen Apparatdimensionen erhält man bei $I_E = 200$ mA und $U_S = 300$ Volt aus Gleichung (7) einen Ionenstrom von $I_J = 2$ bis 20 μA (entsprechend $s = 1$ bis 10).

16. Abhängigkeit des Ionenstromes von der Gasdichte. Diese zunächst proportionale Abhängigkeit muß nach Ziffer 11 bei wachsendem v unterproportional wachsen. Fig. 17 zeigt ein charakteristisches Beispiel einer solchen Kurve, in der der Ionenstrom [1]) über p_0/T_0 [2]), was proportional zu v ist, aufgetragen ist. Die Messung wurde am Ag^{++} durchgeführt, da im Massenspektrum neben dem Ag^{+} das Hg^{++} liegt, das bei kleinen Ag^{+}-Strömen die Intensität fälscht. Die Messung geschah in der Weise, daß der gesamte Ionenstrom, der aus der Ionenquelle gezogen wurde, in das magnetische Sektorfeld trat. Auf günstigste

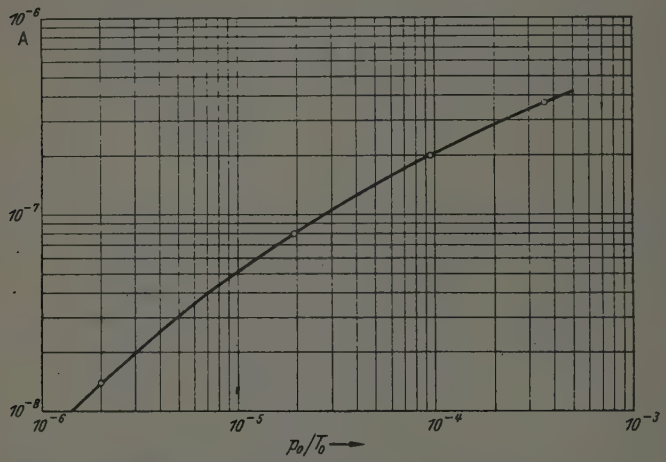


Fig. 17. Abhängigkeit des Ionenstromes von der Teilchendichte im Stoßraum, gemessen am Ag^{++}.

Fokussierung wurde dabei nicht geachtet [3]), so daß die Silberisotope am Ende des Sektorfeldes nicht aufgelöst waren. Gemessen wurde der Strom auf dem Leuchtschirm [4]).

17. Auflösung der Apparatur und erzielte Intensität. Die Intensitätsverteilung auf dem Leuchtschirm bei günstigster Wahl der Blenden-

---

[1]) Abzüglich des Reststroms; wegen der Bedampfung des gesamten Raumes mit Silber und der dauernden Erwärmung vieler Teile durch Strahlung und Elektronenbombardement ist auch bei nicht geheiztem Ofen ein gewisser Silberdampfdruck vorhanden. — [2]) p_0, T_0 im Ofen! — [3]) Es kam ja nur auf die Messung des Stromwertes an. — [4]) Vgl. ZS. f. Phys. **108**, 376, 1938.

potentiale ist in Fig. 18 dargestellt. Die unter diesen günstigsten Verhältnissen erzielte Trennleistung an getrenntem Isotop beträgt etwa $5 \cdot 10^{-7}$ Mol $Ag^{109} + 5 \cdot 10^{-7}$ Mol Ag^{107} pro Tag bzw. 1,5 μg jeder Sorte

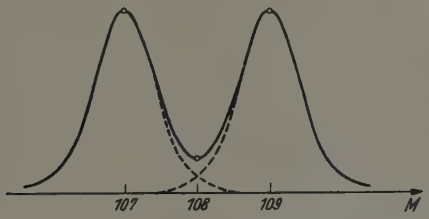


Fig. 18. Intensitätsverteilung der Silberisotope am Auffänger des Trennspektrographen bei günstigster Fokussierung.

pro Stunde. Die Reinheit der Isotope ist nach Fig. 18 sicher *besser* als 99%. Bei weniger hohen Ansprüchen hinsichtlich der Reinheit des erhaltenen Produktes kann die Trennleistung um einen Faktor 2 bis 10 gesteigert werden.

Zur Reflexion von Röntgenstrahlen an Kristallen.

Von **Walter Wunderlich** in Kiel.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 27. Mai 1943.)

Es wird die bei der Reflexion eines monochromatischen Röntgenstrahlbündels an der ebenen Oberfläche eines Einkristalls entstehende Regelfläche untersucht und ihre wichtigsten ebenen Schnitte, die als Diagrammkurven auftreten können, werden gekennzeichnet. Ferner wird die Auswertung besonderer Diagrammkurven besprochen.

1. Einleitung.

Seemann veröffentlicht in einer 1930 erschienenen Arbeit[1]) Röntgendiagramme von Steinsalzkristallen, die so entstehen, daß ein großer Kristall mit ebener Oberfläche ε aus einem im Abstand h befindlichen Punkt O mit monochromatischem Röntgenlicht angestrahlt wird und die reflektierten Strahlen von einem ebenen Film π aufgefangen werden. Da es sich um eine Interferenzerscheinung handelt, gelangen für jede Netzebenenstellung des Strukturgitters nur jene Strahlen des Bündels O zur Wirkung, die unter einem Braggschen Winkel γ einfallen; γ ergibt sich aus

$$\cos\gamma = \frac{n\lambda}{2d} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

wobei λ die Wellenlänge der Strahlung und d den Abstand benachbarter Netzebenen bedeutet.

Geometrisch liegt demnach folgender Sachverhalt vor: Von O strahlt ein *Drehkegel* Γ mit dem Öffnungswinkel 2γ aus, dessen Achse z auf der betrachteten Netzebenenstellung senkrecht steht. Γ schneidet die Oberfläche ε nach einem Kegelschnitt c, und hier wird jeder Mantelstrahl parallel zu seiner Gegenerzeugenden reflektiert. Die so entstehende *Regelfläche* Φ schneidet den Film π nach der der Netzebenenstellung zugeordneten Diagrammkurve q.

Aus dem System dieser Diagrammkurven für einen Kristall können dann Rückschlüsse auf die vorhandenen Netzebenen und deren Abstände gezogen werden. In der genannten Arbeit wird vor allem die zu ε parallele Bildebene π durch das Bündelzentrum O betrachtet. Seemann spricht dabei die Diagrammkurven q ohne Beweis, aber unmiß-

[1]) H. Seemann, Ann. d. Phys. 7, 633, 1930.

verständlich als *Kegelschnitte* an, betont jedoch, daß die Regelfläche Φ kein Kegel ist.

Im Jahre 1941 erfolgt eine sachliche Richtigstellung von Maier [1]), wobei nachgewiesen wird, daß es sich bei den fraglichen Diagrammkurven keineswegs um Kegelschnitte, sondern um doppeltsymmetrische *Quartiken* (Kurven 4. Ordnung) handelt, für die der Name „Spiren" vorgeschlagen wird.

Seemann erklärt in einer Entgegnung [2]), diese Tatsache sei ihm stets bekannt gewesen und veröffentlicht seinerseits eine ausführlichere Darstellung der obwaltenden geometrischen Verhältnisse [3]). Er kennzeichnet nunmehr wie Maier jene speziellen Diagrammkurven als affine Boothsche Lemniskaten, weist darüber hinaus auch die zu π parallelen sowie die zu z normalen Schnitte der Regelfläche Φ als Quartiken nach, vermutet aber „vorbehaltlich genauerer Untersuchung", daß allgemeine Ebenen die Fläche nach Kurven 8., ja 10. Ordnung schneiden.

Da dies nicht zutreffen kann und eine richtige Auswertung der Diagrammkurven im hyperbolischen Fall (s. u.) noch nicht vorliegt, scheint es mir nach allem angebracht, den geometrischen Sachverhalt endgültig klarzustellen, obwohl es sich um kein grundlegendes Problem, sondern bloß um eine reizvolle Anwendung der darstellenden Geometrie der Regelflächen handelt. Die folgende Untersuchung geschieht vorwiegend rein geometrisch, wird jedoch zum leichteren Verständnis von analytischen Entwicklungen begleitet.

2. Ordnung und Eigenschaften der Regelfläche Φ.

Es liegt also ein *Drehkegel* Γ mit der Spitze O, der Achse z und dem Öffnungswinkel 2γ vor. Ferner ein Kristall mit der *ebenen Oberfläche* ε, aus der die zu z senkrechten Strukturebenen unter dem Winkel δ ausstreichen (in Fig. 1 durch waagerechte Schraffen angedeutet). Machen wir O zum Ursprung und z zur Achse eines Systems von Zylinderkoordinaten r, φ, z, so lautet bei vorläufiger Beschränkung auf positive r die Gleichung des unteren Kegelmantels

$$\Gamma \ldots z = -r \operatorname{ctg} \gamma, \tag{2}$$

während ε angesetzt werden kann mit

$$\varepsilon \ldots z = -r \cos\varphi \cdot \operatorname{tg} \delta - l \quad (l > 0). \tag{3}$$

[1]) W. Maier, Ann. d. Phys. 40, 85, 1941. — [2]) H. Seemann, ebenda 41, 313, 1942. — [3]) H. Seemann, ZS. f. Phys. 119, 374, 1942.

ε schneidet Γ längs eines *Kegelschnittes* c, der im folgenden als „Grundkurve“ bezeichnet sei, weil von hier die Regelfläche praktisch ausgeht. Für den Grundriß c' (Normalriß in Richtung z auf eine Netz-

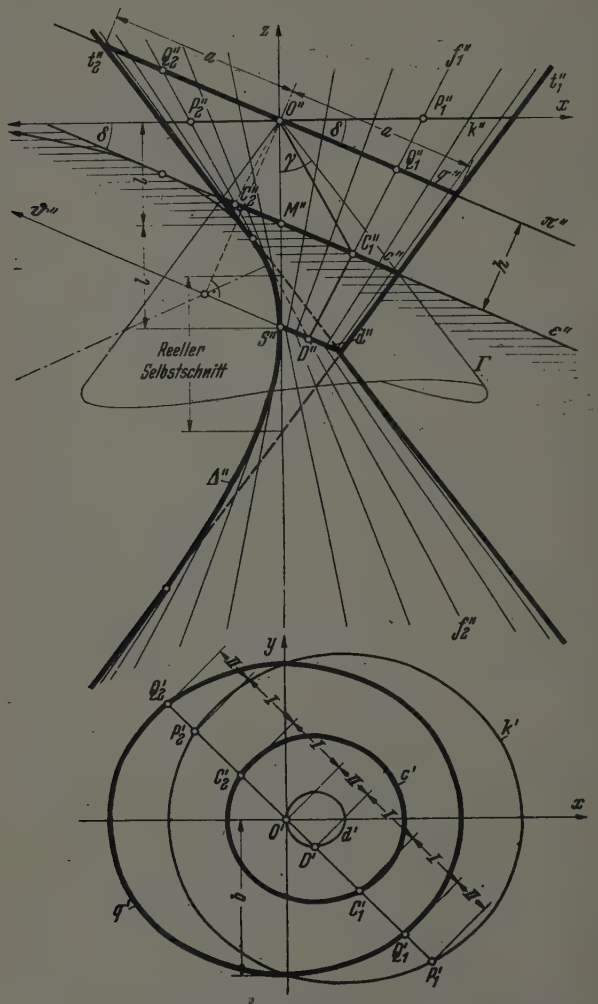


Fig. 1. Die von reflektierten Röntgenstrahlen gebildete Regelfläche Φ in Grund- und Aufriß.

ebene, etwa $z = 0$) ergibt sich durch Entfernung von z aus (2) und (3) die Gleichung

$$c' \ldots r = \frac{l}{\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{tg}\delta\cos\varphi}; \qquad (4)$$

O ist bekanntlich ein Brennpunkt von c'.

Eine beliebige Erzeugende e_1 von Γ trifft ε in einem Punkt C_1 von c und wird daselbst an der dort austretenden Netzebene parallel zur Gegenerzeugenden e_2 reflektiert[1]). Faßt man die so gewonnene Erzeugende f_1 unserer zu untersuchenden Regelfläche Φ als Verbindung von C_1 mit dem Fernpunkt E_2 von e_2 auf, so erkennt man eine eineindeutige — d. h. projektive — Zuordnung zwischen den Punkten C_1 von c und den Punkten E_2 des Fernkreises u von Γ; das Erzeugnis zweier projektiv aufeinander bezogenen Kegelschnitte ist aber eine rationale *Regelfläche* 4. *Ordnung*[2]).

Ihre analytische Darstellung erhalten wir folgendermaßen: Die Gleichung der Erzeugenden f_1 lautet

$$f_1 \ldots z - z_1 = (r - r_1) \cdot \operatorname{ctg} \gamma, \tag{5}$$

wobei die Koordinaten r_1, φ, z_1 von C_1 den Gleichungen (2), (3) und damit auch (4) genügen. Nun haben wir bloß r_1 und z_1 zu eliminieren und erhalten

$$\Phi \ldots r \operatorname{ctg} \gamma - z = \frac{2l}{1 - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta \cdot \cos \varphi}. \tag{6}$$

Gehen wir schließlich mittels $r \cos \varphi = x$ und $r \sin \varphi = y$ zu kartesischen Normalkoordinaten über, so ergibt sich nach kurzer Umformung

$$\Phi \ldots (x^2 + y^2)(x \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta + z + 2l)^2 = [(x^2 + y^2) \operatorname{ctg} \gamma + xz \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta]^2, \tag{7}$$

womit die Ordnung der Regelfläche analytisch bestätigt ist.

Will man Φ mit Hilfe von *Leitlinien* erzeugen, so stehen hierfür die Achse z, der Grundkegelschnitt c und der Fernkreis u zur Verfügung. Zu beachten ist hierbei bloß, daß c und u einander in zwei uneigentlichen Punkten U_1, U_2 schneiden (beide Kurven liegen ja auf Γ), so daß sich von der zu erwartenden Regelfläche $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Ordnung zwei Strahlbüschel U_1, U_2 abspalten, weiters der Kegel Γ selbst, so daß schließlich für die Restfläche Φ die Ordnung 4 verbleibt.

Φ ist *symmetrisch* zur Aufrißebene $y = 0$. Die Achse z ist *doppelte Leitgerade* der Fläche, da von jedem ihrer Punkte zwei (zu $y = 0$ symmetrische) Erzeugende ausgehen.

---

[1]) Man kann sich diese Reflexion anschaulich machen, wenn man sich vorstellt, daß die Oberfläche ε wie eine Treppe mit feinsten waagrechten spiegelnden Stufen besetzt ist. — [2]) E. Müller u. J. Krames, Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. III: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Wien 1931), S. 251.

In jeder Ebene μ durch z liegen zwei Erzeugende f_1, f_2 von Φ, hervorgerufen durch die zwei Gegenerzeugenden $e_1 \parallel f_2$ und $e_2 \parallel f_1$ von Γ. Drehen wir μ um z, so beschreibt der Schnittpunkt D von f_1 und f_2 eine *Doppelkurve*[1]) d der Fläche. Diese kann in unserem Falle nur ein *Kegelschnitt* sein, wovon man sich auch elementar leicht überzeugen kann: Die vier Erzeugenden e_1, f_1, f_2, e_2 bilden ein Parallelogramm OC_1DC_2 (Fig. 1); wegen $C_1D = OC_2$ liegt D sicherlich in der aus ε durch zentrische Verdoppelung von O aus entstehenden Ebene ϑ; da ϑ aber unabhängig von μ ist, enthält sie die ganze Kurve d. Führt man dann die Addition der Vektoren OC_1 und $C_1D = OC_2$ im Grundriß durch, so ergibt sich als Ort von D' ein zu c' homothetischer (d. h. bezüglich des gemeinsamen Mittelpunktes zentrisch ähnlicher) Kegelschnitt d', dessen Hauptscheitel mit den Brennpunkten von c' zusammenfallen; in der Tat, zufolge der gemeinsamen axialen Symmetrie homothetischer Kegelschnitte in jeder Richtung gilt auf jedem Strahl durch O': $C_1'D' = O'C_2'$.

Da die Regelfläche Φ eine doppelte Leitgerade und einen Doppelkegelschnitt besitzt; ist sie zur V. Art nach Sturm zu rechnen[2]).

Dual zur Doppelkurve d besitzt Φ auch eine *Doppeltorse* Δ, d. h. eine doppelt berührende abwickelbare Fläche. Sie wird umhüllt von den Ebenen ν, die Paare zu $y = 0$ symmetrischer Flächenerzeugenden aufspannen. Da die Ebenen ν zur Aufrißebene $y = 0$ normal stehen, ist Δ ein zu y paralleler *Zylinder*, und da unter ihnen als Grenzfall die Fernebene enthalten ist (aufgespannt von den beiden Fernerzeugenden u_1, u_2, die vom Fernpunkt der z-Achse nach den Punkten U_1, U_2 zielen), ist dieser Zylinder *parabolisch*. — Von seinem Vorhandensein kann man sich wieder elementar überzeugen: Sein Normalschnitt muß ja von den Aufrissen der Erzeugenden f_1 (und f_2) eingehüllt werden; nun läuft aber f_1'' durch C_1'' parallel zu $O''C_2''$ und letztere Gerade ist wieder symmetrisch zu $O''C_1''$ bezüglich z. Die Richtung von f_1'' ist also projektiv zur Reihe der Punkte C_1'', das Hüllgebilde von f_1'' ist demnach eine *Parabel* Δ''. Der zugehörige Zylinder Δ berührt die Regelfläche aus Symmetriegründen doppelt, und zwar längs einer rationalen Raumkurve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt in S, die, doppelt gezählt, den vollständigen Schnitt 8. Ordnung von Φ und Δ darstellt. Auf Grund besonderer Lagen von C_1'' ergibt sich, daß Δ die Ebenen ε und $z = 0$ berührt,

[1]) Nicht Torsal- oder Kehlkurve, wie bei H. Seemann, ZS. f. Phys. **119**, 374, bes. 382, 1942. — [2]) Müller-Krames, S. 258—260.

ferner die beiden in $y = 0$ gelegenen Umrißerzeugenden t_1, t_2 und schließlich die Achse z in ihrem Treffpunkt S mit d. Es läßt sich endlich zeigen, daß die Hauptebene von Δ unter dem Winkel δ ansteigt, ferner daß die Fokalachse in der Ebene ϑ liegt und den Fußpunkt des aus O auf ϑ gefällten Lotes enthält (Fig. 1).

Um die Gleichung des Doppelzylinders Δ aufzustellen, ersetzen wir in (6) r durch $x/\cos\varphi$, was bei festem φ die Gleichung einer Berührebene ν von Δ liefert; nach bekannter Regel ist nun nach dem Parameter φ (oder $\cos\varphi$) partiell zu differenzieren und dieser hierauf zu eliminieren. Man erhält

$$\Delta \ldots (x \operatorname{tg}\delta - z)^2 + 4\,l\,(x \operatorname{tg}\delta + z + l) = 0. \qquad (8)$$

Man beachte, daß Δ vom Winkel γ unabhängig ist.

Φ ist eine „windschiefe" Regelfläche, d. h. längs jeder allgemeinen Erzeugenden wechselt die Tangentialebene von Punkt zu Punkt. Längs der vorhin erwähnten Erzeugenden t_1, t_2 jedoch verhält sich Φ insofern wie ein Kegel, als hier die zugehörigen Tangentialebenen zusammenfallen und der ganzen Länge nach berühren. Solche Erzeugende heißen *Torsallinien*, ihre Berührebenen „Torsalebenen" und die als Kegelspitzen geltenden Punkte „Kuspidalpunkte". Letztere liegen in unserem Falle auf der Achse z und trennen hier jenen Teil der Doppelgeraden, längs dessen eine tatsächliche (reelle) Selbstdurchdringung der Fläche stattfindet, von ihrem isolierten (parasitischen) Teil.

Unsere Fläche besitzt aber noch zwei weitere Torsalerzeugende, die allerdings imaginär sind: Es sind die in der Grundebene $z = 0$ gelegenen Erzeugenden des Kegels Γ. Die zugehörigen Torsalebenen sind die Minimalebenen $x \pm iy = 0$. Dies ist insofern von Bedeutung, als der Grundriß jeder auf Φ verlaufenden Kurve an die den Umriß abgebenden Minimalgeraden $x \pm iy = 0$ berührend herantritt, mithin den Ursprung O als *Brennpunkt*[1]) besitzt (vgl. etwa c').

Es mag noch ausdrücklich erwähnt werden, daß der Drehkegel Γ für die Regelfläche einen *Richtkegel* abgibt, enthält er ja zu jeder Erzeugenden von Φ eine parallele. — Die Fläche Φ aber als „Kegelkonoid" zu bezeichnen, wie Seemann vorschlägt, ist nicht angängig, da der Name Konoid für jene Regelflächen vorbehalten ist, deren sämtliche Erzeugenden zu einer festen Ebene parallel sind.

[1]) Als *Brennpunkte* einer beliebigen Kurve bezeichnet man jene Punkte, in denen sich die zu den Minimalrichtungen $x \pm iy = 0$ parallelen Kurventangenten schneiden.

Was die Einteilung unserer Flächen Φ betrifft, so haben wir drei Fälle zu unterscheiden:

$\gamma + \delta < 90^0$: *Elliptischer Fall.* c und d sind Ellipsen. U_1, U_2 sind konjugiert komplex, ebenso u_1, u_2. Der reelle Selbstschnitt längs z findet zwischen t_1 und t_2 statt.

$\gamma + \delta = 90^0$: *Parabolischer Fall.* c und d sind Parabeln. U_1 und U_2 fallen in einem reellen Punkt zusammen. u_1 und u_2 vereinigen sich mit t_1 zu einer reellen Ferngeraden. Der reelle Selbstschnitt längs z findet unterhalb t_2 statt.

$\gamma + \delta > 90^0$: *Hyperbolischer Fall.* c und d sind Hyperbeln. U_1, U_2 sind reell getrennt, ebenso u_1, u_2. Der reelle Selbstschnitt längs z findet außerhalb t_1 und t_2 statt.

Bemerkenswert ist vielleicht noch der Fall $\gamma = 45^0$, auf den der allgemeine Fall durch affine Dehnung oder Verkürzung der z-Koordinaten stets zurückgeführt werden kann. Hier ist nämlich $f_1 \perp e_1$, d. h. die Regelfläche Φ ist dann die *Normalenfläche* des Drehkegels Γ längs eines ebenen Schnittes c[1]).

3. *Ebene Schnitte der Regelfläche Φ.*

Wie eingangs erklärt, sind die Kurven auf den Seemannschen Diagrammen die Schnittlinien der den verschiedenen Netzebenenstellungen zugeordneten Regelflächen Φ mit der Filmebene. Da wir Φ als rationale Regelfläche 4. Ordnung erkannt haben, ist auch jeder allgemeine ebene Schnitt eine *rationale Kurve 4. Ordnung* und kann niemals 8. oder gar 10. Ordnung sein, wie Seemann [a. a. O.[2]), S. 396] vermutet; analytisch geht das unmittelbar aus Gleichung (7) hervor, wenn man x, y, z als lineare Funktionen eines Parameters t ansetzt.

Die drei Doppelpunkte, die eine solche Quartik aufweist, rühren von den Selbstschnitten der Regelfläche her und liegen demnach auf der Doppelgeraden z und dem Doppelkegelschnitt d. — Von den vier Fernpunkten der Quartik befinden sich zwei auf dem Fernkreis u und zwei auf den Fernerzeugenden u_1, u_2. Die letzteren sind im Grundriß allen Schnittlinien gemeinsam und konjugiert komplex, zusammenfallend oder reell getrennt, je nachdem ob der elliptische, parabolische oder hyperbolische Fall vorliegt.

---

[1]) Vgl. Müller-Krames, S. 276. — [2]) H. Seemann, ZS. f. Phys. 119, 374, 1942.

a) Achsennormale Schnitte. Die Ebenen $z = \text{const}$ liefern *zirkulare* Quartiken, d. h. solche, die (einfach) durch die absoluten Kreispunkte gehen. Die Tangentialebenen von Φ daselbst sind die oben erwähnten Minimalebenen $x \pm iy = 0$; der außerordentliche Brennpunkt dieser Quartiken liegt mithin auf der Achse z. — Hervorzuheben ist die Ebene $z = 0$, für die der Schnitt in das Minimalgeradenpaar durch O und einen *Kegelschnitt* k zerfällt. Auf Grund der Streckengleichheit $OC_1 = C_1P_1$ (Fig. 1) erkennt man, daß k durch zentrische Verdoppelung aus c' hervorgeht. Wegen der festen Neigung aller Flächenerzeugenden sind deren Abschnitte zwischen $z = 0$ und $z = \text{const}$ untereinander gleich lang und jeder achsennormale Schnitt kann als *Konchoide* des Kegelschnittes k vom Brennpunkt O aus erhalten werden. Diese Kurven sind aber sicherlich keine Pascal-Schnecken oder Kardioiden[1]), da sie sonst in den absoluten Punkten Spitzen aufweisen müßten, während ja bei uns alle Singularitäten im Endlichen liegen.

b) Oberflächenparallele Schnitte. Die Schnitte parallel zur Kristalloberfläche ε verlaufen auch parallel zur Ebene ϑ der Doppelkurve d und liefern daher Quartiken mit zwei unendlich fernen Doppelpunkten U_1, U_2 (s. o.). Im elliptischen Falle sind diese konjugiert komplex, so daß wir es mit *affinen Fußpunktskurven* (oder *Inversen*) von *Kegelschnitten* zu tun haben. Von besonderem Interesse ist die den Ursprung O enthaltende Ebene π, da in erster Linie diese als Filmträger herangezogen wurde; sie ist aber auch rein geometrisch ausgezeichnet, da für die zugehörige Quartik q der Doppelpunkt O in der Mitte liegt (Fig. 1). Die Quartik q ist demnach zweifach symmetrisch und eine *affine Boothsche Lemniskate.* Maier[2]) und Seemann[3]) beweisen dies elementar über die Beziehung $OQ_1 = C_2C_1$, welche q auf einfachste Weise aus dem Grundkegelschnitt c abzuleiten gestattet: Es sind die durch M gehender Sehnen von c von O aus parallel abzutragen. Auch die weiteren Beziehungen zu d und k gehen aus den in Fig. 1 vermerkten Streckengleichheiten auf dem Fahrstrahl durch O' zur Genüge hervor („Zissoidale Erzeugung").

Setzt man in (6) $z = -r \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\delta$, so erhält man als Gleichung für die Quartik

$$q \ldots r = \frac{2l \cdot \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}^2\gamma \operatorname{tg}^2\delta \cdot \cos^2\varphi}, \quad z + r \operatorname{tg}\delta \cdot \cos\varphi = 0 \qquad (9)$$

[1]) H. Seemann, a. a. O., S. 374 und Fig. 10. — [2]) W. Maier, Ann. d. Phys. 40, 85, 1941. — [3]) H. Seemann, ZS. f. Phys. 119, 374, 1942.

Im *hyperbolischen Fall* sind die Ferndoppelpunkte U_1, U_2 reell und getrennt. Die Quartik q besteht aus vier hyperbelartigen Ästen, von denen im Röntgendiagramm allerdings nur zwei auftreten. Von den vier Asymptoten sind je zwei parallel, es geht aber keine durch O, was schon aus Symmetriegründen nicht statthaben kann. Wir können die beiden Asymptoten von U_1 konstruieren, indem wir daselbst die Tangentialebenen von Φ bestimmen und mit π schneiden; eine dieser Berührebenen wird aufgespannt von der Tangente an c und der Erzeugenden u_1; erstere ist Asymptote von c, letztere geht durch den Fernpunkt der z-Achse (s. o.), so daß die gesuchte Berührebene parallel zu z verläuft: Das Asymptotenpaar der Grundhyperbel c deckt sich im Grundriß mit einem Asymptotenpaar der Quartik q (das andere ergibt sich durch Symmetrie). Dieses Zusammenfallen findet in einem anderen Parallelriß auf π natürlich nicht mehr statt, insbesondere auch nicht im Normalriß, wie Maier (a. a. O. S. 101 und Fig. 11) irrtümlich annimmt.

Im *parabolischen Fall* rücken U_1 und U_2 zusammen, die Quartik weist mithin in ihrem Fernpunkt eine Selbstberührung längs der Ferngeraden auf. Da der Doppelpunkt O wie in allen Fällen für q' einen Brennpunkt darstellt, handelt es sich hier um die *Kampyla* des Eudoxus[1]):

$$q' \ldots r = \frac{2l \cdot \operatorname{tg}\gamma}{\sin^2\varphi}; \qquad (9')$$

q selbst ist eine Affine hiervon.

c) Schnitte 2. Ordnung. Bemerkenswert sind schließlich noch die Tangentialebenen des *parabolischen Zylinders* Δ, die die Regelfläche Φ nach je zwei Erzeugenden und einem *Kegelschnitt*, also einer zerfallenden Quartik durchsetzen. Wir kennen hiervon bereits die Kegelschnitte c und k (die Doppelkurve d steht außerhalb der Reihe). Alle diese Kegelschnitte haben im Grundriß O' als gemeinsamen Brennpunkt und Ähnlichkeitszentrum; die Ähnlichkeit folgt aus dem Vorhandensein der Fernerzeugenden u_1, u_2, die im Grundriß das allen Kurven gemeinsame Fernpunktepaar U_1', U_2' hervorrufen.

Es ist also durchaus nicht ausgeschlossen, auch bei dieser Anordnung Kegelschnitte als Diagrammkurven zu erhalten, allerdings bloß vereinzelt; die Filmebene müßte den Zylinder Δ berühren.

---

[1]) H. Wieleitner, Spezielle Ebene Kurven (Samml. Schubert, Bd. 56), S. 69.

4. *Auswertung der Quartik q.*

Es handelt sich nun um die Aufgabe, bei Kenntnis des Abstandes $h = l \cos \delta$ zwischen Filmebene π und Kristalloberfläche ε, aus einer aufgenommenen Diagrammquartik q den Braggschen Winkel γ und die Streichrichtung δ der zugehörigen Strukturebenen zu bestimmen.

a) Elliptischer Fall. Die Quartik q ist eine *geschlossene*, doppelt symmetrische Kurve. Es liegt daher nahe, die beiden *Halbachsen* a, b auszumessen. Auf Grund von (9) gilt

$$a = \frac{r(0)}{\cos \delta} = \frac{2h \operatorname{tg} \gamma}{\cos^2 \delta - \operatorname{tg}^2 \gamma \sin^2 \delta}, \tag{10}$$

$$b = r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2h \operatorname{tg} \gamma}{\cos \delta}. \tag{11}$$

Durch Entfernung von γ ergibt sich für $\cos \delta$ die kubische Gleichung

$$\cos^3 \delta + \left(\frac{4h^2}{b^2} - 1\right) \cos \delta - \frac{4h^2}{ab} = 0; \tag{12}$$

γ ergibt sich anschließend aus (11).

Seemann [a. a. O.[1]), S. 638] gibt die entsprechende kubische Gleichung für $\operatorname{tg} \gamma$ an, schlägt aber ein zeichnerisches Lösungsverfahren vor, das folgendermaßen abgeleitet werden kann: Aus Fig. 1 folgt zunächst, daß die Hauptachse der Grundellipse c die Länge a hat, während ihre y-parallele Sehne durch M gleich b ist. Denken wir uns diese Sehne um die z-Achse in die Aufrißebene gedreht, so gelangen ihre Endpunkte auf die Umrißerzeugenden des Drehkegels Γ und es entsteht nach Weglassung aller unnötigen Linien das nachstehende (um δ gekippte) Schema:

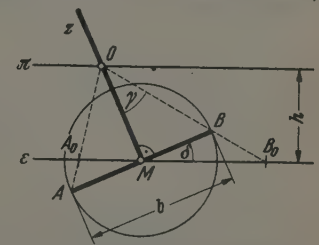


Fig. 2. Zeichnerische Auswertung der Quartik q im elliptischen Fall.

Das Verfahren geht nun so vorsich: Man zeichnet (in genügend großem Maßstab) zwei Parallelen ε und π im Abstande h und dreht hierauf die Strecke $AB = b$ um ihren festgehaltenen Mittelpunkt M so lange, bis ihre Projektion $A_0 B_0$ aus dem Punkt O der Mittelsenkrechten die Länge a hat. Die gesuchten Winkel γ und δ sind dann wie ersichtlich unmittelbar abzulesen.

---

[1]) H. Seemann, Ann. d. Phys. 7, 633, 1930.

Maier (a. a. O. S. 97) hält die Strecke $A_0B_0 = a$ fest und verändert den Punkt O auf π; seine richtige Lage wird dann mit Hilfe einer Fehlerkurve bestimmt. — Eine solche Fehlerkurve wird man zweckmäßig auch für das Seemannsche Verfahren heranziehen; man kann etwa die Abweichung der Strecke A_0B_0 von der geforderten Länge a als Ordinate über B_0 auftragen (mit Berücksichtigung des Vorzeichens!) und erhält so eine Kurve, deren Schnitt mit ε den richtigen Ort von B_0 liefert.

b) Parabolischer Fall. Hier ergibt sich aus der gemessenen Halbachse b auf Grund von (9′) unmittelbar

$$\cos\gamma = \sin\delta = \frac{2h}{b}. \tag{13}$$

Im übrigen tritt dieser Sonderfall nicht von selbst auf und wäre auch gar nicht als solcher zu erkennen.

c) Hyperbolischer Fall. Da von den vier Ästen der Quartik q bei der Aufnahme nur jene beiden auftreten, deren Scheitel auf der y-Achse liegen, fehlt die Halbachsenlänge a. Seemann [a. a. O.[1]), S. 641] zieht daher noch einen allgemeinen Punkt von q heran, setzt aber q noch fälschlich mit einer Hyperbelgleichung an. Maier[2]) benutzt statt dessen die Asymptoten; abgesehen davon, daß deren Festlegung durch gefühlsmäßiges Anlegen nicht als hinreichend genaues Konstruktionsprinzip angesehen werden kann, wird überdies angenommen, daß sie sich im Normalriß auf ε mit den Asypmtoten der Grundhyperbel c decken, was, wie bereits unter 3 b) erwähnt, nicht zutrifft.

Um einen allgemeinen Punkt von q zu verwerten, benötigt man die Gleichung der Quartik in Normalkoordinaten. Aus (9) folgt zunächst

$$(x^2 + y^2 - x^2\,\mathrm{tg}^2\gamma\,\mathrm{tg}^2\delta)^2 - 4l^2\,\mathrm{tg}^2\gamma\,(x^2 + y^2) = 0 \tag{14}$$

und nach Übergang zu Normalkoordinaten ξ, η in der Filmebene π vermöge $x = \xi\cos\delta$, $y = \eta$

$$[\xi^2(\cos^2\delta - \mathrm{tg}^2\gamma\sin^2\delta) + \eta^2]^2 - \frac{4h^2\,\mathrm{tg}^2\gamma}{\cos^2\delta}(\xi^2\cos^2\delta + \eta^2) = 0. \tag{15}$$

---

[1]) H. Seemann, Ann. d. Phys. 7, 633, 1930. — [2]) W. Maier, ebenda 40, 85, 1941.

Mißt man nun die Halbachse b und die Koordinaten ξ_0, η_0 eines allgemeinen Punktes von q aus, so erhält man nach Entfernung von γ vermöge (11) die Bestimmungsgleichung 4. Grades für $\cos^2\delta$:

$$\left[\xi_0^2\left(\frac{b^3}{4h^2}\cos^4\delta + \left(1 - \frac{b^3}{4h^2}\right)\cos^2\delta\right) + \eta_0^2\right]^2 - b^2(\xi_0^2\cos^2\delta + \eta_0^2) = 0. \quad (16)$$

γ ergibt sich dann wieder aus (11).

Hiermit dürfte die Geometrie der Regelfläche Φ und ihrer ebenen Schnitte hinreichend und endgültig geklärt sein.

Was schließlich die von Maier beobachtete „Knotenbildung" der Quartiken q betrifft, d. h. die Erscheinung, daß in einem Diagramm mehrere Kurven durch einen Punkt gehen, so ist dies meines Erachtens eine rein zufällige Inzidenz, die bei der Vielzahl der auftretenden Diagrammkurven nicht sonderlich überraschen darf und die gar nicht genau vorhanden ist, da sie sich theoretisch nicht begründen läßt.

Kiel, im April 1943.

Eine neue Methode zur Quantelung der freien Strahlung mit einem Beitrag zur Neutrinotheorie des Lichtes.

Von Karl Bollert, Nußdorf bei Traunstein (Oberbayern).

(Eingegangen am 1. Juni 1943.)

Im ersten Teil wird die bisher übliche Quantelung der freien Strahlung einer Revision unterzogen. Diese erscheint dem Verfasser unbefriedigend, da sie zu hartnäckigen Schwierigkeiten führt, die nicht in der Natur der Sache selbst zu liegen scheinen. Die Schwierigkeiten hängen mit der Einführung des Operators $1/\sqrt{-\Delta}$ zusammen und haben ihren eigentlichen Grund darin, daß die Quantelung den Maxwellschen Gleichungen von außen aufgezwungen ist. Man sollte doch erwarten, daß die Quantelung sich zwangsläufig aus der Natur des Problems ergibt, also aus der Beschaffenheit der Maxwellschen Gleichungen, wie das auch sonst bei den befriedigend gelösten übrigen Quantenproblemen der Fall ist. Eine genaue Untersuchung der Eigenschaften des freien Feldes ergibt dann auch tatsächlich, daß die Feldenergie nur nach den Formeln des harmonischen Oszillators in ganz bestimmter Weise gequantelt werden darf und daß dann die erwähnten Schwierigkeiten automatisch verschwinden. Als Folge ergeben sich für die Feldvektoren Doppelgleichungen (vgl. 18), die das Maxwellsche und das quantenmechanische Bewegungsgesetz ohne Änderungen einfach vereinigen.

Für die Arbeit ist wesentlich, daß alle Feldvektoren sich als ein lineares Aggregat von vier komplexen Funktionen darstellen lassen. Um diese vier Funktionen, die im folgenden als die vier Maxwellschen Halbvektoren bezeichnet werden, in zwangloser Weise einzuführen, empfiehlt es sich, ein spezielles System von Feldvektoren, das einer Schar von monochromatischen Partialwellen mit den Kreisfrequenzen ω_k entspricht, der Untersuchung zugrunde zu legen. Es soll nun zunächst die Bedingung dafür ermittelt werden, daß der Spannungs-Energietensor nur von den *Differenzen* der Schwingungszahlen $\omega_i - \omega_k$ und nicht auch von ihrer Summe $\omega_i + \omega_k$ abhängt. Diese Forderung ist für gewöhnliche Wellenfelder sinnlos. Als Beispiel nehmen wir die Schallwellen. Hier ist, wenn wir uns auf zwei Werte ω_1 und ω_2 beschränken, die Amplitude gegeben durch $a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t$, ihr Quadrat ist also eine lineare Funktion der vier Funktionen $\cos 2\omega_1 t$, $\cos 2\omega_2 t$, $\cos(\omega_1 + \omega_2)t$ und $\cos(\omega_1 - \omega_2)t$. Bei den Maxwellschen Gleichungen läßt sie sich aber durchführen, weil die Energie hier aus zwei Teilen besteht.

Wir wenden uns jetzt dieser Aufgabe zu. Der Energie-Spannungstensor besteht bei dem Maxwellschen Feld aus 16 Komponenten, die vier Reihen bilden. Es genügt aber, wenn unsere Forderung für die

in der vierten Reihe stehenden erfüllt ist, dann ist sie auch automatisch für die übrigen erfüllt. In dieser Reihe stehen die drei Komponenten des Poyntingschen Vektors und die Energiedichte. Beginnen wir mit dem Poyntingschen Vektor, indem wir ihn in Halbvektoren [1]) schreiben.

Es ist:

$$[EH] = [e + e^*,\ h + h^*] = [e\,h] + [e^*\,h^*] + [e^*\,h] + [e\,h^*].$$

Hier würden die beiden ersten Summanden noch von $\omega_i + \omega_k$ abhängen. Sie müssen also verschwinden. Das ist nur möglich, wenn $h = me$ und $h^* = m^*\,e^*$ ist. Den hierdurch noch unbestimmt gebliebenen Proportionalitätsfaktor m bestimmt man durch Einsetzen dieser Werte in die Energiedichte.

Es ist:

$$\begin{aligned}(E^2 + H^2) &= (e + e^*)^2 + (h + h^*)^2 \\ &= e^2\,(m^2 + 1) + e^{*2}\,(m^{*2} + 1) + (e\,e^* + e^*\,e)\,(1 + m\,m^*).\end{aligned}$$

Da hier die beiden ersten Summanden wiederum verschwinden müssen, ergibt sich $m = \pm i$. Es gibt also zwei verschiedene Lösungen unserer Gleichungen [2]), nämlich:

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= i\,e_1, & h_2 &= -i\,e_2, \\ h_1^* &= -i\,e_1^*, & h_2^* &= +i\,e_2^*. \end{aligned}\right\}$$

Hieraus erhält man für die Volvekltoren

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= e_1 + e_1^*, & E_2 &= e_2 + e_2^*, \\ H_1 &= h_1 + h_1^* = i\,(e_1 - e_1^*), & H_2 &= -i\,(e_2 - e_2^*). \end{aligned}\right\} \quad (1_1)\text{ u. }(1_2)$$

---

[1]) Unter der Zerlegung eines Vektors in seine Halbvektoren ist die Zerlegung in seine beiden komplex-konjugierten Teile verstanden. In unserem Falle handelt es sich um ein lineares Aggregat von monochromatischen ebenen Wellen. Es ist also der Vektor $F(x)$ nach folgendem Schema zu zerlegen

$$F(x) = \sum\nolimits^n f_n\, e^{i(\vec{k}_n \vec{x} - \omega_n t)} + \sum\nolimits^n f_n^*\, e^{-i(\vec{k}_n \vec{x} - \omega_n t)} = f + f^*.$$

Die beiden Teile der Zerlegung f und f^* sollen in dieser Arbeit kurz Halbvektoren genannt werden, ihre Summe stellt dann den Vollvektor dar. Diese Halbvektoren sollen stets durch kleine Buchstaben ausgedrückt werden. Der Vollvektor durch den entsprechenden großen Buchstaben. Außerdem soll die Zerlegung so vorgenommen werden, daß ω_n stets positiv ist. Dann ist f ein Halbvektor mit der Zeitabhängigkeit $e^{-i\omega_n t}$ und f^* der zugeordnete mit der Zeitabhängigkeit $e^{i\omega_n t}$. — [2]) Es kann nämlich nicht etwa $h_2 = h_1^*$ usw. sein, da diese beiden Größen nach unserer Festsetzung eine verschiedene Zeitabhängigkeit haben.

Und umgekehrt

$$\left.\begin{aligned} 2\,e_1 &= E_1 - i\,H_1, & 2\,e_2 &= E_2 + i\,H_2, \\ 2\,e_1^* &= E_1 + i\,H_1, & 2\,e_2^* &= E_2 - i\,H_2. \end{aligned}\right\} \quad (1_1) \text{ u. } (1_2)$$

Aus der letzten Gruppe von Gleichungen ergaben sich die Bedingungsgleichungen für die verschiedenen Halbvektoren.

Für die Maxwellschen Vektoren E und H gelten nämlich acht Gleichungen, die man in komplexer Form zu vier zusammenfassen kann. Diese lauten:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}(E - iH) &= -i\frac{\partial(E - iH)}{c\,\partial t}, & \operatorname{rot}(E + iH) &= i\frac{\partial(E + iH)}{c\,\partial t}, \\ \operatorname{div}(E - iH) &= 0, & \operatorname{div}(E + iH) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Setzt man hierfür $E - iH$ und $E + iH$ nach 1 die entsprechenden Halbvektoren, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} e_1 &= -i\frac{\partial e_1}{c\,\partial t}, & \operatorname{rot} e_2 &= +i\frac{\partial e_2}{c\,\partial t}, \\ \operatorname{rot} e_1^* &= +i\frac{\partial e_1^*}{c\,\partial t}, & \operatorname{rot} e_2^* &= -i\frac{\partial e_2^*}{c\,\partial t}. \end{aligned}\right\} \quad (2_1) \text{ u. } (2_2)$$

Damit ist die vorbereitende Betrachtung zu Ende geführt. Alle diese Gleichungen haben aber eine universelle Bedeutung für die Theorie. Es ist deswegen vorteilhaft, für die vier benutzten Halbvektoren durchsichtige Benennungen einzuführen. Wir setzen fest, daß ein Halbvektor, der einer der vier Gleichungen (2_1) und (2_2) genügt, ein *Maxwellscher Halbvektor* genannt werden soll, und zwar sollen e_1 und e_1^* Maxwellsche Halbvektoren *erster Art* genannt werden und durch (MHV 1) und (MHV 1)* abgekürzt werden. Entsprechend sind dann die Benennungen für e_2 und e_2^* (MHV 2) bzw. (MHV 2)*.

Nachweis, daß durch die Theorie den Maxwellschen Gleichungen keine Beschränkungen auferlegt werden.

Es handelt sich hier um den Beweis, daß die Beschränkungen, die den beiden Elementarfeldern durch den vorigen Abschnitt auferlegt sind, vollständig verschwinden, wenn man die beiden Elementarfelder superponiert. Es ist also mit anderen Worten der Beweis zu führen, daß man jede Lösung der Maxwellschen Gleichungen im leeren Raum darstellen kann durch

$$\left.\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = e_1 + e_1^* + e_2 + e_2^*, \\ H &= H_1 + H_2 = i\,(e_1 - e_1^*) - i\,(e_2 - e_2^*). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Der Beweis ist einfach. Wir führen ihn getrennt für lineare Aggregate von Partialwellen und für Wellenpakete.

Es genügt im ersten Falle, den Beweis für *eine* Partialwelle zu führen. Sie möge den Phasenfaktor $\varphi = \vec{k}\vec{x} - \omega t$ besitzen. Dann ist die allgemeinste Form, die die Funktion $E - iH$ haben kann, folgende:

$$E - iH = F_1 e^{i\varphi} + F_2 e^{-i\varphi}.$$

Da $E - iH$ der ersten Gleichung (2) genügen muß, sind nach unseren Festsetzungen am Schluß des vorigen Absatzes und nach Anm. S. 99

$$\left.\begin{aligned} F_1 e^{i\varphi} \quad \ldots \text{(MHV 1)} &= 2 e_1, \\ F_2 e^{-i\varphi} \ldots \text{(MHV 2)}^* &= 2 e_2^*. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dann ist:

$$E + iH = F_1^* e^{-i\varphi} + F_2^* e^{i\varphi} = 2 (e_1^* + e_2).$$

Durch Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} E &= e_1 + e_1^* + e_2 + e_2^*, \\ H &= i (e_1 - e_1^*) - i (e_2 - e_2^*). \end{aligned}$$

Damit ist für den ersten Fall der Beweis erbracht.

Im zweiten Falle ist $E - iH$ ein Wellenpaket

$$E - iH = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int F(k)\, e^{i \vec{k}\vec{x}}\, \mathrm{d}k, \qquad \mathrm{d}k = \mathrm{d}k_1\, \mathrm{d}k_2\, \mathrm{d}k_3.$$

Hier enthält noch $F(k)$ die zeitliche Abhängigkeit. Diese ist doppeldeutig für ein vorgeschriebenes Wertetripel von k, da die Gleichung $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$, die zur Bestimmung von ω dient, quadratisch ist. Es gehört also zu jedem Wertetripel von k die Zeitabhängigkeit $e^{i\omega_k t}$ *und* $e^{-i\omega_k t}$ und zu jeder von diesen beiden Werten ein verschiedenes $F(k)$. Es ist also

$$E - iH = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int F_1(k)\, e^{i(kx - \omega_k t)}\, \mathrm{d}k + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int F_2(k)\, e^{i(kx + \omega_k t)}\, \mathrm{d}k.$$

Das letzte Integral können wir umschreiben

$$\int F_2(k)\, e^{i(kx + \omega_k t)}\, \mathrm{d}k = \int F_2(-k)\, e^{i(-kx + \omega_k t)}\, \mathrm{d}k.$$

Oder

$$E - iH = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int F_1(k)\, e^{i\varphi}\, \mathrm{d}k + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int F_2(-k)\, e^{-i\varphi}\, \mathrm{d}k.$$

Die übrigen Schlußfolgerungen sind wie oben und man erhält wieder die Gleichung (3) mit

$$2e_1 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int F_1(k)\, e^{i\varphi}\,\mathrm{d}k \quad \text{und} \quad 2e_2 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int F_2^*(-k)\, e^{i\varphi}\,\mathrm{d}k\ ^1). \quad (5)$$

Man kann (3) wiederum in Halbvektoren zerlegen und erhält

$$\left.\begin{aligned} E &= e + e^* \quad \text{mit} \quad e = e_1 + e_2, \\ H &= h + h^* \quad \text{mit} \quad h = i(e_1 - e_2) \end{aligned}\right\} \quad (3a)$$

und umgekehrt

$$e_1 = \frac{e - ih}{2}, \qquad e_2 = \frac{e + ih}{2}.$$

Der Zusammenhang zwischen den (MV) und den (MHV 1) bzw. (MHV 2) ist also wechselseitig eindeutig.

Die Berechnung der vier Halbvektoren.

Nach der Anmerkung auf S. 99 hat man, um die Gleichungen (2) zu lösen, für die Halbvektoren e zu setzen:

$$\vec{e}_1 = \sum\nolimits_n \vec{e}_{1n}\, e^{i(k_{1n}x - \omega_{1n}t)},$$

$$\vec{e}_2 = \sum\nolimits_n \vec{e}_{2n}\, e^{i(k_{2n}x - \omega_{2n}t)}$$

und die entsprechenden komplex-konjugierten Werte.

Statt der Wellenvektoren k_{1n} bzw. k_{2n} sollen die die Wellenrichtung bestimmenden Einheitsvektoren α_1, α_2, $\alpha_3 = \vec{\alpha}$ eingeführt werden, diese müßten eigentlich noch mit den Indizes $1n$ bzw. $2n$ versehen werden. Man kann sich aber das lästige Hinschreiben der vielen Indizes in der folgenden Rechnung ersparen, wenn man sich nur vor Augen hält, daß die Größen $\vec{\alpha}$ von Partialwelle zu Partialwelle variieren, so daß jede Partialwelle ihre besonderen $\vec{\alpha}$ besitzt. Entsprechend sollen auch bei den verschiedenen ω die Indizes fortgelassen werden.

Zufolge der Gleichungen (2) sind die e_{1n} und e_{2n} Funktionen der Wellenvektoren k. Um das deutlicher hervortreten zu lassen, soll im folgenden dafür $e_1(k)$ und $e_2(k)$ geschrieben werden.

Die Gleichungen (6) nehmen nach diesen Abmachungen folgende Formen an

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \sum \vec{e}_1(k)\, e^{i\omega\left(\frac{(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)}{c} - t\right)}, \\ \vec{e}_2 &= \sum \vec{e}_2(k)\, e^{i\omega\left(\frac{(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)}{c} - t\right)}. \end{aligned}\right\} \quad (6a)$$

[1]) Dazu kommen noch die beiden komplex-konjugierten, die von nun ab nicht mehr hingeschrieben werden sollen.

Durch Einsetzen von (6a) in die Gleichungen (2) erhält man für jede Partialwelle ein System von drei gewöhnlichen linearen Gleichungen, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_1'(k) &= i\left[\vec{e}_1(k)\,\vec{\alpha}\right], \\ \vec{e}_2'(k) &= -i\left[\vec{e}_2(k)\,\vec{\alpha}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Um diese Gleichungen in übersichtlicher Weise zu lösen, führt man noch zwei weitere Einheitsvektoren $\vec{\beta}$ und $\vec{\gamma}$ ein, die so beschaffen sind, daß sie sowohl aufeinander als auch auf den $\vec{\alpha}$ senkrecht stehen und so gewählt sind, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = +1.$$

Man erhält unter Benutzung dieser β und γ folgende Lösungen der Gleichungen (7)

$$2\,e_1(k) = A_{1k}(\beta - i\gamma), \quad 2\,e_2(k) = A_{2k}(\beta + i\gamma). \tag{8}$$

Hier sind die A_{1k} und A_{2k} von den Raum- und Zeitvariablen unabhängige Größen, die aber im allgemeinen noch von den Einheitsvektoren abhängen. Der Beweis für (8) ergibt sich einfach durch Einsetzen in (7) unter Benutzung des Satzes, daß jedes Element der erwähnten Determinante gleich der entsprechenden Unterdeterminante ist.

Nicht ganz so einfach ist es zu beweisen, daß sich jede Lösung von (7) in der Form (8) darstellen läßt. Zu diesem Zweck müßte man die Gleichungen (7) direkt lösen. Es sind das drei homogene Gleichungen mit verschwindender Determinante. Ihre Lösungen sind also proportional eine Reihe von Unterdeterminanten. Diese Unterdeterminanten sind aber quadratische Funktionen der α, die sich mit Hilfe der Orthogonalitätsbeziehungen in zwei Faktoren zerlegen lassen. Man erhält auf diese Weise die Gleichungen (8).

Außer den $e(k)$ benötigt man für das Folgende noch die $e(-k)$. Man erhält aus (7) in gleicher Weise

$$2\,e_1(-k) = B_{1k}(\beta + i\gamma), \quad 2\,e_2(-k) = B_{2k}(\beta - i\gamma). \tag{8a}$$

Aus (8) und (8a) ergeben sich folgende Gleichungen

$$e_{1x}^2(k) + e_{1y}^2(k) + e_{1z}^2(k) = e_{2x}^2(k) + e_{2y}^2(k) + e_{2z}^2(k) = 0, \tag{9a}$$

$$e_{1x}(k)\,e_{2x}(-k) + e_{1y}(k)\,e_{2y}(-k) + e_{1z}(k)\,e_{2z}(-k) = 0. \tag{9b}$$

Damit sind die vier Halbvektoren vollständig berechnet.

Zum Schluß zeigt sich, daß die Zerlegung des Maxwellschen Feldes in die beiden Elementarfelder einen einfachen anschaulichen Sinn besitzt. Nach den ersten Ausführungen dieser Arbeit sind nämlich die Energiedichten der beiden Partialwellen $2\,e_1^*\,(k)\,e_1\,(k)$ bzw. $2\,e_2^*\,(k)\,e_2\,(k)$. Es ist also nach (7)

$$2\,e_1^*\,(k)\,e_1\,(k) = A_{1k}^*\,A_{1k},$$
$$2\,e_2^*\,(k)\,e_2\,(k) = A_{2k}^*\,A_{2k}.$$

Die Energiedichte ist also in beiden Fällen orts- und zeitunabhängig. Die beiden Partialwellen sind also zirkularpolarisierte Wellen von entgegengesetztem Drehungssinn. Im allgemeinen werden die Größen A noch von der Fortpflanzungsrichtung der Wellen abhängen, wie das z. B. bei dem Photonenfeld eines Hertzschen Dipols der Fall ist.

Quantelung des Wellenfeldes.

Die Quantelung des Wellenfeldes ergibt sich auf die einfachste und natürlichste Weise, ohne die berüchtigten Schwierigkeiten, wenn man sie zunächst an den beiden Elementarfeldern vollzieht und daraus erst die anderen Zerlegungsmöglichkeiten berechnet. Zunächst soll der Beweis geführt werden, daß sich die Gesamtenergie des Strahlungsfeldes additiv aus den Energien der beiden Elementarfelder zusammensetzt.

Es ist also zu berechnen

$$\mathsf{H} = \int_V \frac{E^2 + H^2}{2}\,\mathrm{d}x^{(3)}, \qquad \mathrm{d}x^{(3)} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Setzt man für E und H die Werte (3) ein, so erhält man

$$\mathsf{H} = \int_V (2\,e_1^*\,e_1 + 2\,e_2^*\,e_2 + 2\,e_1\,e_2 + 2\,e_1^*\,e_2^*)\,\mathrm{d}x^{(3)}.$$

Die beiden ersten Glieder stellen die Teilenergien der Elementarfelder dar. Von den beiden letzten muß also gezeigt werden, daß sie im Mittel verschwinden. Der Beweis ist für eine Summe von Partialwellen und für Wellenpakete zu führen.

Im ersten Falle enthalten die Produkte der beiden Halbvektoren die Raumabhängigkeit

$$e^{i\,(k_{in}+k_{im})\,x_i}, \qquad e^{-i\,(k_{in}+k_{im})\,x_i}.$$

Bei der Integration über das Volumen V entschwinden also diese Glieder. Ausgenommen ist nur der Fall, daß $k_{in} = -\,k_{im}$. Unter diesen Bedingungen ist aber der Integrand nach (9b) schon selbst gleich Null.

Im zweiten Falle sind die e Größen die in (5) angeführten Fourierintegrale

$$2e_1 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int F_1(k)\, e^{i\varphi}\, \mathrm{d}k^{(3)}, \quad 2e_2 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int F_2^*(-k)\, e^{i\varphi}\, \mathrm{d}k^{(3)}$$

mit den dazugehörigen Umkehrformeln

$$F_1(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int 2e_1\, e^{-i\varphi}\, \mathrm{d}x^{(3)}, \quad F_2^*(-k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int 2e_2 e^{-i\varphi}\, \mathrm{d}x^{(3)}$$

Diese Werte sind in H einzuführen. Es ist z. B.

$$\int 2e_1^* e_1\, \mathrm{d}x^{(3)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V e_1^* F_1(k)\, e^{i\varphi}\, \mathrm{d}x^{(3)}\, \mathrm{d}k^{(3)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_1^*(k) F_1(k)}{2}\, \mathrm{d}k^{(3)},$$

$$\int 2e_2^* e_2\, \mathrm{d}x^{(3)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_2^*(-k) F_2(-k)}{2}\, \mathrm{d}k^{(3)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_2^*(k) F_2(k)}{2}\, \mathrm{d}k^{(3)}.$$

Die Umformung der beiden letzten Glieder enthält im Integranden $\sum F_1(k) F_2^*(k)$ bzw. $\sum F_1^*(k) F_2(k)$. Diese Summen sind nach (9b) wieder gleich Null. Damit ist der erste Teil der Überlegung beendet. Zusammenfassend erhält man für die zu quantelnden Energien die Formen

$$\mathsf{H} = \int_V (2e_1^* e_1 + 2e_2^* e_2)\, \mathrm{d}x^{(3)}, \tag{10}$$

$$\mathsf{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_1^*(k) F_1(k) + F_2^*(k) F_2(k)}{2}\, \mathrm{d}k^{(3)}. \tag{11}$$

Damit ist die Quantelung vorbereitet.

Bei der Berechnung der Feldvektoren sind die Amplituden derselben unbestimmt geblieben. Diese ergeben sich in eindeutiger Weise aus der Quantelung des Feldes in folgender Weise.

Man geht aus von den aus den Definitionen der Halbvektoren e_1 und e_1^* für eine Partialwelle folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial 2e_1}{\partial t} &= \frac{\partial (E_1 - iH_1)}{\partial t} = -i\omega (E_1 - iH_1), \\ \frac{\partial 2e_1^*}{\partial t} &= \frac{\partial (E_1 + iH_1)}{\partial t} = +i\omega (E_1 + iH_1). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Durch Addition und Subtraktion erfolgt hieraus

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = -\omega H_1, \quad \frac{\partial H_1}{\partial t} = +\omega E_1. \tag{13}$$

Das bedeutet, daß E_1 und H_1 dieselbe Rolle spielen wie die Koordinate q und der Impuls p eines Heisenbergschen Oszillators oder auch umgekehrt. Beide Vektoren, sowie jedes lineare Aggregat von ihnen, sind also eine lineare Funktion von q und p. Um welche es sich hierbei nur handeln kann, geht aus den Gleichungen (12) hervor. Aus diesen folgt, daß $E_1 - iH_1$ und $E_1 + iH_1$ proportional den nicht hermitischen Matrizen b bzw. $\tilde{b}$ sein müssen, in denen ja nur eine Schrägreihe nicht aus Nullen besteht. Es sind das sozusagen halbierte Matrizen, die genau den Halbvektoren dieser Theorie entsprechen. Für das zweite Elementarfeld gelten analoge Überlegungen. Unter Berücksichtigung der früheren Berechnungen der Größen e ergibt sich folgendes:

$$\left.\begin{aligned} E_1 + iH_1 &= C\tilde{b}_1\,(\beta + i\gamma)\,e^{-i\varphi},\\ E_1 - iH_1 &= Cb_1\,(\beta - i\gamma)\,e^{i\varphi},\\ E_2 + iH_2 &= Cb_2\,(\beta + i\gamma)\,e^{i\varphi},\\ E_2 - iH_2 &= C\tilde{b}_2\,(\beta - i\gamma)\,e^{-i\varphi}, \end{aligned}\right\} \qquad \varphi = \omega\left(\frac{\alpha_i\, x_i}{c} - t\right). \tag{14}$$

Der gemeinsame Faktor C ergibt sich aus H. Es ist: $C = \sqrt{\hbar\omega/V}$

Für eine Schar von Wellen ergibt sich ohne weiteres

$$\left.\begin{aligned} E_1 - iH_1 &= \sum\nolimits_n \sqrt{\frac{\hbar\,\omega_{1n}}{V}}\, b_{1n}\,(\beta_{1n} - i\gamma_{1n})\,e^{-i\varphi_{1n}} \text{ usw.}\\ \text{mit}\quad \mathsf{H}_1 &= \sum \hbar\,\omega_{1n}\,(\tilde{b}_{1n}\,b_{1n}),\\ E_2 - iH_2 &= \sum\nolimits_n \sqrt{\frac{\hbar\,\omega_{2n}}{V}}\, \tilde{b}_{2n}\,(\beta_{2n} - i\gamma_{2n})\,e^{+i\varphi_{2n}} \text{ usw.}\\ \text{mit}\quad \mathsf{H}_2 &= \sum \hbar\,\omega_{2n}\,(\tilde{b}_{2n}\,b_{2n}). \end{aligned}\right\} \tag{14a}$$

Für die Matrizen gelten folgende Vertauschungsrelationen

$$[\tilde{b}_{\lambda_1 m}\,b_{\lambda_2 n}] = -\,\delta(\lambda_1\,\lambda_2)\,\delta(m\,n);\quad [b_{\lambda_1 m}\,b_{\lambda_2 n}] = [\tilde{b}_{\lambda_1 m}\,\tilde{b}_{\lambda_2 n}] = 0. \tag{15}$$

Mit Hilfe der Werte von H_1 und H_2 in (14a) können nun zufolge der Vertauschungsrelationen (15) die Gleichungen (12) so geschrieben werden, daß sie für eine *Wellenschar* gelten. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_1 \pm i H_1}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar}\,[\mathsf{H}_1\,(E_1 \pm iH_1)],\\ \frac{\partial E_2 \pm i H_2}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar}\,[\mathsf{H}_2\,(E_2 \pm iH_2)]. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Diese lassen sich weiter so zusammenfassen, daß sie nur die Gesamtvektoren $E = E_1 + E_2$, $H = H_1 + H_2$ und die Gesamtenergie $\mathsf{H} = \mathsf{H}_1 + \mathsf{H}_2$ enthalten

$$\frac{\partial\,(E \pm iH)}{c\,\partial t} = \frac{i}{c\hbar}\,[\mathsf{H}\,(E \pm iH)] = \mp\, i\,\mathrm{rot}\,(E \pm iH). \tag{17}$$

Aus diesen ergeben sich durch Addition und Subtraktion dann schließlich die gequantelten Maxwellschen Gleichungen in ihrer definitiven Form

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial E}{c\,\partial t} = \dfrac{i}{c\hbar}[\mathsf{H}, E] = \operatorname{rot} H, \\ \dfrac{\partial H}{c\,\partial t} = \dfrac{i}{c\hbar}[\mathsf{H}, H] = -\operatorname{rot} E. \\ \quad\downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\ \quad A \qquad\quad B \qquad\qquad C \end{array}\right\} \tag{18}$$

Mit (18) ist die vorliegende Theorie zum Abschluß gebracht. Wie man sieht, besteht das gequantelte System aus Doppelgleichungen von der Form $A = B = C$. Hier sind $A = B$ Integralgleichungen infolge des Auftretens des Energieintegrals H. Sie stellen das quantenmechanische Bewegungsgesetz dar. Dagegen sind $A = C$ Differentialgleichungen, die das Maxwellsche Bewegungsgesetz bedeuten.

Man könnte (18) als Ausgangspunkt für die ganze Theorie nehmen und daraus rückwärts alle Einzelgleichungen der Theorie ableiten. Diese Ableitung soll in Kürze wenigstens angedeutet werden.

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall $A = 0$. Es bedeutet das, daß nur zeitunabhängige Felder vorhanden sind. Dann folgt aus $B = 0$, daß sämtliche Größen miteinander vertauschbar sind, und es bleiben nur die Gleichungen $C = 0$ übrig, die die Konstante $\hbar$ nicht enthalten. Daraus folgt, daß stationäre Felder sich nicht quanteln lassen.

In den anderen Fällen muß man zur Lösung zunächst das Integral über die Energiedichte W ermitteln. Die Formeln für die Energiedichte W und den Dichtestrom S sind nun nicht vorgegeben, sondern müssen wie im klassischen Fall aus den Gleichungen (17) ermittelt werden. Dies geschieht dadurch, daß man die beiden Gruppen von (17) in geeigneter Weise mit $E - iH$ bzw. $E + iH$ multipliziert und addiert. In unserer Theorie ist nun dieses Verfahren infolge der Nichtvertauschbarkeit der Vektoren doppeldeutig, da man die Wahl hat, ob man diese Multiplikatoren rechts oder links hinzufügen will. Daraus ergeben sich folgende beiden Formen der Kontinuitätsgleichungen

$$\frac{\partial (E \mp iH)(E \pm iH)}{\partial t} = \pm \operatorname{div} ic[(E \mp iH)(E \pm iH)]. \tag{19)-(20}$$

Es gibt also zwei verschiedene Formen für W und S, dementsprechend auch zwei verschiedene Lösungen von (17). Unterscheidet man diese durch die Indizes 1 und 2, so hat man also

$$\mathsf{H}_1 = \int \frac{(E_1 + iH_1)(E_1 - iH_1)}{2}\,\mathrm{d}\,x^{(3)}, \tag{21}$$

$$\mathsf{H}_2 = \int \frac{(E_2 - iH_2)(E_2 + iH_2)}{2}\,\mathrm{d}\,x^{(3)}. \tag{22}$$

Die Fortsetzung des Beweises ergibt sich aus den Gleichungen $A = C$ und den aus diesen auf S. 98 bis 104 gefolgerten allgemeinen Eigenschaften der Maxwellschen Gleichungen. Insbesondere handelt es sich dabei um die Gleichungen (3), (10) und (11), die einen wesentlichen Teil der Theorie bilden. Es erübrigt sich, auf diesen Teil noch einmal einzugehen.

Vergleich mit älteren Theorien.

Zum Schluß sollen nun die Resultate dieser Methode mit den älteren verglichen werden. Da scheint es auf den ersten Blick, als ob die Vertauschungsrelationen nicht mit den anerkannten, die von Jordan und Pauli und später von Heisenberg gefunden sind, übereinstimmen [1]). Das ist aber doch der Fall, wenn man bedenkt, daß die Formeln dieser Herren sich auf die Gesamtvektoren beziehen, die andere Vertauschungsbedingungen haben als die der Elementarfelder. Diese sind nach (14)

$$[(E_1 + iH_1)(E_1 - iH_1)] = [(E_2 - iH_2)(E_2 + iH_2)] = -\frac{\hbar\omega}{V}(\beta^2 + \gamma^2),$$

oder ausmultipliziert

$$[H_1 E_1] = -[H_2 E_2] = i\frac{\hbar\omega}{2V}(\beta^2 + \gamma^2). \tag{23}$$

Es gilt also für die Gesamtvektoren

$$[(H_1 + H_2)(E_1 + E_2)] = 0\ ^2). \tag{24}$$

Damit ist für diesen Spezialfall die Übereinstimmung mit der älteren Theorie erwiesen. Um nun den Beweis dieser Identität für die übrigen Vertauschungsrelationen zu erbringen, genügt es zu zeigen, daß (14) mit dem Jordan-Paulischen Ausdruck übereinstimmt, wenn man zu den Vollvektoren übergeht. Man setze:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{2}\,b_{(1)} &= b^{(1)} + ib^{(2)}, \quad \sqrt{2}\,b_{(2)} = b^{(1)} - ib^{(2)}, \\ \sqrt{2}\,\tilde{b}_{(1)} &= \tilde{b}^{(1)} - i\tilde{b}^{(2)}, \quad \sqrt{2}\,\tilde{b}_{(2)} = \tilde{b}^{(1)} + i\tilde{b}^{(2)}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Der Faktor $\sqrt{2}$ ist hinzugefügt, damit die Vertauschungsrelationen für die $b^{(\lambda)}$ dieselben sind wie für $b_{(\lambda)}$; außerdem gilt

$$\tilde{b}_{(1)}\, b_{(1)} + \tilde{b}_{(2)}\, b_{(2)} = \tilde{b}^{(1)}\, b^{(1)} + \tilde{b}^{(2)}\, b^{(2)}. \tag{26}$$

Dieser Ausdruck stellt die Photonenzahl dar.

---

[1]) Vgl. hierzu P. Jordan u. W. Pauli, ZS. f. Phys. 48, 151, 1928 und W. Heisenberg u. W. Pauli, ebenda 56, 1, 1929. — [2]) Es ist wohl nicht zu befürchten, daß das Vertauschungssymbol [ ] mit dem Poyntingschen Vektor verwechselt wird.

Durch (25) geht (14) in folgende Gleichungen über für die Vollvektoren $E = E_1 + E_2$ und $H = H_1 + H_2$

$$E \pm iH = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2V}}(\beta \pm i\gamma)\,[(b^{(1)}e^{i\varphi} + \tilde{b}^{(1)}e^{-i\varphi}) \mp \mp i\,(b^{(2)}e^{i\varphi} + \tilde{b}^{(2)}e^{-i\varphi})]. \quad (27)$$

Das ist, von einer unwesentlichen Abänderung der Bezeichnung abgesehen, der Jordan-Paulische Ausdruck. Der Unterschied zwischen (27) und (14) ist folgender. In (14) ist das Gesamtfeld in zwei zirkular polarisierte Wellen zerlegt, in (27) dagegen in zwei linear polarisierte Wellen.

Trennt man nun analog wie in (14) diese Gesamtvektoren in zwei Teile, von denen der eine die Matrizen $b^{(1)}$, der andere die Matrizen $b^{(2)}$ enthält, so hat man die beiden linear polarisierten Wellen in komplexer Zusammenfassung. Es ist zum Beispiel die erste Welle durch folgende Formel dargestellt

$$E^{(1)} \pm iH^{(1)} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2V}}(\beta \pm i\gamma)\,(b^{(1)}e^{i\varphi} + \tilde{b}^{(1)}e^{-i\varphi}). \quad (28)$$

Damit ist gezeigt, daß die Vertauschungsregel unserer Theorie sich von den früheren nicht unterscheiden.

Der eigentliche Unterschied tritt erst dort hervor, wo die ältere Theorie sich genötigt sah, den Operator $1/\sqrt{-\Delta}$ einzuführen. Wir stellen die in dem unten erwähnten Referat vorhandenen Schlußformeln [1]) unserem System (20) gegenüber:

$$\left.\begin{aligned} E &= e^* + e, \\ H &= \frac{1}{i\sqrt{-\Delta}}(\operatorname{rot} e - \operatorname{rot} e^*), \\ \mathsf{H} &= \frac{1}{2}\int\left\{E^2 + H^2 + i\left[E, \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{rot} H\right]\right\} \mathrm{d}\,x^{(3)}. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Der Operator $1/\sqrt{-\Delta}$ ist in seiner Wirkung auf die Raumkoordinaten in dem erwähnten Referat durch die Gleichungen (147) bis (150) definiert. Sie sind sehr abstrakt und künstlich. Wir brauchen bei unserem Vergleich nur die einfachen Beziehungen (154), die sein Verhalten in bezug auf die Zeitkoordinate beschreiben.

$$\frac{\partial e^*}{\partial t} = ic\sqrt{-\Delta}\,e^*, \quad \frac{\partial e}{\partial t} = -ic\sqrt{-\Delta}\,e. \quad (30)$$

[1]) Vgl. hierzu das Referat von W. Pauli im Handb. d. Phys., 2. Aufl., Bd. XXIV/I, S. 247–256.

Der Vorteil unserer Theorie besteht nun darin, daß nur die beiden Elementarfelder zu quanteln sind. Bei diesen gehen die Gleichungen (29) und (30), da man mit Hilfe unserer Gleichungen (2) die Rotoren beseitigen kann, in folgende einfachere über. Es ist für das erste Elementarfeld wie oben

$$E_1 = e_1 + e_1^*,$$
$$H_1 = i\,(e_1 - e_1^*),$$
$$\mathsf{H}_1 = \tfrac{1}{2}\int \{E_1^2 + H_1^2 + i\,(H_1 E_1 - E_1 H_1)\}\,\mathrm{d}x$$
$$= \tfrac{1}{2}\int (E_1 + i H_1)\,(E_1 - i H_1)\,\mathrm{d}x = \int 2\,e_1^* e_1\,\mathrm{d}x.$$

Für das zweite gelten die entsprechenden Werte mit $-i$ statt $+i$. Der Operator $1/\sqrt{-\Delta}$ verschwindet also automatisch für die beiden Elementarfelder und damit auch die hartnäckigen Schwierigkeiten, zu denen er führt. Man vergleiche die Kritik auf S. 256. Der eigentliche Grund dieser Vereinfachung ist folgender. Die Vektoren der Elementarfelder sind nicht miteinander vertauschbar. Es ist also $H_1 E_1 - E_1 H_1$ und $H_2 E_2 - E_2 H_2$ im Gegensatz zu $HE - EH$ nicht gleich Null vergleiche dazu die Gleichungen (24)]. Man kann deswegen in H_1 und H_2 die Nullenergie einfach dadurch beseitigen, daß man statt $e^* e + e e^*$ den Wert $2\,e^* e$ setzt. Die Einführung des Operators ist also überflüssig. An Stelle von (30) tritt in der neuen Theorie der integrale Teil der Doppelgleichungen (18).

Aber auch abgesehen von dem Operator kann (29) keine endgültige Lösung darstellen, und zwar aus zwei Gründen.

1. Die Gleichungen (29) enthalten überhaupt nicht die Naturkonstante h. Das ist aber gerade so, wie wenn die Maxwellschen Gleichungen die Konstante c nicht enthielten. 2. Wie oben ausgeführt, ist die Lösung (29) nicht dadurch in Matrizenform festzulegen, daß man die Vektoren fett druckt, da (bei zeitlich unabhängigen Feldern) auch ungequantelte Lösungen vorhanden sind.

II.

Beitrag zur Neutrinotheorie der Herren Jordan und Kronig.

In der alten elektromagnetischen Lichttheorie sind die beiden Feldvektoren als Grundtatsachen anzusehen, deren Existenz man einfach als gegeben hinzunehmen hat. Der Fortschritt der Neutrinotheorie besteht nun darin, daß man diese Feldvektoren als quadratische Funktionen auffaßt, die aus vier fundamen-

talen Größen, den vier Neutrinomatrizen, gebildet sind. Diese ergeben sich einfach daraus, daß man die beiden Grundgleichungen (1) $h_1 = i e_1; h_2 = -i e_2$ noch einmal vermittels einer anderen Methode als im ersten Abschnitt in invarianter Weise löst. Es zeigt sich dann, daß die Neutrinotheorie des Lichtes in der Gestalt, wie wir sie Herrn Kronig und Jordan verdanken, eine direkte mathematische Folge der im ersten Teil beschriebenen Quantelung der freien Strahlung ist.

Die beiden Grundgleichungen $h_1 = i e_1$; $h_2 = -i e_2$ sind in dem ersten Teil schon vollkommen gelöst. Es zeigt sich aber, daß man dieser Lösung eine neue eigenartige Form geben kann, wenn man sie in analoger Weise wie in der klassischen Elektrodynamik durch Einführung der Vektorpotentiale umschreibt. Bevor das geschieht, sollen die beiden Gleichungen der Elementarfelder, die sich, wie auch die weiteren Gleichungen in diesem Abschnitt, nur durch das doppelte Vorzeichen des explizit auftretenden i unterscheiden, durch einen zusammenfassenden Index (λ) vereinheitlicht werden. Sie lauten dann:

$$h^{(\lambda)} = \pm i e^{(\lambda)}. \tag{1}$$

Hier ist für (λ) der Wert 1 oder 2 zu schreiben. Im ersten Falle sollen stets die obenstehenden, im zweiten Falle die untenstehenden Vorzeichen genommen werden. Außerdem ist $h^{(1)} = h_1$ und so weiter.

Die Halbkomponenten des Viererpotentials $a_x a_y a_z i\varphi$ seien zusammenfassend mit n_i bezeichnet. Dann gelten folgende Gleichungen:

$$i e_x^{(\lambda)} = \frac{\partial n_1^{(\lambda)}}{\partial l} - \frac{\partial n_4^{(\lambda)}}{\partial x}, \qquad h_x^{(\lambda)} = \frac{\partial n_3^{(\lambda)}}{\partial y} - \frac{\partial n_2^{(\lambda)}}{\partial z} \text{ usw.} \tag{2}$$

Setzt man diese Werte in die Maxwellschen Gleichungen ein, so sind diese erfüllt, wenn folgende fünf Beziehungen gelten:

$$\frac{\partial^2 n_i^{(\lambda)}}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 n_i^{(\lambda)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n_i^{(\lambda)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 n_i^{(\lambda)}}{\partial l^2} = \Box\, n_i^{(\lambda)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{3}$$

$$\frac{\partial n_1^{(\lambda)}}{\partial x} + \frac{\partial n_2^{(\lambda)}}{\partial y} + \frac{\partial n_3^{(\lambda)}}{\partial z} + \frac{\partial n_4^{(\lambda)}}{\partial l} = \operatorname{Div} n^{(\lambda)} = 0. \tag{4}$$

Setzt man aber (2) in (1) ein und nimmt dazu (4), dann erhält man, den beiden Werten von λ entsprechend, zwei Systeme von je vier linearen Differentialgleichungen. Diese beiden Systeme sind ein vollständiger Ersatz für die Maxwellschen Gleichungen, da sich aus ihnen durch Elimination die Gleichungen $\Box\, n_i^{(\lambda)} = 0$ ergeben.

Der Beweis ergibt sich daraus, daß diese beiden Systeme Diracsche Gleichungen von besonderer Form [1]) sind. Um das zu erkennen, müssen zwei Paare von je drei Matrizen eingeführt werden, $\alpha_i^{(1)}$ und $\alpha_i^{(2)}$:

$$\alpha_1^{(\lambda)} = \begin{array}{c|cccc} & n_1^{(\lambda)} & n_2^{(\lambda)} & n_3^{(\lambda)} & n_4^{(\lambda)} \\ \hline n_1^{(\lambda)} & 0 & 0 & 0 & +i \\ n_2^{(\lambda)} & 0 & 0 & \mp i & 0 \\ n_3^{(\lambda)} & 0 & \pm i & 0 & 0 \\ n_4^{(\lambda)} & -i & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \alpha_2^{(\lambda)} = \begin{array}{c|cccc} & n_1^{(\lambda)} & n_2^{(\lambda)} & n_3^{(\lambda)} & n_4^{(\lambda)} \\ \hline n_1^{(\lambda)} & 0 & 0 & \pm i & 0 \\ n_2^{(\lambda)} & 0 & 0 & 0 & +i \\ n_3^{(\lambda)} & \mp i & 0 & 0 & 0 \\ n_4^{(\lambda)} & 0 & -i & 0 & 0 \end{array}$$

$$\alpha_3^{(\lambda)} = \begin{array}{c|cccc} & n_1^{(\lambda)} & n_2^{(\lambda)} & n_3^{(\lambda)} & n_4^{(\lambda)} \\ \hline n_1^{(\lambda)} & 0 & \mp i & 0 & 0 \\ n_2^{(\lambda)} & \pm i & 0 & 0 & 0 \\ n_3^{(\lambda)} & 0 & 0 & 0 & +i \\ n_4^{(\lambda)} & 0 & 0 & -i & 0 \end{array} \tag{5}$$

Hier bedeutet (λ) wieder denselben zusammenfassenden Index wie oben.

Wie man sieht, sind die Matrizen $\alpha_i^{(\lambda)}$ hermitisch mit folgenden Vertauschungsrelationen

$$(\alpha_i^{(\lambda)})^2 = 1, \qquad \begin{aligned} \alpha_2^{(\lambda)}\alpha_3^{(\lambda)} &= -\alpha_3^{(\lambda)}\alpha_2^{(\lambda)} = \pm i\alpha_1^{(\lambda)}, \\ \alpha_3^{(\lambda)}\alpha_1^{(\lambda)} &= -\alpha_1^{(\lambda)}\alpha_3^{(\lambda)} = \pm i\alpha_2^{(\lambda)}, \\ \alpha_1^{(\lambda)}\alpha_2^{(\lambda)} &= -\alpha_2^{(\lambda)}\alpha_1^{(\lambda)} = \pm i\alpha_3^{(\lambda)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Unter Verwendung dieser Matrizen lassen sich dann die beiden Systeme von Diracschen Gleichungen in folgender Weise zusammenfassen:

$$\frac{\partial n^{(\lambda)}}{c\,\partial t} + \alpha_i^{(\lambda)} \frac{\partial n^{(\lambda)}}{\partial x_i} = 0, \quad x_i = x, y, z. \tag{7a), (7b)}$$

Damit ist die weitere Behandlung von (7) an die bekannten Eigenschaften der Diracschen Gleichungen angeschlossen. Zunächst ergibt sich $\Box\, n_i^{(\lambda)} = 0$.

Weiter ergibt sich aber, daß das System (7) sich nicht nur, wie nach der Ableitung oben scheinen könnte, durch *Halbvektoren* n_i auf-

[1]) Mit solchen Gleichungen hat sich erstmalig Lanczos beschäftigt. Er hat ihnen mit Hilfe der Quaternionenrechnung eine sehr elegante Form gegeben. Der Verfasser zieht es aber vor, diese Gleichungen auch in Diracscher Form zu schreiben, um dem Leser das Einarbeiten in die Lanczossche Theorie zu ersparen.

gelöst werden kann, sondern eine zweite invariante Lösung, nämlich durch *Spinoren*, besitzen muß. In diesem Falle treten statt der früheren invarianten Bildungen neue auf. Solche sind der Dichtestrom und der Spinvektor.

Der erste hat die Form:

$$\varrho^{(\lambda)} = n^{*(\lambda)} n^{(\lambda)}, \quad s_m^{(\lambda)} = c n^{*(\lambda)} \alpha_m^{(\lambda)} n^{(\lambda)}. \tag{8}$$

Der zweite ist:

$$n^{*(\lambda)} \sigma_{kl}^{(\lambda)} n^{(\lambda)}, \quad \sigma_{kl}^{(\lambda)} = -\frac{hi}{2 \times 2\pi} \alpha_k^{(\lambda)} \alpha_l^{(\lambda)}. \tag{9}$$

Wie man aus (6) erkennt, ist der Spinvektor entweder parallel oder antiparallel dem Dichtestrom.

Dagegen gehen andere invariante Bildungen, wie namentlich (2) verloren. Es fragt sich nun, durch welche Formeln sich an Stelle von (2) die Feldvektoren ergeben. Um diese Frage zu beantworten, ist es nötig, die Gleichungen (7) wirklich zu lösen.

Lösungen der Gleichungen (7) für den Fall, daß es sich um eine Schar von Wellen mit der gleichen Fortpflanzungsrichtung handelt.

Man multipliziere jede gerade Gleichung (7a) mit i und addiere sie zu der darüberstehenden Gleichung. Dann erhält man zwei neue Gleichungen, die nur noch zwei unbekannte Größen enthalten, nämlich die Funktionen $n_1^{(1)} + i n_2^{(1)}$ und $n_3^{(1)} + i n_4^{(1)}$. In entsprechender Weise erhält man durch Multiplikation mit $-i$ zwei weitere Gleichungen, die nur $n_1^{(1)} - i n_2^{(1)}$ und $n_3^{(1)} - i n_4^{(1)}$ enthalten. Dann läßt sich das System ohne weiteres direkt lösen und man erhält:

$$\left.\begin{aligned} n_1^{(1)} + i n_2^{(1)} &= A_1 \psi_4, & n_3^{(1)} + i n_4^{(1)} &= A_1 \psi_3, \\ n_1^{(1)} - i n_2^{(1)} &= -A_2 \psi_3, & n_3^{(1)} - i n_4^{(1)} &= A_2 \psi_4. \end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

Hier enthalten die Koeffizienten A noch die raumzeitliche Abhängigkeit $\left(\frac{x_i \alpha_i}{c} - t\right)$ in exponentieller Form, während die ψ die aus der Spinorenrechnung bekannten Funktionen sind.

$$\psi_3 = i e^{i\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2}\right)} \sin\frac{\vartheta}{2}, \qquad \psi_4 = e^{-i\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\psi}{2}\right)} \cos\frac{\vartheta}{2}. \tag{11}$$

In der gleichen Weise kann man das System (7b) behandeln. Man kann sich aber die Arbeit ersparen, wenn man bedenkt, daß (7b) die Form von (7a) annimmt, wenn man zur komplex-konjugierten Schreib-

weise übergeht und außerdem $n_4^{*(2)}$ das entgegengesetzte Vorzeichen gibt. Man erhält dann ohne weiteres

$$\left.\begin{aligned} n_1^{*(2)} + i n_2^{*(2)} &= B_1 \psi_4, & n_3^{*(2)} - i n_4^{*(2)} &= B_1 \psi_3, \\ n_1^{*(2)} - i n_2^{*(2)} &= -B_2 \psi_3, & n_3^{*(2)} + i n_4^{*(2)} &= B_2 \psi_4. \end{aligned}\right\} \quad (10\,b)$$

Damit sind die Gleichungen (7) gelöst.

Diskussion der Lösungen.

Man hat zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Matrizen A und B sind alle miteinander vertauschbar. In diesem Fall kann man $n_4^{(1)} = 0$ setzen. Dann ergibt sich z. B. bei (7a) sofort $A_1 = Q_1 \psi_4$, $A_2 = Q_1 \psi_3$ und man erhält durch Auflösen von (7a)

$$\left.\begin{aligned} 2 n_1^{(1)} &= \quad Q_1 (\psi_4^2 - \psi_3^2) = Q_1 (\beta_1 - i \gamma_1), \\ 2 n_2^{(1)} &= -i Q_1 (\psi_4^2 + \psi_3^2) = Q_1 (\beta_2 - i \gamma_2), \\ 2 n_3^{(1)} &= \quad 2 Q_1 \psi_4 \psi_3 \quad\quad = Q_1 (\beta_3 - i \gamma_3). \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Nach (2) sind unter dieser Bedingung $\left(i e_1 = h_1 = \frac{\partial n^{(1)}}{\partial l}\right)$ die Vektoren den Größen $n^{(i)}$ proportional. Man kommt also wieder auf die Gleichungen des ersten Teils zurück.

2. Die Matrizen A und B sind *nicht* alle vertauschbar. Dieser Fall führt zu den eigentlichen Neutrinogleichungen, wie man sehen wird. Als Vorbereitung sollen zunächst diejenigen aus den $n_i^{(1)}$ gebildeten Komplexionen ermittelt werden, die vertauschbar sind. Für (7a) ist offenbar vertauschbar $n_1^{(1)} + i n_2^{(1)}$ mit $n_3^{(1)} + i n_4^{(1)}$, sowie $n_1^{(1)} - i n_2^{(1)}$ mit $n_3^{(1)} - i n_4^{(1)}$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} (n_1^{(1)} + i n_2^{(1)})\,(n_1^{(1)} - i n_2^{(1)}) &= -(n_3^{(1)} + i n_4^{(1)})\,(n_3^{(1)} - i n_4^{(1)}) \\ &= -A_1 A_2 \psi_3 \psi_4. \end{aligned}$$

Und ebenso

$$\begin{aligned} (n_1^{(1)} - i n_2^{(1)})\,(n_1^{(1)} + i n_2^{(1)}) &= -(n_3^{(1)} - i n_4^{(1)})\,(n_3^{(1)} + i n_4^{(1)}) \\ &= -A_2 A_1 \varphi_3 \psi_4. \end{aligned}$$

Das sind im ganzen 4 Gleichungen, die nur möglich sind, wie sich durch Ausmultiplizieren ergibt, wenn folgende 4 Vertauschungsbedingungen gelten.

$$\left.\begin{aligned} [n_1^{(1)} n_4^{(1)}] + [n_2^{(1)} n_3^{(1)}] &= 0, \\ [n_2^{(1)} n_4^{(1)}] + [n_3^{(1)} n_1^{(1)}] &= 0, \\ [n_3^{(1)} n_4^{(1)}] + [n_1^{(1)} n_2^{(1)}] &= 0, \\ n_1^{(1)2} + n_2^{(1)2} + n_3^{(1)2} + n_4^{(1)2} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (13\,a)$$

Für das zweite System (13b) ergeben sich analoge Gleichungen, die sich von (13a) nur unterscheiden, daß $[n_2^{(2)} n_4^{(2)}]$ in den drei ersten Gleichungen mit negativem Vorzeichen auftritt.

Ein Vergleich des Systems (13) mit (7) ergibt, daß man in (7) nur folgende Veränderungen vorzunehmen hat. Man setze:

$$\frac{\partial n_i^{(\lambda)}}{\partial x_k} \to A\, n_k^{(\lambda)} n_i^{(\lambda)} \qquad (14)$$

und man hat den Übergang von (7) zu (13) vollzogen. Der Faktor A ist eine einfache dimensionelle Größe, die später angegeben wird.

Die Substitution hat aber nicht nur für diesen speziellen Übergang Geltung, sondern gilt auch für (2) und für alle anderen Gleichungen der klassischen Theorie, was allerdings noch zu beweisen sein wird. Sie soll deswegen das Fundamentalprinzip der Neutrinotheorie genannt werden.

Wendet man dieses Prinzip auf (2) an, so erhält man eine neue Lösung der Grundgleichungen, bei der die Feldvektoren die gesuchten quadratischen Funktionen der Neutrinofunktionen n_i sind.

Es ist z. B.

$$i e_m^{(\lambda)} = A\,[n_4^{(\lambda)} n_m^{(\lambda)}] \text{ usw.} \qquad (15)$$

Diese Formeln lassen sich dadurch verifizieren, daß man nach (13) die n_i ausrechnet und einsetzt. So ist z. B.

$$\left.\begin{aligned} 4\,[n_4^{(1)} n_1^{(1)}] &= i\,[A_2 A_1]\,(\psi_4^2 - \psi_3^2) = i\,[A_2 A_1]\,(\beta_1 - i\gamma_1), \\ 4\,[n_4^{(1)} n_2^{(1)}] &= [A_2 A_1]\,(\psi_4^2 + \psi_3^2) = i\,[A_2 A_1]\,(\beta_2 - i\gamma_2), \\ 4\,[n_4^{(1)} n_3^{(1)}] &= 2\,i\,[A_2 A_1]\,\psi_3\,\psi_4 \quad = i\,[A_2 A_1]\,(\beta_3 - i\gamma_3). \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Man kann also die Lösung (12) auch wie (15) schreiben, wenn A_1 und A_2 nicht vertauschbar sind. Auf die anderen Verifikationen des Fundamentalprinzips soll nicht weiter eingegangen werden. Statt dessen soll das Fundamentalprinzip benutzt werden, um die Gleichungen dieses Abschnitts, die sich zunächst nur auf Wellenscharen, die die gleiche Fortpflanzungsrichtung α_i haben, beziehen, auf beliebige Wellengruppen zu erweitern. Es genügt, wenn man sich hierbei auf zwei solche Wellengruppen mit den Richtungswinkeln α_i und α_i' beschränkt. Nach (14) gilt dann $i e_m = A\,[n_4 n_m]$ und $i e_m' = A\,[n_4' n_m']$.

Die Differentialgleichungen, von denen die Feldvektoren abhängen, ebenso wie diejenigen für die n_i, sind aber von linearer Natur. Hat man also zwei verschiedene Lösungen, so ist in beiden Fällen auch die Summe eine Lösung. Nach (14) muß aber gelten

$$\begin{aligned} i\,(e_m + e'_m) &= A\,[(n_4 + n'_4)\,(n_m + n'_m)] \\ &= A\,[n_4\,n_m] + A\,[n'_4\,n_m] + A\,[n_4\,n'_m] + A\,[n'_4\,n'_m]. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß n_4 mit n'_m vertauschbar sein muß und ebenso natürlich die übrigen Komponenten, die zu verschiedenen Fortpflanzungsrichtungen gehören.

Eine weitere Konsequenz von (14) ist folgende. Würde man $n_i = n'_i$ setzen, so würde ebenfalls ein Widerspruch zwischen den drei Gleichungen entstehen. Es gibt also nicht zwei gleiche Lösungen für die Neutrinogleichungen. Für die Neutrinos gilt also das Pauli-Verbot. Für die Matrizen A und B bedeutet das, daß es sich nur um Matrizen von Quasioszillatoren handeln kann, die in der Literatur mit α_n und $\tilde{\alpha}_n$ bezeichnet werden und deren Vertauschungsregeln von den Oszillatorenmatrizen b_n und $\tilde{b}_n$, die wir im ersten Teil benutzt haben, verschieden sind. Sie lauten bekanntlich

$$\tilde{\alpha}_n \alpha_m + \alpha_m \tilde{\alpha}_n = \delta_{mn}, \qquad \alpha_n \alpha_m + \alpha_m \alpha_n = 0. \tag{17}$$

Hier beginnt sich schon die Bedeutung des Fundamentalprinzips abzuzeichnen. Mit Hilfe dieses Prinzips läßt sich auch in sehr durchsichtiger Weise der elektrische und magnetische Vektor des Gesamtfeldes berechnen. Nach dem ersten Abschnitt ist z. B. für die x-Komponenten

$$E_x - i H_x = 2\,(e_x^{(1)} + e_x^{*(2)}).$$

Andererseits folgt aus (2) nach kurzer Rechnung

$$i\,(e_x^{(1)} + e_x^{*(2)}) = \frac{\partial V_1}{\partial l} - \frac{\partial V_4}{\partial x} = \mathrm{rot}_{23}\,(V) \to A\,[V_4\,V_1] = A\,[V_2\,V_3]$$

mit den Abkürzungen $V_i = n_i^{(1)} + n_i^{*(2)}$, $V_4 = n_4^{(1)} - n_4^{*(2)}$.

Man benötigt also noch die Größen V_i. Diese ergeben sich sofort durch Addition von (10a) und (10b). Es ergibt sich dadurch für die V_i genau dasselbe System von Gleichungen wie (10a). Es gelten also auch die sämtlichen Folgerungen und Rechnungen wie oben und man erhält zum Schluß

$$E_m - i H_m = A\left[\frac{C_2 C_1}{2}\right](\beta_m - i\gamma_m);\; C_1 = A_1 + B_1,\; C_2 = A_2 + B_2. \tag{18}$$

Vergleich dieser Theorie mit der Neutrinotheorie der Herren Jordan und Kronig.

Für beide Theorien ist das Auftreten von vier verschiedenen Matrizen charakteristisch. Bei uns sind es die vier Matrizen $A_1 A_2 B_1 B_2$, während in der Neutrinotheorie zwei verschiedene Gruppen von Neutrinos unterschieden werden, von denen jede durch zwei Matrizen, nämlich durch α und durch die zu α adjungierte Matrix $\tilde{\alpha}$ charakterisiert werden. Es ist bequem, diese beiden Gruppen durch α_n und $\tilde{\alpha}_n$ bzw. α_{-n} und $\tilde{\alpha}_{-n}$ zu bezeichnen.

In den Matrizen A und B ist nach (10) noch die Koordinatenabhängigkeit enthalten. Bei einer Schar von Partialwellen, die alle dieselbe Fortpflanzungsrichtung haben, sind die einzelnen Wellen nur durch ihre Schwingungszahl verschieden. Man bezeichnet diese für die beiden Gruppen von Neutrinos vorteilhaft mit ω_n und ω_{-n}. Dann sind den beiden Gruppen folgende vier Funktionen zugeordnet:

$$\begin{aligned} \psi^+ &= \sum \alpha_n e^{+i\omega_n \varphi}, & \tilde{\psi}^+ &= \sum \tilde{\alpha}_n e^{-i\omega_n \varphi}, \\ \psi^- &= \sum \alpha_{-n} e^{+i\omega_{-n}\varphi}, & \tilde{\psi}^- &= \sum \alpha_{-n} e^{-i\omega_{-n}\varphi}, \end{aligned} \qquad n > 0.$$

$$\left(\varphi = \frac{x_i \alpha_i}{c} - t\right)$$

Diese vier Funktionen müßten mit unseren vier Matrizen übereinstimmen.

Über die Zuordnung erhalten wir Aufschluß durch den Teilchenstrom (8). Die tatsächliche Berechnung von (8) ergibt folgendes:

$$\begin{aligned} 2\varrho^{(\lambda)} &= N^{(\lambda)} (\psi_3 \psi_3^* + \psi_4 \psi_4^*) = N^{(\lambda)}, \\ 2 s_1^{(\lambda)} &= -cN^{(\lambda)} (\psi_3 \psi_4^* + \psi_3^* \psi_4) = cN^{(\lambda)} \alpha_1, \\ 2 s_2^{(\lambda)} &= -icN^{(\lambda)} (\psi_3 \psi_4^* - \psi_3^* \psi_4) = cN^{(\lambda)} \alpha_2, \\ 2 s_3^{(\lambda)} &= -cN^{(\lambda)} (\psi_3 \psi_3^* - \psi_4 \psi_4^*) = cN^{(\lambda)} \alpha_3, \\ N^{(1)} &= A_1^* A_1 + A_2^* A_2; \qquad N^{(2)} = B_1 B_1^* + B_2 B_2^*. \end{aligned}$$

Um wirkliche Dichten zu erhalten, müßten die Formeln noch durch das Volumen V dividiert werden. Man erhält dann die in diesem Volumen enthaltenen Teilchen durch Integration $\int \frac{\varrho^{(\lambda)}}{V} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\overline{N^{(\lambda)}}}{2}$.

Die Zuordnung muß nun so gewählt werden, daß diese Teilchenzahl endlich bleibt. Nach der Neutrinotheorie sind folgende Summen endlich: $\sum \tilde{\alpha}_n \alpha_n$ und $\sum \alpha_{-n} \tilde{\alpha}_{-n}$. Es kommt also nur folgende Zuordnung in Frage:

$$A_1 = \psi_+, \; B_1 = \psi_-, \; A_2 = \tilde{\psi}_-, \; B_2 = \tilde{\psi}_+. \tag{19}$$

Es ergibt sich für die beiden Integrale

$$\frac{\overline{N^{(1)}}}{2} = \frac{\overline{N^{(2)}}}{2} = \frac{\sum \tilde{\alpha}_n \alpha_n + \sum \alpha_{-n} \tilde{\alpha}_{-n}}{2}.$$

Der gesamte Teilchenstrom ist also

$$\bar{N} = \sum \tilde{\alpha}_n \alpha_n + \sum \alpha_{-n} \tilde{\alpha}_{-n}.$$

Nach der Festlegung der Zuordnung durch (19) sind wir in der Lage, eine Reihe von Folgerungen aus unserer Theorie mit gesicherten Resultaten der Jordan-Kronigschen Theorie zu vergleichen. Diese Folgerungen beziehen sich auf Wellenfelder, die sich in einem mit spiegelnden Wänden versehenen Kasten ausbilden. Solche Wellenfelder bestehen bekanntlich aus einer Summe von Partialwellen, die äquidistante Schwingungszahlen ω_k besitzen. Ist die Grundschwingung für die betreffende Fortpflanzungsrichtung ω_0, so kann man also setzen

$$\omega_k = k\,\omega_0, \quad \omega_{-k} = -k\,\omega_0\ ^{1}).$$

Das gesamte Wellenfeld für die betreffende Fortpflanzungsrichtung kann man gemäß (27) des ersten Teils dieser Arbeit in zwei senkrechte Komponenten zerlegen mit linearer Polarisation. Dem Ausdruck (27) müßte unsere Formel (18) entsprechen. Man zerlege zum Beweise (18) ebenfalls in zwei Komponenten, indem man setzt:

$$C_\lambda = C_\lambda^{(1)} + e^{i\pi/4} C_\lambda^{(2)}, \qquad \lambda = 1, 2.$$

Hier sollen $C_\lambda^{(1)}$ und $C_\lambda^{(2)}$ zwei miteinander vertauschbare Matrizen sein! Dann nimmt (18) die Form an

$$E - iH = A\left(\left[\frac{C_2^{(1)} C_1^{(1)}}{2}\right] + i\left[\frac{C_2^{(2)} C_1^{(2)}}{2}\right]\right)(\beta - i\gamma)$$
$$= E^{(1)} - iH^{(1)} + E^{(2)} - iH^{(2)}.$$

Es müßte also z. B. der erste Teil $E^{(1)} - iH^{(1)}$ mit dem Ausdruck (28) auf S. 109 übereinstimmen. Nach unserer Abmachung über die Kastenwellen nimmt aber (28) folgende Form an:

$$E^{(1)} - iH^{(1)} = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2V}} \cdot \left(\sqrt{k}\, b_k^{(1)} e^{ik\omega_0\varphi} + \sqrt{k}\, \tilde{b}_k^{(1)} e^{-ik\omega_0\varphi}\right)(\beta - i\gamma). \quad (20)$$

---

[1]) Man sieht also, daß die Zuordnung (19) auch unseren früheren Definitionen der Halbvektoren entspricht.

Man sollte also erwarten, daß die erste Klammer in (20) mit $\frac{1}{2}[C_2^{(1)} C_1^{(1)}]$ übereinstimmt. Diese Erwartung bestätigt sich aber nur für die eigentlichen Wellenfelder. Es ist nämlich nach (18) und (19)

$$\left.\begin{aligned} C_1^{(1)} &= (A_1^{(1)} + B_1^{(1)}) = \sum_{-\infty}^{+\infty n} \alpha_n^{(1)} e^{+ i n \omega_0 \varphi}, \\ C_2^{(1)} &= (A_2^{(1)} + B_2^{(1)}) = \sum_{-\infty}^{+\infty n} \tilde{\alpha}_n^{(1)} e^{- i n \omega_0 \varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

(Es sind hier die Matrizen α_n mit dem oberen Index (1) versehen, weil jede der beiden linearen Komponenten ihre besonderen Matrizen besitzt.)

Aus (21) ergibt sich unter Benutzung der Vertauschungsregeln für die $\alpha^{(1)}$ und unter Verwendung der Jordanschen Gleichungen

$$b_k^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{-\infty}^{+\infty n} \tilde{\alpha}_n^{(1)} \bar{\alpha}_{n+k}^{(1)}, \qquad \tilde{b}_k^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{-\infty}^{+\infty n} \tilde{\alpha}_n^{(1)} \alpha_{n-k}^{(1)}$$

der Wert für $[C_2^{(1)} C_1^{(1)}]$. Es ist

$$[C_2^{(1)} C_1^{(1)}]$$
$$= 2\Big(\sum_{n>0}^{n} (\tilde{\alpha}_n^{(1)} \alpha_n^{(1)} - \alpha_{-n}^{(1)} \tilde{\alpha}_{-n}^{(1)}) + \sum_{k>0}^{k} \big(\sqrt{k}\, b_k^{(1)} e^{i k \omega_0 \varphi} + \sqrt{k}\, \tilde{b}_k^{1} e^{- i k \omega_0 \varphi} \big) \Big).$$

Man sieht also, daß nach der Neutrinotheorie zu den eigentlichen Wellenfeldern, die durch (20) dargestellt sind, noch ein konstantes Feld hinzutritt. Damit sind wir auf einem ganz anderen Wege zu demselben Resultat gelangt wie Jordan und Kronig. Darin liegt ein starker Beweis für die ältere Neutrinotheorie, sowie für unsere Auffassung. Eine weitere Prüfung unserer Theorie würde darin bestehen, daß man sie auf Wellenfelder von strahlenden Atomen anwendet. Diese Übertragung ist erstaunlich einfach, da man im Prinzip nur die Gleichungen (7) in dem ersten Teil mit Hilfe der Determinantenmethode direkt zu lösen hat, statt sie, wie in dieser Arbeit, durch Einführung der Winkel β und γ zu lösen.

Die Erzeugung von möglichst homogenen Magnetfeldern durch Stromsysteme.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 5. Juni 1943.)

Von A. und F. Sauter in München.

Durch geeignet gebaute Stromsysteme lassen sich Magnetfelder erzeugen, welche das Feld bei der sogenannten Helmholtz-Anordnung merklich an Homogenität übertreffen. Die Betrachtungen werden für rotationssymmetrische Systeme aus einzelnen Stromringen wie auch aus ganzen Spulen durchgeführt.

I. Prinzip der Methode.

Vor fast 100 Jahren hat Helmholtz[1]) gezeigt, daß man mit einem Paar koaxialer, kreisförmiger Stromschleifen ein besonders homogenes Magnetfeld erzeugen kann, wenn der Abstand der beiden Kreisringe gerade gleich groß ist wie ihr Radius („Helmholtz-Anordnung"). Seither ist das Problem, möglichst homogene Magnetfelder durch ein System von Kreisströmen bzw. von Spulen herzustellen, immer wieder untersucht worden[2]) und hat auch verschiedene praktische Anwendungen gefunden[3]). Wenn dieses Problem im folgenden noch einmal aufgegriffen und eingehender untersucht werden soll, so geschieht dies in erster Linie deshalb, weil hier — bei rotationssymmetrischen Systemen, auf die wir uns im folgenden ausdrücklich beschränken wollen — noch

---

[1]) H. v. Helmholtz, Vortrag in der Sitzung vom 16. III. 1849 der Berliner Physikalischen Gesellschaft. Anscheinend unabhängig davon wurde die „Helmholtz-Anordnung" auf empirischem Wege gefunden von Gauguin, C. R. 36, 191, 1853; Pogg. Ann. 88, 442, 1853. Die Rechnungen dazu gab Bravais, Pogg. Ann. 88, 446, 1853. — [2]) C. Maxwell, Treatise, 2. Aufl., Bd. 2, S. 329 [Berechnung einer ein noch homogeneres Feld liefernden Anordnung aus drei Kreisströmen (vgl. Anm. 8)]; G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektrizität, Bd. 3, S. 250, 1883 (Zusammenfassung der damals vorliegenden Ergebnisse); F. Auerbach, in Winkelmanns Handb. d. Phys., 2. Aufl., Bd. 4, S. 263, 1905 (Ausdehnung der Ergebnisse auf Spulen mit endlichem Querschnitt); E. Gehrke u. M. v. Wogau, Verh. d. D. Phys. Ges. 11, 664, 1909 (Feldausmessung bei konisch gewickelten Spulen in Helmholtz-Anordnung); R. Bock, ZS. f. Phys. 54, 257, 1929 (Feldberechnung b. d. Helmholtz-Anordnung); G. Fanselau, ZS. f. Phys. 54, 260, 1929 (Behandlung von Anordnungen mit mehreren Stromringpaaren). — [3]) Vgl. etwa K. Sauerwein, Naturwissensch. 30, 494, 1942.

keineswegs alle Möglichkeiten zur Erhöhung der Homogenität in Betracht gezogen worden sind.

Zur Erläuterung der im folgenden verwendeten Methode seien einige allgemeine Bemerkungen vorausgeschickt. Prinzipiell läßt sich jedes von Strömen erzeugte Magnetfeld für alle Raumpunkte auf Grund des Biot-Savart schen Gesetzes berechnen. Bei rotationssymmetrischen Systemen wird man jedoch damit für Punkte außerhalb der Achse auf elliptische Integrale und daher auf wenig übersichtliche Formeln geführt, und nur für die Achsenpunkte erhält man einigermaßen einfache Ausdrücke.

Nun genügt aber zur Beurteilung des allgemeinen Feldverlaufs bereits die Kenntnis des Achsenfeldes allein. Ist dieses nämlich durch die Funktion

$$(H_z)_a \equiv H_a(z) = H_0 + z\left(\frac{\mathrm{d}H_a}{\mathrm{d}z}\right)_0 + \cdots \qquad (\mathrm{I},1)$$

gegeben, wobei die Rotationsachse in die z-Richtung gelegt ist, so kann man die Koeffizienten a_l der allgemeinen, im Nullpunkt regulären, axialsymmetrischen Lösung

$$H_z = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos\vartheta) \qquad (\mathrm{I},2)$$

der Gleichung $\Delta H_z = 0$ durch Spezialisierung von (I, 2) auf die Achsenpunkte und Vergleich mit der Reihenentwicklung (I, 1) bestimmen; wegen $r = +z$ bzw. $-z$ für $\vartheta = 0$ bzw. π und wegen $P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l$ erhält man

$$a_l = \frac{1}{l!}\left(\frac{\mathrm{d}^l H_a}{\mathrm{d}z^l}\right)_{z=0} \qquad (\mathrm{I},3)$$

Damit ist die z-Komponente des Magnetfeldes in einem beliebigen Punkt innerhalb des Konvergenzbereiches dieser Reihe auf das Achsenfeld zurückgeführt.

Ferner gilt, wie man aus der Quellenfreiheit des magnetischen Flusses bei Anwendung auf eine flache zylindrische Schachtel senkrecht zur Rotationsachse erkennt,

$$H_\varrho = -\frac{1}{\varrho}\int_0^\varrho \left(\frac{\partial H_z}{\partial z}\varrho\,\mathrm{d}\varrho\right)_z, \qquad (\mathrm{I},4)$$

wobei ϱ den Abstand von der Achse mißt, und das Integral bei festgehaltenem z auszuführen ist. Durch Einsetzen von (I, 2) erhält man

daraus unter Verwendung bekannter Beziehungen zwischen Kugelfunktionen[1]) nach einiger Rechnung

$$H_\varrho = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l}{l+1} r^l \frac{\mathrm{d}P_l(\cos\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}. \qquad \text{(I, 5)}$$

Doch wird diese Formel im folgenden nicht weiter benutzt werden. Die vorstehenden Betrachtungen sollen nur zeigen, daß beide Komponenten von $\mathfrak{H}$ in analoger Weise durch die Koeffizienten a_l bestimmt sind, und daß daher beim Verschwinden eines bestimmten a_l die Glieder mit r^l aus beiden Reihenentwicklungen wegfallen.

Hat man nun die Aufgabe zu lösen, durch geeignete Formung des felderzeugenden Stromsystems ein möglichst homogenes Magnetfeld zu erzeugen, so braucht man also nicht H_z und H_ϱ einzeln zu homogenisieren, sondern die Ausglättung von H_z hat auch die von H_ϱ automatisch zur Folge. Und hier genügt es wiederum, das relativ leicht berechenbare Achsenfeld H_a möglichst homogen zu machen.

Da nun die a_l die Koeffizienten bei der Entwicklung von H_a nach Potenzen von z sind, wird das Achsenfeld in der Nähe des Nullpunktes ersichtlich um so homogener, je mehr aufeinanderfolgende Koeffizienten, angefangen mit a_1, verschwinden; a_0 ist nach (I, 2) identisch mit der Feldstärke H_0 im Nullpunkt und daher von Null verschieden. Es kommt also darauf an, durch geeignete Anordnung der Stromschleifen möglichst viele aufeinanderfolgende Koeffizienten a_l, d. h. möglichst viele Differentialquotienten von $H_a(z)$ für $z = 0$ zum Verschwinden zu bringen. Ist dies geschehen, so kann man die Homogenität des Feldes aus der Ordnung l des ersten nicht verschwindenden Koeffizienten erschließen. Als Beispiel sei auf die Fig. 1 verwiesen, in der das Achsenfeld für zwei später beschriebene Stromanordnungen in Abhängigkeit von z gezeichnet ist, und zwar berechnet einmal aus der strengen Feldformel (ausgezogene Kurve) und zum andern Mal aus der Reihenentwicklung unter Berücksichtigung lediglich des ersten nichtverschwindenden Gliedes (gestrichelte Kurve). Man erkennt, daß die letzteren Kurven tatsächlich den Punkt recht gut wiedergeben, in dem das Achsenfeld H_a anfängt, merklich vom Zentralfeld H_0 abzuweichen.

Einen ersten Schritt zur Steigerung der Feldhomogenität erzielt man durch Anwendung von Stromsystemen, welche eine Symmetrie-

[1]) Vgl. z. B. Jahnke-Emde, Funktionentafeln.

ebene senkrecht zur Rotationsachse des Systems besitzen. Legt man nämlich den Koordinatenursprung in diese Ebene, so ist $H_a(z)$ sicherlich eine symmetrische Funktion von z, so daß alle ungeraden Ableitungen von H_a im Nullpunkt verschwinden und damit auch alle a_l mit ungeradem l. Darüber hinaus kann man durch geeignete Wahl der im Stromsystem enthaltenen Parameter auch einige der a_l mit geradem l zum Verschwinden bringen. Das dabei anzuwendende Verfahren ergibt sich aus den im folgenden gebrachten Beispielen. Und zwar sollen im II. Abschnitt Stromsysteme betrachtet werden, welche aus einem oder mehreren Paaren symmetrisch angeordneter kreisförmiger Einzelstromschleifen bestehen, während sich der III. Abschnitt mit Stromsystemen beschäftigt, welche aus Spulenpaaren bestehen.

II. Systeme von Stromkreisen.

Bei einem System von $2n$ koaxialen Stromkreisen, von denen je zwei gleich sind und symmetrisch zur Mittelebene liegen, erhält man für das Achsenfeld auf Grund des Biot-Savartschen Gesetzes die Formel

$$H_a(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{J_k \varrho_k^2}{2} \left\{ \frac{1}{[\varrho_k^2 + (z-\zeta_k)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[\varrho_k^2 + (z+\zeta_k)^2]^{3/2}} \right\}. \quad \text{(II, 1)}$$

Hier bedeutet J_k die Stromstärke im k-ten Kreis mit dem Radius ϱ_k und dem Abstand ζ_k von der Symmetrieebene. Das erste Glied in der geschweiften Klammer rührt von den Stromkreisen oberhalb der Symmetriebene, das zweite von den unter ihr liegenden her.

Es gilt nun, die in (II, 1) eingehenden Parameter J_k, ϱ_k und ζ_k so zu wählen, daß möglichst viele Ableitungen von $H_a(z)$ für $z = 0$ verschwinden. Eine Abzählung der wesentlichen Parameter — es kommt nur auf die $n-1$ Strom- und $2n-1$ Längenverhältnisse an — läßt vermuten, daß die Potenzreihe von $H_a - H_0$ bei günstigster Wahl der Parameter erst mit dem Glied z^{6n-2} beginnt, also bei *einem* Stromringpaar mit z^4, wie es bei der Helmholtz-Anordnung tatsächlich der Fall ist, bei *zwei* Stromringpaaren mit z^{10}, bei *drei* mit z^{16} usw. Wie allerdings später gezeigt wird, ist dieses Homogenitätsoptimum im Fall $n = 2$ nicht zu erreichen; vielmehr beginnt die Abweichung des Achsenfeldes H_a vom Zentralfeld H_0 bei zwei Stromringpaaren auch im

günstigsten Fall bereits mit z^8. Vermutlich gilt ähnliches auch für höhere n-Werte.

In Durchführung des obigen Programms hätte man aus (II, 1) die verschiedenen Ableitungen von H_a zu berechnen und sie gleich Null zu setzen. Doch kommt man bei größeren n-Werten schneller zum Ziel, wenn man statt ϱ_k und ζ_k die zu den einzelnen Stromkreisen gehörigen Polarkoordinaten R_k und ϑ_k einführt ($\zeta_k = R_k \cos\vartheta_k$, $\varrho_k = R_k \sin\vartheta_k$) und (II, 1) in eine Potenzreihe nach Kugelfunktionen der Winkel ϑ_k entwickelt. Mit der Beziehung[1])

$$\frac{1}{(R^2 - 2zR\cos\vartheta + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{R^3}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{z}{R}\right)^l \frac{\mathrm{d}P_{l+1}(\cos\vartheta)}{\mathrm{d}\cos\vartheta} \quad \text{für } z < R \quad \text{(II, 2)}$$

erhält man aus (II, 1) eine Potenzreihe nach geraden Potenzen von z von der Form

$$H_a(z) = \sum_{l=0}^{\infty} z^{2l} \sum_{k=1}^{n} \frac{J_k \sin^2\vartheta_k}{R_k^{2l+1}} \frac{\mathrm{d}P_{2l+1}(\cos\vartheta_k)}{\mathrm{d}\cos\vartheta_k} = \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l} z^{2l}, \quad \text{(II, 3)}$$

aus der man sofort die interessierenden Koeffizienten a_{2l} ablesen kann. Die gesuchten Bedingungsgleichungen zwischen den Parametern J_k, R_k und ϑ_k lauten somit

$$a_{2l} = \sum_{k=1}^{n} \frac{J_k \sin^2\vartheta_k}{R_k^{2l+1}} P'_{2l+1}(\cos\vartheta_k) = 0 \quad \text{für} \quad l = 1, 2, \ldots; \quad \text{(II, 4)}$$

dabei gilt

$$P'_m(x) = \frac{\mathrm{d}P_m(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2^m m!}\frac{\mathrm{d}^{m+1}(x^2-1)^m}{\mathrm{d}x^{m+1}}, \quad \text{(II, 5)}$$

also im speziellen

$$\left.\begin{aligned} P'_1(x) &= 1, \\ P'_3(x) &= \tfrac{3}{2}(5x^2 - 1), \\ P'_5(x) &= \tfrac{15}{8}(21x^4 - 14x^2 + 1), \\ P'_7(x) &= \tfrac{7}{16}(429x^6 - 495x^4 + 135x^2 - 5), \\ P'_9(x) &= \tfrac{45}{128}(2431x^8 - 4004x^6 + 2002x^4 - 308x^2 + 7), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad \text{(II, 6)}$$

[1]) Man erhält sie durch Differentiation der Definitionsgleichung

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 - 2Rz\cos\vartheta + z^2}} = \frac{1}{R}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{z}{R}\right)^l P_l(\cos\vartheta) \quad \text{für } z < R$$

nach $\cos\vartheta$.

Mit dem ersten dieser Ausdrücke findet man für das Feld im Mittelpunkt

$$H_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{J_k \sin^2 \vartheta_k}{R_k}. \qquad \text{(II, 7)}$$

Der Fall $n = 1$ ist nach diesem Verfahren sofort gelöst. (II, 4) reduziert sich für $l = 1$ auf die Gleichung $P_3'(\cos\vartheta) = 0$. Man erhält also unmittelbar die bekannte Helmholtz-Anordnung mit

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\vartheta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\varrho}{\zeta} = 2, \quad \vartheta = 63^0\,26'. \qquad \text{(II, 8)}$$

Das Zentralfeld ist hier nach (II, 7) gleich

$$H_0 = \frac{4}{5}\frac{J}{R} = \frac{8}{5\sqrt{5}}\frac{J}{\varrho}. \qquad \text{(II, 9)}$$

Das Feld in der Umgebung des Mittelpunktes ist nach (I, 2) und (I, 5) durch die Näherungsformeln

$$\left.\begin{aligned} H_z &= \frac{4J}{5R}\left(1 - \frac{9}{40}\,\frac{8z^4 - 24z^2\varrho^2 + 3\varrho^4}{R^4} + \cdots\right), \\ H_\varrho &= \frac{4J}{5R}\,\frac{9z\varrho\,(4z^2 - 3\varrho^2)}{10R^4} + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II, 10)}$$

gegeben.

Für den allgemeinen Fall mit beliebigem n hat Fanselau[1]) ein Verfahren zur Auswertung der Gleichung (II, 4) angegeben, das zwar den Vorteil relativ großer Einfachheit besitzt, jedoch keineswegs auf das mit n Stromkreispaaren erreichbare Homogenitätsoptimum führt. Fanselau setzt nämlich willkürlich alle Ströme J_k einander gleich und bestimmt die Winkel ϑ_k der einzelnen Stromschleifen aus den n Wurzeln der Gleichung $P'_{2n+1}(\cos\vartheta) = 0$. Dann ist die n-te der Gleichungen (II, 4) identisch erfüllt, während zur Bestimmung der $n - 1$ Radienverhältnisse die Gleichungen (II, 4) mit $1 \leqq l \leqq n - 1$ herangezogen werden. Mithin verschwinden bei der Lösung von Fanselau alle a_{2l} von $l = 1$ bis $l = n$, so daß die Reihenentwicklung für $H_a - H_0$ mit der Potenz z^{2n+2} beginnt, während nach der Zahl der zur Verfügung stehenden Parameter, wie erwähnt, als erstes nicht verschwindendes Glied dasjenige mit z^{6n-2} zu erwarten wäre.

---

[1]) G. Fanselau, ZS. f. Phys. 54, 260, 1929.

Im besonderen findet Fanselau nach diesem Verfahren bei zwei Stromringpaaren aus den Nullstellen von $P_5'(x)$ die beiden Winkelwerte

$$\left.\begin{aligned} x_1 = \cos\vartheta_1 &= \sqrt{\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)} = 0{,}2852, \quad \vartheta_1 = 73^0\,26', \\ x_2 = \cos\vartheta_2 &= \sqrt{\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{\sqrt{7}}\right)} = 0{,}7651, \quad \vartheta_2 = 40^0\,5', \end{aligned}\right\} \quad (\text{II}, 11)$$

und aus der ersten Gleichung (II, 4) wegen $J_1 = J_2$ das Radienverhältnis

$$r = \frac{R_1}{R_2} = \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{7}-1}{2\sqrt{7}+1}} = 0{,}8803. \quad (\text{II}, 12)$$

Da bei dieser Lösung nur $a_2 = a_4 = 0$, jedoch $a_6 \neq 0$ ist, führt sie hinsichtlich der „Ausglättung" des Achsenfeldes offenbar nur um eine Potenz von z^2 weiter als die Helmholtz-Anordnung bei einem Strompaar[1]).

Sicherlich gewinnt man eine bessere Lösung des Problems, wenn man unter Festhalten an den Fanselauschen Werten für die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 von der Annahme $J_1 = J_2$ abgeht und sowohl das Radienverhältnis $R_1/R_2 = r$, wie das Stromverhältnis $J_1/J_2 = j$ aus den Gleichungen (II, 4) für $l = 1$ und $l = 3$ bestimmt; die Gleichung für $l = 2$ ist ja bereits durch die Wahl der Winkel nach (II, 11) erfüllt. Man erhält so die beiden Beziehungen

$$\frac{j}{r^3} = -\frac{\sin^2\vartheta_2}{\sin^2\vartheta_1}\frac{P_3'(\cos\vartheta_2)}{P_3'(\cos\vartheta_1)}, \qquad \frac{j}{r^7} = -\frac{\sin^2\vartheta_2}{\sin^2\vartheta_1}\frac{P_7'(\cos\vartheta_2)}{P_7'(\cos\vartheta_1)}. \quad (\text{II}, 13)$$

Da für die durch (II, 11) gegebenen ϑ- bzw. x-Werte $P_7'(x) = -\frac{13}{9}P_3'(x)$ wird, sind die rechten Seiten der beiden Gleichungen (II, 13) einander gleich; daher muß

$$r = \frac{R_1}{R_2} = 1 \quad (\text{II}, 14)$$

sein, d. h. die vier Kreisringe des Stromsystems liegen auf einer Kugel.

---

[1]) Zur gleichen Homogenisierung wie die Fanselausche Lösung für zwei Stromringpaare führt auch eine von Maxwell (l. c.) angegebene Anordnung, bei der (mit der hier verwendeten Bezeichnung) $x_1 = \sqrt{3/7}$, $x_2 = 0$, $r = 1$ und $j = 49/32$ ist. Dies bedeutet drei auf einer Kugel liegende Kreisströme, von denen zwei um das $\sqrt{3/7}$fache des Kugelradius nach oben und unten verschoben sind und aus 49 Windungen bestehen, während der dritte (als zusammenfallendes Kreisringpaar) in der Äquatorebene liegt und 64 Windungen hat. Man erkennt leicht, daß mit diesen Daten die ersten beiden Gleichungen (II, 4) erfüllt sind.

Für das Stromverhältnis j findet man aus (II, 13) nach kurzer Rechnung

$$j = \frac{J_1}{J_2} = \frac{2\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}-1} = 1{,}4660 \quad \text{oder} \quad \begin{cases} J_1 = J_0\,(2\sqrt{7}+1), \\ J_2 = J_0\,(2\sqrt{7}-1). \end{cases} \tag{II, 15}$$

Der Proportionalitätsfaktor J_0 ist mit dem Feld H_0 im Mittelpunkt der Anordnung verknüpft; nach (II, 8) gilt

$$H_0 = \frac{20}{\sqrt{7}} \frac{J_0}{R}. \tag{II, 16}$$

Um den Unterschied in der Feldhomogenität zwischen dieser Stromringanordnung und der Helmholtz-Anordnung bei gleichem Zentralabstand R deutlich zu machen, ist in Fig. 1 die Funktion $H_a(z)/H_0$ sowohl für den Helmholtz-Fall (Kurve I) wie auch für das durch (II, 11) und (II, 14) bis (II, 16) gegebene System aus zwei Stromringpaaren (Kurve II) eingezeichnet. Dabei wurden die ausgezogenen Kurven aus der strengen Formel (II, 1) und die gestrichelten Kurven aus der Potenzreihenentwicklung (II, 3) bei Berücksichtigung lediglich des ersten nicht verschwindenden Gliedes gewonnen.

Wenn auch die obige Lösung eine Verbesserung gegenüber der Fanselauschen Lösung darstellt, indem bei ihr auch der Koeffizient von z^6 verschwindet, so erhebt sich doch die Frage, ob man bei zwei Stromringpaaren nicht noch um eine Ordnung besser homogenisieren kann, wenn man auch von der Fanselauschen Winkelbestimmung aus der Gleichung $P_5'(\cos\vartheta) = 0$ abgeht und versucht, entsprechend den vier jetzt zur Verfügung stehenden Parametern ϑ_1, ϑ_2, r und j noch eine weitere der Gleichungen (II, 4) zu erfüllen. Es gilt also, die vier Gleichungen

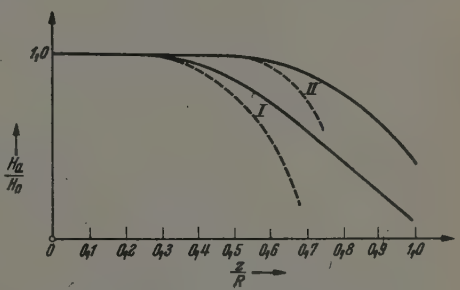


Fig. 1. Achsenfeld bei einem (I) und bei zwei (II) Stromringpaaren in günstigster Anordnung.
——— streng berechnet nach (II, 1),
– – – – – angenähert berechnet nach (II, 3).

$$\frac{j}{r^{2l+1}} = -\frac{\sin^2\vartheta_2}{\sin^2\vartheta_1} \frac{P'_{2l+1}(\cos\vartheta_2)}{P'_{2l+1}(\cos\vartheta_1)} \quad \text{für} \quad l = 1, 2, 3, 4 \tag{II, 17}$$

zu lösen. Eliminiert man hier j und r, so erhält man die beiden Beziehungen

$$\left(\frac{(P'_5)^2}{P'_3\,P'_7}\right)_{\vartheta_1} = \left(\frac{(P'_5)^2}{P'_3\,P'_7}\right)_{\vartheta_2}, \quad \left(\frac{P'_5\,P'_7}{P'_3\,P'_9}\right)_{\vartheta_1} = \left(\frac{P'_5\,P'_7}{P'_3\,P'_9}\right)_{\vartheta_2} \tag{II, 18}$$

Die rechnerische Auflösung dieser algebraischen Gleichungen höheren Grades nach $x_1 = \cos\vartheta_1$ und $x_2 = \cos\vartheta_2$ wäre recht mühsam. Schneller kommt man graphisch zum Ziel, indem man zunächst $(P_5')^2/P_3'P_7'$ als Funktion des Argumentes $x = \cos\vartheta$ konstruiert und dann zu jedem x_1-Wert einen x_2-Wert mit gleicher Ordinate sucht. Trägt man die so gefundenen zusammengehörigen Werte in einem $x_1 - x_2$-Diagramm ein (Fig. 2), so gewinnt man als Darstellung des durch die erste Gleichung (II, 18) gegebenen Zusammenhanges zwischen x_1 und x_2 die beiden mit 1 bezeichneten Kurvenäste von der Gestalt eines schräg liegenden Φ.

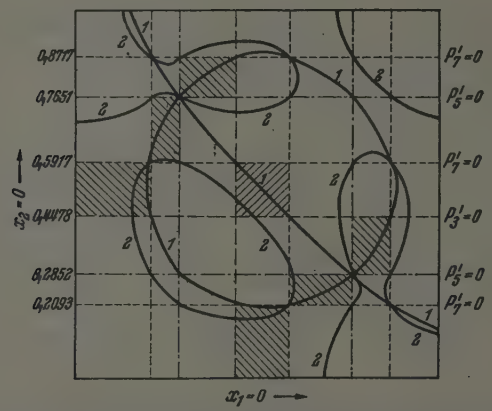


Fig. 2. Zur Konstruktion der zusammengehörigen Polarwinkel bei zwei Stromringpaaren. Die brauchbaren Werte der $x_i = \cos\vartheta_i$ liegen auf den mit 1 bezeichneten Kurvenästen im schraffierten Gebiet.

Analog erhält man aus der zweiten Gleichung (II, 18) die übrigen, mit 2 bezeichneten Kurvenzüge. Die Hauptdiagonale des Quadrats $x_1 = x_2$ ist eine triviale, jedoch unbrauchbare Lösung beider Gleichungen.

Aus den Schnittpunkten der verschiedenen Kurvenäste in Fig. 2 kann man nun die gesuchten x_k-Werte ablesen. Offensichtlich gibt es sechs gewöhnliche Schnittpunkte und dazu noch zwei weitere Punkte, in denen sich drei Kurvenäste schneiden. Sieht man sich aber die zu diesen Punkten gehörigen x_1- und x_2-Werte genauer an, so erkennt man, daß sich mit ihnen nicht alle vier Gleichungen (II, 17) befriedigen lassen. Denn die x-Werte der beiden Dreifachpunkte sind gerade die beiden durch (II, 11) gegebenen Wurzeln der Gleichung $P_5'(x) = 0$,

während die Koordinaten der gewöhnlichen Schnittpunkte mit den Nullstellen von $P_7'(x)$, nämlich

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}2093 \\ x_2 = 0{,}5917 \\ x_3 = 0{,}8717 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \vartheta_1 = 77^0\,55' \\ \vartheta_2 = 53^0\,43' \\ \vartheta_3 = 29^0\,20' \end{cases} \qquad \text{(II, 19)}$$

identisch sind. Wenn auch diese Nullstellen die Gleichungen (II, 18) erfüllen, so befriedigen sie doch nur entweder die zweite oder die dritte der Gleichungen (II, 17). Dann stehen zur Bestimmung der restlichen Parameter r und j insgesamt drei Gleichungen zur Verfügung; das System ist also überbestimmt und besitzt daher keine Lösung. Damit ist nun aber die Unmöglichkeit nachgewiesen, mit zwei Schleifenpaaren vier Koeffizienten a_l zum Verschwinden zu bringen, d. h. ein so homogenes Magnetfeld zu erzeugen, daß die Potenzreihenentwicklung von $H_a - H_0$ erst mit dem Gliede z^{10} beginnt.

Bei zwei Paaren von Stromschleifen muß man sich also mit der Erfüllung der ersten drei Gleichungen (II, 17) allein begnügen. Eine Lösung dieser drei Gleichungen, und zwar die den Dreierschnittpunkten in Fig. 2 entsprechende, ist bereits durch die Formeln (II, 14) bis (II, 16) gegeben. Andere Lösungen dieser Art erhält man, indem man von zwei zusammengehörigen Werten x_1 und x_2 ausgeht, wie sie durch die erste der beiden Gleichungen (II, 18) oder durch die Kurvenäste 1 der Fig. 2 gegeben werden, und dann aus den zwei ersten Gleichungen (II, 17) j und r bestimmt. Doch führen nicht alle Punkte dieser Kurvenstücke auf brauchbare Lösungen. Da nämlich die linken Seiten aller Gleichungen (II, 17) je nach dem Vorzeichen von j entweder gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ sind — r ist als Radienverhältnis stets positiv —, so müssen entweder alle $P'_{2l+1}(x_2)$ das gleiche Vorzeichen haben wie jeweils die $P'_{2l+1}(x_1)$ gleicher Ordnung, oder aber sie müssen insgesamt das entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Die Gebiete im $x_1 - x_2$-Diagramm, für welche dies der Fall ist, sind in Fig. 2 schraffiert. Nur die in diesen Gebieten liegenden Stücke der Kurve 1 und damit nur ein relativ schmaler Bereich von x_1- und x_2-Werten ergeben reelle Lösungen für j und r und führen zur gesuchten Homogenisierung.

Um diese Lösungen klarer hervortreten zu lassen, sind in Fig. 3 die Lagen zweier zusammengehöriger Stromschleifen im Meridianschnitt durch ihre Durchstoßpunkte dargestellt. Dazu wurde erst zu einem bestimmten, aus Fig. 2 entnommenen Wertepaar x_1 und x_2 das zugehörige

Radien (und Strom-) verhältnis berechnet und dann auf dem zu ϑ_1 (= Winkel gegen die z-Achse) gehörigen Fahrstrahl die Entfernung $R_1 = R_0\sqrt{r}$, sowie auf dem zu ϑ_2 gehörigen die Entfernung $R_2 = R_0/\sqrt{r}$ aufgetragen. Zur Schaffung vergleichbarer Verhältnisse wurde dabei R_0 für alle Punktepaare gleich groß gewählt. Man erhält so (im rechten oberen Quadranten des Meridianschnittes) die durch gleiche Symbole als zusammengehörig gekennzeichneten Punkte a_1 und a_2 bzw. b_1 und b_2 usf. und als Verbindungslinie aller dieser Punkte die stark ausgezogenen Kurvenstücke. Wie die Rechnung zeigt, gehören zu den

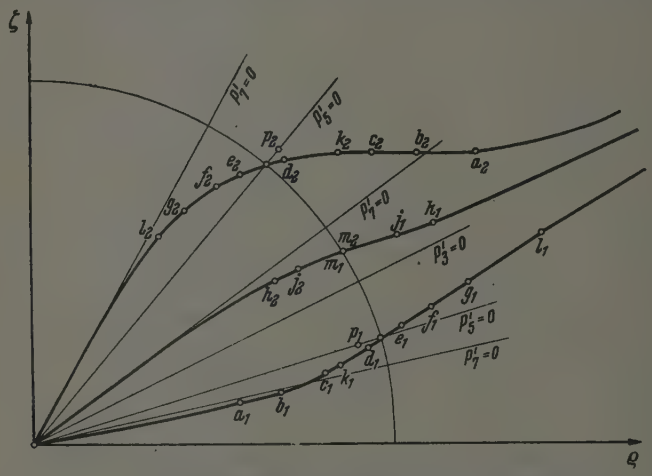


Fig. 3. Zusammengehörige Stromschleifen im Meridianschnitt, durch gleiche Buchstaben bezeichnet.

beiden äußeren Kurvenästen positive, zum mittleren Ast negative j-Werte; also müssen im ersten Fall die Ströme in den beiden Stromschleifen im gleichen Sinn fließen, während sie in den zur mittleren Kurve gehörigen Anordnungen gegensinnig geschaltet werden müssen. Im ersten Fall verstärken sich also die Magnetfelder der beiden Ströme, im zweiten Fall kompensieren sie sich zum Teil oder (im Punkt $m_1 = m_2$ mit $r = 1$) vollständig.

Die durch (II, 14) bis (II, 16) gegebene Lösung wird wegen $r = 1$ durch die beiden Schnittpunkte des Kreises vom Radius R_0 mit den beiden äußeren Kurvenzügen gegeben. Die Fanselausche Lösung wird durch die beiden nicht auf den Kurven liegenden Punkten p_1 und p_2 dargestellt, der Helmholtz-Anordnung entspricht ein Durchstoß-

punkt auf dem mit $P_3' = 0$ bezeichneten Fahrstrahl unter dem Winkel $\vartheta = 63^0\ 26'$.

Welche der durch Fig. 3 dargestellten Lösungen in einem konkreten Fall zu wählen ist, hängt von der Art des Problems ab. Bei Verwendung gleich großer Drahtschleifen hat man die durch die Punkte k_1 und k_2 charakterisierte Lösung zu wählen. Sollen andererseits die Kreisringe in der gleichen Ebene liegen, so kommen dafür die Punkte l_1 und l_2 in Frage.

III. System von Spulen.

Wir gehen nunmehr über zur Betrachtung von Magnetfeldern, die von stromdurchflossenen Spulen mit endlichem Querschnitt erzeugt werden. Dazu schreiben wir die Grundformel (II, 1), die das Achsenfeld eines Systems von einzelnen Stromschleifen darstellt, um auf den Fall, daß viele Schleifen zu einer Spule zusammengebaut sind. Sei etwa für die k-te Spule die Zahl der Windungen pro Querschnitteinheit gleich ν_k, so geht (II, 1) über in

$$H_a(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k \nu_k}{2} \iint_{Q_k} \mathrm{d}\varrho\, \mathrm{d}\zeta\, \varrho^2 \left\{ \frac{1}{[\varrho^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[\varrho^2 + (z+\zeta)^2]^{3/2}} \right\}; \quad \text{(III, 1)}$$

dabei ist über die Querschnittsfläche Q_k der k-ten Spule zu integrieren. Durch die gleiche Umformung, die zur Formel (II, 4) geführt hat, gewinnt man daraus die Potenzreihenentwicklung

$$H_a(z) = \sum_{l=0}^{\infty} z^{2l} \sum_{k=1}^{n} J_k \nu_k \iint_{Q_k} \frac{\mathrm{d}\varrho\, \mathrm{d}\zeta \sin^2\vartheta}{R^{2l+1}} \frac{\mathrm{d}\, P_{2l+1}(\cos\vartheta)}{\mathrm{d}\cos\vartheta}, \quad \text{(III, 2)}$$

wobei wie früher $\zeta = R\cos\vartheta$, $\varrho = R\sin\vartheta$ gesetzt wurde.

Es gilt nun, möglichst viele aufeinanderfolgende Koeffizienten in (III, 2), angefangen beim Glied mit $l = 1$, durch geeignete Wahl der Parameter zum Verschwinden zu bringen. Sucht man beispielsweise nach den günstigsten Dimensionen eines Paares gleicher Spulen von rechteckigem Querschnitt, so liegen vier Parameter vor, nämlich Dicke und Höhe der Spulen, ihr Radius und der gegenseitige Abstand der beiden Spulen, so daß man, da es nur auf die Verhältnisse dieser Längen ankommt, drei Parameter zur Verfügung hat. Doch läßt der Grenzfall von Spulen mit extrem kleinem Querschnitt, d. h. der Fall eines einzigen Kreisringpaares, bei dem sich ja die Feldhomogenität nicht über die

der Helmholtz-Anordnung steigern läßt, vermuten, daß auch bei endlichem Spulenquerschnitt der günstigste Fall, nämlich drei Koeffizienten in (III, 2) zum Verschwinden zu bringen, keinesfalls immer realisierbar ist.

Interessant wäre die Beantwortung der Frage, welche Querschnittsform etwa bei vorgegebener Querschnittsgröße (oder Zahl der Drahtwindungen) die günstigste ist. Sicherlich ist dies nicht die mehrfach vorgeschlagene konische Spule mit dem Öffnungswinkel von 63°26′, entsprechend der Helmholtz-Anordnung für jedes einzelne Windungspaar. Denn sie gibt zwar ein stärkeres, keinesfalls aber homogeneres Feld als diese Anordnung und ist daher auch gleichwertig mit jedem anderen Stromringsystem, bei dem in der Reihe (III, 2) nur der Koeffizient von z^2 verschwindet. Ihr ist jede Stromanordnung überlegen, bei der außer dem Koeffizienten von z^2 auch der von z^4 verschwindet, wie z. B. bei einem Stromsystem aus zwei Spulenpaaren mit relativ kleinem Querschnitt in ungefähr der gleichen Lage wie die beiden Kreisringpaare im II. Abschnitt. Ob sich eine solche Homogenisierung auch mit einem einzigen Spulenpaar allein durch geeignete Formgebung erreichen läßt, wurde bisher nicht untersucht.

Außer dieser Fragestellung prinzipiellen Charakters ist noch die folgende Frage von praktischem Interesse. Es sei ein Paar völlig gleicher Spulen von bestimmtem Querschnitt und Radius vorgegeben. Gefragt wird nach dem Abstand, in dem man diese beiden Spulen aufstellen muß, um im Mittelpunkt der Anordnung ein möglichst homogenes Feld zu erhalten. Da man in diesem Fall nur einen einzigen Parameter zur Verfügung hat, kann man auf diese Weise im allgemeinen nur die gleiche Homogenisierung wie bei der Helmholtz-Anordnung erreichen.

Zur Berechnung des richtigen Abstandes muß man den Koeffizienten von z^2 in (III, 2) gleich Null setzen:

$$\int\int_Q \frac{\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\zeta}{R^3} \sin^2\vartheta\,(5\cos^2\vartheta - 1) \equiv \int\int_Q \mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\zeta\,\varrho^2 \frac{4\zeta^2 - \varrho^2}{(\varrho^2+\zeta^2)^{7/2}} = 0. \quad \text{(III. 3)}$$

Daraus erhält man beispielsweise für eine Spule mit rechteckigem Querschnitt der Breite $a = \varrho_2 - \varrho_1$ und der Höhe $b = \zeta_2 - \zeta_1$ die Gleichung

$$\frac{1}{\zeta_2}\left[\left(\frac{\varrho_2}{\sqrt{\varrho_2^2+\zeta_2^2}}\right)^3 - \left(\frac{\varrho_1}{\sqrt{\varrho_1^2+\zeta_2^2}}\right)^3\right] = \frac{1}{\zeta_1}\left[\left(\frac{\varrho_2}{\sqrt{\varrho_2^2+\zeta_1^2}}\right)^3 - \left(\frac{\varrho_1}{\sqrt{\varrho_1^2+\zeta_1^2}}\right)^3\right]. \quad \text{(III, 4)}$$

Trägt man zu ihrer graphischen Auflösung die linke Seite von (III, 4) als Funktion von ζ_2 auf und verschiebt dann diese Kurve um die Strecke b in der ζ-Richtung, so besitzt der Schnittpunkt der beiden Kurven als Abszisse den gesuchten Wert ζ_2. In Fig. 4 ist diese Konstruktion für dünne Spulen ($\varrho_2 - \varrho_1 = a \ll \varrho$) durchgeführt und zu diesem Zweck $\frac{3\,\zeta\,\varrho^2\,a}{\sqrt{\varrho^2+\zeta^2}^5}$ bei willkürlichem Ordinatenmaßstab als Funktion der dimensionslosen Größe ζ/ϱ aufgetragen. Dann ergeben sich für eine relativ kurze Spule, deren Länge b gleich dem halben Radius ist ($b = \varrho/2$), die Werte $\zeta_2 = 0{,}80\,\varrho$, $\zeta_1 = 0{,}30\,\varrho$, für eine Spule mit $b = \varrho$ die Werte

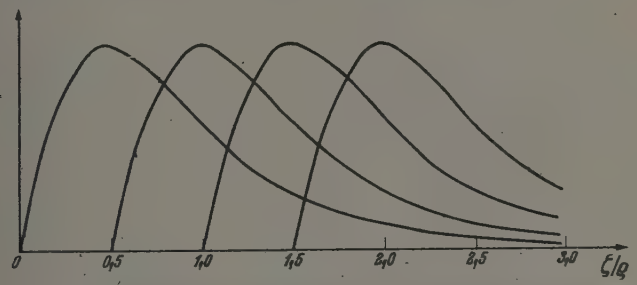


Fig. 4. Zur Konstruktion des richtigen Abstandes zweier gleicher dünner Spulen.

$\zeta_2 = 1{,}14\,\varrho$, $\zeta_1 = 0{,}14\,\varrho$ und für eine Spule mit $b = 3\,\varrho/2$ die Werte $\zeta_2 = 1{,}56\,\varrho$, $\zeta_1 = 0{,}06\,\varrho$. Mit zunehmender Spulenlänge wird also der durch $2\,\zeta_1$ gegebene Abstand der beiden Spulen immer kleiner; im Grenzfall $b \gg \varrho$ sind die beiden Spulen praktisch ohne Abstand aufzustellen und wirken dann zusammen wie eine einzige doppelte Spule [1]).

Aber auch bei anderen Querschnittsformen der Spulen läßt sich das Problem leicht (und zwar diesmal sogar rechnerisch) lösen, wenn nur die Querschnittsdimensionen klein sind gegen den Spulenradius und den Abstand der beiden Spulen. Dann kann man nämlich den Inte-

[1]) Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß das mit einem Spulenpaar erreichbare Feld an Homogenität das Feld in einer einzelnen Spule nur innerhalb eines kugelförmigen Bereiches von etwa halbem Spulenradius übertrifft, und zwar insofern, als das Doppelspulenfeld im Mittelpunkt einen Flachpunkt, das gewöhnliche Spulenfeld dort jedoch ein normales Extrem besitzt. In größeren Entfernungen vom Mittelpunkt ist ersteres im allgemeinen natürlich nicht so homogen wie das Feld in einer hinreichend langen Einzelspule.

granden in (III, 3), der vorübergehend mit $G(\varrho, \zeta)$ bezeichnet werden möge, in eine Taylor-Reihe nach Potenzen der Abstände $\varrho - \varrho_S$ und $\zeta - \zeta_S$ vom Schwerpunkt S der Querschnittsfläche entwickeln, wodurch (III, 3) übergeht in

$$\iint_Q \mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\zeta \Big\{ G(\varrho_S, \zeta_S) + (\varrho - \varrho_S)\Big(\frac{\partial G}{\partial \varrho}\Big)_S + (\zeta - \zeta_S)\Big(\frac{\partial G}{\partial \zeta}\Big)_S + \\ + \frac{1}{2}(\varrho - \varrho_S)^2\Big(\frac{\partial^2 G}{\partial \varrho^2}\Big)_S + (\varrho - \varrho_S)(\zeta - \zeta_S)\Big(\frac{\partial^2 G}{\partial \varrho\,\partial \zeta}\Big)_S + \\ + \frac{1}{2}(\zeta - \zeta_S)^2\Big(\frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2}\Big)_S + \cdots \Big\} = 0. \qquad \text{(III, 5)}$$

Von den hier auftretenden Integralen gibt das erste das Produkt aus Spulenquerschnitt Q und Wert der Funktion G im Schwerpunkt. Die beiden nächsten verschwinden wegen der Definition des Schwerpunktes. Die letzten drei Integrale

$$\left.\begin{aligned} \iint_Q \mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\zeta\,(\varrho - \varrho_S)^2 &= Q\,\overline{\Delta\varrho^2}, \\ \iint_Q \mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\zeta\,(\varrho - \varrho_S)(\zeta - \zeta_S) &= Q\,\overline{\Delta\varrho\,\Delta\zeta}, \\ \iint_Q \mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\zeta\,(\zeta - \zeta_S)^2 &= Q\,\overline{\Delta\zeta^2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III, 6)}$$

haben den Bau von Trägheitsmomenten und hängen wesentlich von der Querschnittsform ab. Speziell gilt für eine Spule von rechteckigem Querschnitt $a \cdot b$, für welchen der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt zusammenfällt,

$$\overline{\Delta\varrho^2} = \frac{a^2}{12}, \quad \overline{\Delta\varrho\,\Delta\zeta} = 0, \quad \overline{\Delta\zeta^2} = \frac{b^2}{12}. \qquad \text{(III, 7)}$$

Setzt man die Ausdrücke (III, 6), sowie den durch (III, 3) gegebenen Wert von G in (III, 5) ein, so erhält man

$$\frac{\varrho_S^3(4\zeta_S^3 - \varrho_S^3)}{(\varrho_S^3 + \zeta_S^3)^{7/2}} + \frac{1}{2(\varrho_S^3 + \zeta_S^3)^{11/2}}\Big\{\overline{\Delta\varrho^2}\,[-12\varrho_S^6 + 159\varrho_S^4\zeta_S^2 - 136\varrho_S^3\zeta_S^3 + 8\zeta_S^6] + \\ + \overline{\Delta\varrho\,\Delta\zeta}\cdot 10\varrho_S\zeta_S[-15\varrho_S^4 + 40\varrho_S^2\zeta_S^2 - 8\zeta_S^4] + \\ + \overline{\Delta\zeta^2}\cdot 15\varrho_S^2[\varrho_S^4 - 12\varrho_S^2\zeta_S^2 + 8\zeta_S^4]\Big\} + \cdots = 0. \qquad \text{(III, 8)}$$

Bei Vernachlässigung der Korrekturglieder in der geschwungenen Klammer findet man als Lösung dieser Gleichung natürlich die Helmholtz-Bedingung $\varrho_S = 2\,\zeta_S$ für ein einzelnes Drahtpaar. Zur Berechnung der Abweichung von der Helmholtz-Anordnung setzt man in den Zusatzgliedern die erste Näherung $\varrho_S = 2\,\zeta_S$ ein und erhält dann für den Unterschied zwischen ϱ_S und $2\,\zeta_S$ in nächster Näherung die Beziehung

$$\varrho_S^2 - 4\,\zeta_S^2 = \tfrac{1}{5}\{31\,\overline{\Delta\varrho^2} - 44\,\overline{\Delta\varrho\,\Delta\zeta} - 36\,\overline{\Delta\zeta^2}\}. \qquad \text{(III, 9)}$$

Beispielsweise wird für rechteckigen Spulenquerschnitt nach (III, 7)

$$\varrho_S^2 - 4\,\zeta_S^2 = \frac{31\,a^2 - 36\,b^2}{60}$$

oder

$$\zeta_S \approx \frac{\varrho_S}{2}\left(1 - \frac{31\,a^2 - 36\,b^2}{120\,\varrho_S^2}\right). \qquad \text{(III, 10)}$$

Sind die Spulen so gewickelt, daß $a/b = \sqrt{36/31} = 1{,}0776$ ist, so müssen sie so aufgestellt werden, daß für den Schwerpunkt ihres Querschnitts die Helmholtz-Bedingung erfüllt ist[1]). Besitzen die Spulen aber ein anderes Seitenverhältnis oder gar eine andere Querschnittsform, so kann man aus den obigen Formeln leicht die erforderliche Verlagerung der Spulen bzw. ihrer Querschnitts-Schwerpunkte gegenüber der Helmholtz-Anordnung erkennen.

In ähnlicher Weise wie die vorstehenden Formeln kann man auch einen Näherungsausdruck für das Zentralfeld H_0 durch Reihenentwicklung des ersten Gliedes in (III, 2) ermitteln. Für den betrachteten Fall eines einzelnen Spulenpaares in Helmholtz-Anordnung findet man auf diese Weise den der Gleichung (II, 9) entsprechenden Ausdruck

$$H_0 = \frac{8}{5\sqrt{5}}\,\frac{J\nu Q}{\varrho_S}\left(1 - \frac{\overline{\Delta\varrho^2} - 12\,\overline{\Delta\varrho\,\Delta\zeta}}{5\,\varrho_S^2} + \cdots\right), \qquad \text{(III, 11)}$$

und speziell für einen rechteckigen Spulenquerschnitt

$$H_0 = \frac{8}{5\sqrt{5}}\,\frac{J\nu Q}{\varrho_S}\left(1 - \frac{a^2}{60\,\varrho_S^2} + \cdots\right). \qquad \text{(III, 12)}$$

---

[1]) Im Artikel von F. Auerbach (s. o.) wird als Verhältnis $a : b = 1{,}097$ angegeben, was wohl auf einen Druckfehler zurückzuführen ist. Auf die Möglichkeit, auch bei anderem Spulenverhältnis die gleiche Homogenität wie bei der Helmholtz-Anordnung zu erreichen, wird dort nicht hingewiesen.

Es sei noch erwähnt, daß die vorstehenden Korrektionsrechnungen für kleine Spulenquerschnitte ohne weiteres auch auf mehrere Spulen ausgedehnt werden können. Beispielsweise hat man bei zwei Spulenpaaren an Stelle von (III, 8) nunmehr drei Gleichungen dieser Art für die drei Koeffizienten von z^2, z^4 und z^6 in (III, 2). Dann kann man entweder die Spulendimensionen berechnen, welche die für zwei einzelne Strömungspaare im II. Abschnitt gefundenen ϱ- und ζ-Werte ungeändert lassen, oder aber bei vorgegebenen Spulenquerschnitten die Korrekturen ermitteln, die an jenen Werten, genommen als Koordinaten der Schwerpunkte der Spulenquerschnitte, anzubringen sind, um die bestmögliche Feldhomogenität zu erzielen.

Zum Mechanismus der Sekundäremission im Inneren von Ionenkristallen.

Von M. Knoll, O. Hachenberg und J. Randmer.

Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 9. April 1943.)

Es wurde die auf das Innere bezogene, von Beeinflussungen durch atomare Oberflächenschichten weitgehend freie Sekundäremission von Ionenkristallen am KCl als Modellkörper bei Elektronengeschwindigkeiten zwischen 500 und 10000 Volt untersucht. — Die Sekundäremissionskennlinien (Fig. 2 und 3) zeigen im Vergleich zu den Metallen einen relativ hohen Ausbeutefaktor δ, der selbst bei 10 kV noch nicht unter 1 sinkt, eine starke Abnahme von δ mit steigender Temperatur und eine Verschiebung von δ max nach rechts zu höheren Elektronengeschwindigkeiten (1500 bis 2000 Volt). Mit steigender Temperatur wandert δ max wieder nach links. Bei längerer Erhitzung und Wiederabkühlung der Schicht auftretende Streuungen von δ (Kurve 4 in Fig. 3) werden auf feldemissionsartige Effekte oder auf den Ordnungszustand der Schicht zurückgeführt. — Längere oder starke Elektronenbestrahlung führt zu einer Abnahme der Sekundäremission, offenbar wegen einer teilweisen Absorption der Sekundärelektronen durch die F-Zentren (Fig. 2, Kurve 4, Fig. 5, 6 und 7) bzw. das kolloidale Kaliummetall; bei höheren Intensitäten erfolgt eine Abnahme der Sekundäremission durch Gitterzerstörung (Fig. 10). Erstere läßt sich durch Tempern wieder beseitigen, letztere nicht. Die Bildung der F-Zentren durch kurzwelliges UV führt zu demselben Resultat (Fig. 6 und 10). — Außer der Absorption durch F-Zentren läßt sich eine Absorption der Sekundärelektronen durch vorübergehend im Gitter lichtelektrisch oder durch Elektronenstoß ausgelöste Leitungselektronen beobachten (Fig. 8 und 9). Dies bedeutet eine direkte experimentelle Bestätigung der von der Theorie angenommenen energieverzehrenden Stoßprozesse von Elektronen gegeneinander. — Wie das Experiment zeigt, erscheint eine Aufdampfschicht von der Größenordnung 1 μ bei 5 bis 10 kV Elektronengeschwindigkeit noch durchsichtig für Sekundärelektronen (Fig. 4). Aus der hohen Sekundäremissionsausbeute, insbesondere bei hohen Primärgeschwindigkeiten, wird geschlossen, daß im Gegensatz zu Metallen die Sekundärelektronen im Isolator auf relativ große Strecken frei beweglich sind. — Aus den Beobachtungen ergeben sich eine Reihe von Folgerungen für die Sekundäremission des kristallinen Isolators, des kristallin-metallischen Zustandes und der hochemittierenden Metallegierungen (Abschn. 7).

Über die an verschiedenen Stoffen beobachteten unterschiedlichen Erscheinungen der Sekundäremission gibt es zur Zeit noch keine allgemein anerkannte einheitliche Deutung; ausführliche kritische Darstellungen der verschiedenen Meinungen und Beobachtungen hierüber finden sich bei Bruining und de Boer sowie bei Kollath, neuere theoretische Überlegungen bei Warnecke, Kadyschewitsch,

Maurer, Trey und Geyer[1]). Das bisher verwickelte und scheinbar widerspruchsvolle Bild dieses Vorgangs wird hauptsächlich dadurch hervorgerufen, daß wegen der vorwiegend angewandten relativ geringen Elektronengeschwindigkeiten ein Teil der Sekundäremission von dem Einfluß der eigentlichen Oberflächenschichten, ein anderer von dem Energieübertragungsmechanismus im Innern des Festkörpers beherrscht wird. Als daher durch verschiedene Beobachtungen bei höherer Elektronengeschwindigkeit wahrscheinlich gemacht war, daß bei isolierenden kristallinischen Verbindungen die Sekundärelektronen aus größeren Tiefen kommen als bei Metallen[2]), schien hiermit eine neue Möglichkeit gegeben, systematische Untersuchungen über das Wesen des Sekundäremissionsvorganges im Innern homogener Festkörper ungestört von Aktivierungseinflüssen der Oberfläche durchzuführen. Es zeigte sich bald, daß gerade die Isolatorkristalle sich in besonderem Maße für solche systematische Untersuchungen eignen, da bei ihnen die Beeinflussung der Sekundäremission durch Leitungselektronen sehr gering ist und infolgedessen andere die Sekundäremission mitbestimmende Einzelprozesse klar hervortreten. Als Prüfkörper wurde Kaliumchlorid gewählt, weil es relativ einfach zusammengesetzt ist, sich leicht aufdampfen läßt und sich beim Aufdampfen praktisch nicht verändert. Zudem sind gerade die physikalischen Eigenschaften des KCl durch Pohl und seine Mitarbeiter weitgehend erforscht[3]).

1. Versuchsanordnung.

Als Beobachtungsgerät diente ein Elektronenabtaster. Seine Wirkungsweise beruht bekanntlich darauf, daß ein spitzes Elektronenbüschel rasch hintereinander jeden Punkt einer zu untersuchenden Oberfläche rasterförmig überstreicht. Die zu jedem Oberflächenelement

---

[1]) H. Bruining, Die Sekundäremission fester Körper, Berlin 1942, sowie die dort zitierten Arbeiten von Bruining und de Boer; R. Kollath, Jahrb. AEG-Forschg. 9, 8, 1942; R. Warnecke, L'onde electrique 16, 509, 1937; A. E. Kadyschewitsch, Journ. Physics USSR. II, 115, 1940; G. Maurer, ZS. f. Phys. 118, 122, 1941; F. Trey, Phys. ZS. 44, 38, 1943; K. H. Geyer, Ann. d. Phys. 42, 337, 1942/43. — [2]) Vgl. z. B. M. Knoll, ZS. f. techn. Phys. 17, 615, 1936; Telef. Hausmitt. 20, 75, 1939, Nr. 81; ZS. f. Phys. 116, 397, 1940. Es handelt sich hierbei um Aluminiumoxyd, Magnesiumoxyd und Kristallphosphore. Im letzteren Falle und bei MgO-Rauch wurde (von B. Kühnreich) noch für Elektronengeschwindigkeiten von 60 kV, also Auslösetiefen von der Größenordnung 10 μ, ein Sekundäremissionsvermögen über 1 gefunden. — [3]) Vgl. z. B. den ausführlichen zusammenfassenden Bericht von R. W. Pohl, Phys. ZS. 39, 36, 1938.

gehörigen Sekundäremissionsströme werden verstärkt und ergeben auf dem Leuchtschirm einer Bildschreibröhre mit synchron laufendem intensitätsgesteuertem Kathodenstrahl ein Sekundäremissionsbild des Objektes. Da sich eine ausführliche Beschreibung derartiger Anordnungen an anderer Stelle findet[1]), sei hier nur auf die verwendete besondere Form der Abtaströhre und auf die Bedingungen für ein reines Sekundäremissionsbild eingegangen.

Abtaströhre und Herstellung der Schichten. Die Abtaströhre (Fig. 1) besteht bis auf ein zylindrisches Glasrohr in Höhe der Ablenkspulen ganz aus Metall[2]). Strahlerzeugersystem, Objektträger und Verdampfungsofen für das KCl (auf einem im Bilde nicht sichtbaren dritten Ansatzstutzen angebracht) sind auf Preßglasdurchführungen montiert und mittels Gummiringen leicht auswechselbar. Die Temperatur des heizbaren Objektträgers kann mit Hilfe eines Thermoelements

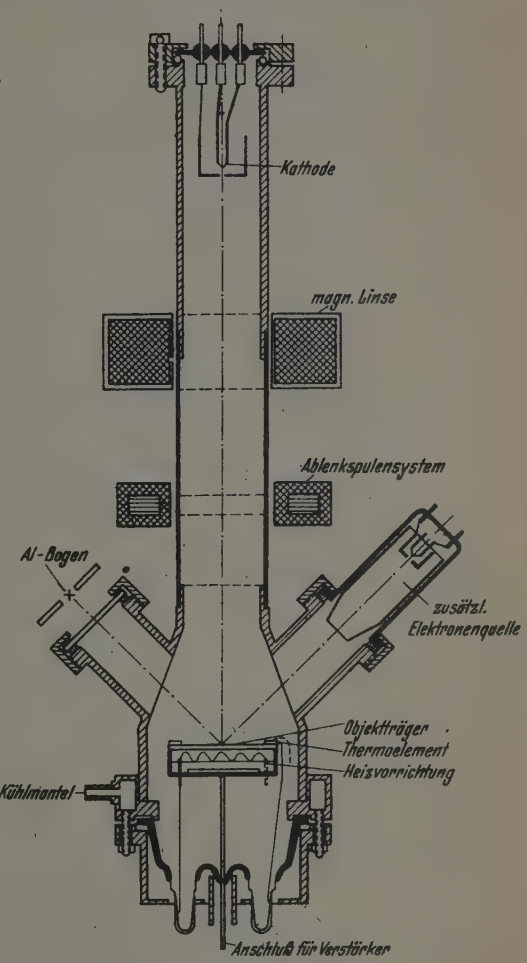


Fig. 1. Elektronen-Abtaströhre.

[1]) M. Knoll, ZS. f. techn. Phys. 11, 467, 1935; M. Knoll u. R. Theile, ZS. f. Phys. 113, 260, 1939. — [2]) Da bei der vorliegenden Arbeit nicht die Sekundäremission der Oberfläche, sondern hauptsächlich die tiefer liegender Schichten von Festkörpern untersucht wurde, konnte auf die wesentlich umständlichere Ausführung einer Anzahl abgeschmolzener und als Ganzes entgaster Abtaströhren verzichtet werden. Der Druck der mit einer Öl-Diffusionspumpe evakuierten Abtaströhre wurde dauernd durch ein Ionisations-Vakuummeter kontrolliert und war stets $\leqq 10^{-5}$ Torr.

verfolgt werden. Die Beobachtung der Schicht im Vakuum und ihre Bestrahlung mit Ultraviolettlicht erfolgt durch ein seitliches Ansatzrohr mit Bergkristallfenster; durch ein weiteres Ansatzrohr kann eine zusätzliche Elektronenbestrahlung erfolgen. Der Durchmesser des Objektträgers betrug etwa 5 cm; er konnte durch eine von außen magnetisch bewegbare Blende teilweise abgedeckt werden. Die Zeilenzahl des Abtastrasters war ~ 500, die Bildwechselzahl ~ 25/sec. Als UV-Lichtquelle für die Bildung von F-Zentren (Wellenlänge von 180 bis 200 mμ) diente eine Kondensatorentladung zwischen zwei Al-Elektroden, zur Löschung der F-Zentren eine Glühlampe mit vorgesetzter Linse (Beleuchtungsstärke im Lichtfleck auf dem Objektträger etwa 10^4 Lux).

Die Schichten wurden sämtlich in Form eines Keils direkt auf eine Molybdänplatte aufgedampft und dann meist sofort untersucht, doch zeigten in einem Versuchsgerät außerhalb hergestellte und dann erst in die Abtaströhre gebrachte Schichten durchweg sehr ähnliche Erscheinungen im Sekundäremissionsbild. Da es leicht möglich war, während des Aufdampfprozesses abzutasten, konnte eine gewünschte Schichtdicke sehr genau durch gleichzeitige Beobachtung des Sekundäremissionsbildes hergestellt werden (vgl. z. B. Abschn. 3).

Voraussetzungen für ein reines Sekundäremissionsbild. Die mit dem Elektronenabtaster erhaltenen Bilder geben bekanntlich bei Metallen eindeutig die Sekundäremissionsverteilung der betreffenden Oberfläche wieder, während bei schlecht leitenden Objekten noch Bilder der Widerstands-, Ladungs- und Kapazitätsverteilung überlagert sein können[1]). Besonders Widerstandsbilder wären für Schlüsse auf Sekundäremissionsänderungen störend gewesen, weil bei Lichtbestrahlung der Alkalihalogenidkristalle im Absorptionsband der F- und F'-Zentren bekanntlich auch deren Widerstand herabgesetzt wird [innerer lichtelektrischer Effekt[2])]. Bei einem Widerstandsbild liefert eine bestrahlte Stelle infolge Erhöhung ihrer Leitfähigkeit durch den inneren Photoeffekt eine *positive* Signalspannung an einem in der Zuleitung zur Objektplatte liegenden Arbeitswiderstand, erscheint also bei einer geraden Stufenzahl des Verstärkers weiß[3]).

---

[1]) Diskussion hierüber bei M. Knoll und R. Theile, l. c. — [2]) Dagegen wird durch das bloße Vorhandensein von F-Zentren (Verfärbung) entgegen der Erwartung keine merkliche Widerstandsabnahme an der verfärbten Stelle hervorgerufen. — [3]) Vgl. M. Knoll u. F. Schröter, Phys. ZS. 38, 330, 1937; R. Theile, Telefunkenröhre 13, 90, 1938. Tatsächlich wurden, insbesondere mit dickeren KCl-Schichten (5 bis 10 μ) bei niedrigeren Saugspannungen ($u_p \sim 20$ bis 40 Volt) auch solche Widerstandsbilder von mit Glühlampenlicht bestrahlten Stellen erhalten, wenn vorher F-Zentren, z. B. durch Elek-

Das durch Widerstandsänderung der Schicht entstehende Signal ist dann am größten, wenn der Innenwiderstand der Sekundäremissionsstrecke und der Widerstand des für die Stromleitung gerade herangezogenen Schichtelementes, der Bildpunktwiderstand, angenähert gleich sind. Will man das Widerstandssignal klein halten, so hat man also dafür zu sorgen, daß diese beiden Widerstände möglichst verschieden sind. Um Ladungsbilder zu vermeiden und die Nachlieferung von Sekundärelektronen aus dem Objektträger sicherzustellen, wird man also keinen großen, sondern einen im Verhältnis zum Innenwiderstand der Sekundäremissionsstrecke *kleinen* Schichtwiderstand anstreben, wobei die Schichtdicke wenigstens von der Größenordnung der Elektronenreichweite sein muß. Praktisch wurden Schichtdicken von der Größenordnung 1 μ gewählt, deren Dicke durch Wägung und durch Beobachtung der Farben dünner Blättchen bzw. der Interferenzstreifen im Natriumlicht kontrolliert wurde[1]). Bei dieser Schichtdicke zeigten sich im Gegensatz zu Aufdampfschichten von einer Dicke von der Größenordnung 10 μ keinerlei Anhaltspunkte für das Auftreten irgendwelcher Ladungsbilder bzw. Bilder der Kapazitätsverteilung.

Es ist nun noch nötig, den Innenwiderstand der *Sekundäremissionsstrecke* möglichst groß zu machen. Dies erreicht man durch kleine Abtastströme und (wirksamer) durch hohe Saugspannungen u_p, die schon im Sättigungsbereich der i_p/u_p-Kennlinien liegen müssen. Um den Sättigungscharakter der i_p/u_p-Kennlinie zu kontrollieren, wurden diese Kennlinien für die verschiedenen gebrauchten Zustände der Schicht aufgenommen (Fig. 2). Man erkennt, daß bei einer Saugspannung $u_p = 100$ Volt die Sekundäremissionsströme nahezu gesättigt sind, daß also hier der Innenwiderstand der Sekundäremissionsstrecke groß sein muß gegenüber dem Bildpunktwiderstand. Durch Anlegen der Tangente an die Kurve 1 in diesem Punkte ergibt sich ein Innenwiderstand der Sekundäremissionsstrecke von der Größenordnung 10^9 Ohm. Die Widerstandserniedrigung der Schicht infolge der Temperaturerhöhung, die im wesentlichen auf Ionenleitung beruht, macht sich nur durch die wenig verschiedene Steilheit der Kurven im Raumladungsgebiet bemerkbar.

---

tronenbestrahlung, gebildet waren. Die bestrahlte Stelle erschien dann z. B. bei $u_p = +30$ Volt weiß (Widerstandsbild), bei $u_p = +100$ Volt aber immer noch schwarz (vgl. Fig. 9, reines Sekundäremissionsbild). Solche Widerstandsbilder sind unabhängig von unseren Untersuchungen schon früher von B. Bartels (Telefunken) an dickeren KCl-Schichten beobachtet worden (mündl. Mitteilung). — [1]) Die Wägung ergibt stets eine etwas zu kleine Schichtdicke, wenn an Stelle der unbekannten Dichte der Schicht diejenige des Einkristalls ($d = 2{,}0$) eingesetzt wird.

An Hand der Kennlinien ist es nun auch möglich, einen Maximalwert für die Größe des Bildpunktwiderstandes zu erhalten. Man ermittelt hierzu zunächst diejenige Saugspannung u_p, bei der sich das kräftigste Widerstandsbild — etwa das Widerstandsbild eines auf die

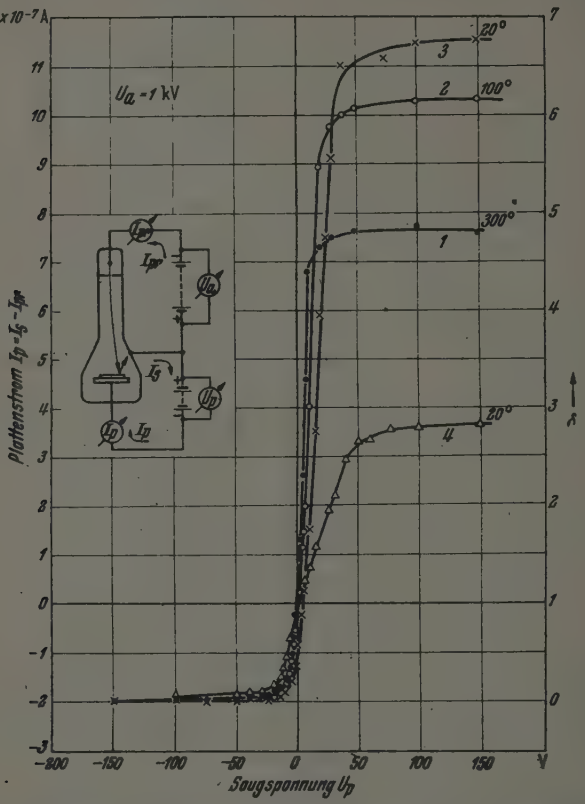


Fig. 2. Abhängigkeit des Plattenstromes und der Ausbeute δ von der Saugspannung. Kurven 1 bis 3 bei verschiedenen Temperaturen, Kurve 4 nach einer vierstündigen Bestrahlung derselben Schicht mit 1 kV-Elektronen von $3 \cdot 10^{-6}$ A/cm². Schichtdicke von der Größenordnung 1 μ; $i_{pr} = 2 \cdot 10^{-7}$ A.

$$\delta = \frac{i_s}{i_{pr}} = \frac{i_p + i_{pr}}{i_{pr}}.$$

Schicht projizierten Lichtflecks — einstellt. Z. B. entnimmt man aus der Kennlinie 3 für 20° C mit einer so bestimmten Saugspannung $u_p = 20$ bis 40 Volt aus der Tangente an die Kennlinie in diesem Arbeitspunkt die Summe aus Bildpunktwiderstand und Innenwiderstand

der Sekundäremissionsstrecke zu $3 \cdot 10^7$ Ohm. Der Bildpunktwiderstand ist also sicher kleiner als diese Summe[1]).

Es wurde im folgenden immer mit $u_p = 100$ Volt gearbeitet, was bei einer Abtaststromstärke von $0{,}2 \cdot 10^{-6}$ Amp. einem Innenwiderstand der Sekundäremissionsstrecke von der Größenordnung 10^9 Ohm entspricht, also mindestens etwa dem Dreißigfachen des oben geschätzten maximalen Bildpunktwiderstandes der Schichten. *Die unter diesen Arbeitsbedingungen des Abtasters erhaltenen Bilder sind also eindeutig echte Sekundäremissionsbilder.*

2. Kennlinien und Temperaturabhängigkeit der Sekundäremission des KCl.

Fig. 3 zeigt die in der Abtaströhre an ein und derselben Schicht bei einem Strahlquerschnitt von etwa 1 cm² gemessene Abhängigkeit

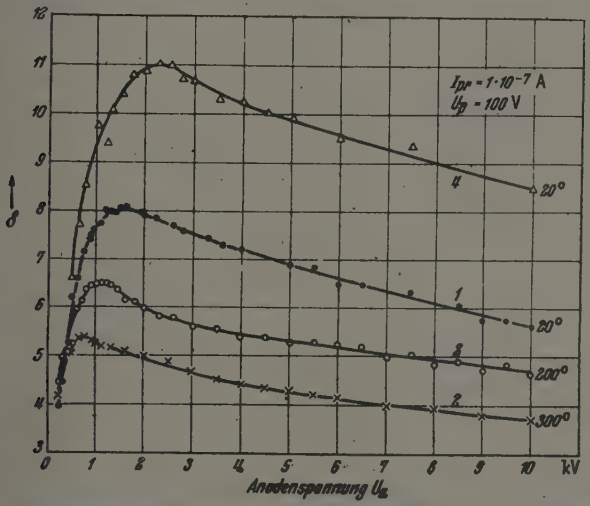


Fig. 3. Abhängigkeit des Sekundäremissionsvermögens δ des K Cl von Elektronengeschwindigkeit und Temperatur. Kurve 3 nach Abkühlen von 300 auf 200° C gemessen. Kurve 4 zeigt anormal hohes δ nach zweistündiger Erhitzung auf 300° C. Schichtdicke von der Größenordnung 1 μ;

$$\delta = \frac{i_s}{i_{pr}} = \frac{i_p + i_{pr}}{i_{pr}}.$$

[1]) Für die benutzte Rastergröße von 10×10 cm² war der Bildpunktquerschnitt etwa 0,06 mm²; der Bildpunktwiderstand ergibt sich daraus auf Grund der Messungen von Lehfeldt, ZS. f. Phys. 85, 717, 1933, bei 300° C zu etwa $5 \cdot 10^9$ Ohm, bei Zimmertemperatur extrapoliert zu etwa 10^{16} Ohm. Doch sind diese Werte sicher um viele Größenordnungen zu hoch, da die Messungen von Lehfeldt am reinen unbestrahlten Einkristall vorgenommen werden. Denn nicht nur die Bestrahlung der schon durch den Abtaststrahl leicht „verfärbten" KCl-Schicht mit Licht, sondern auch die beim Abtastvorgang auftretende Durchstrahlung mit Elektronen kann ein erhebliches Ansteigen der Leitfähigkeit verursachen.

des Sekundäremissionsvermögens δ von der Elektronengeschwindigkeit bei verschiedenen Temperaturen. Bei Zimmertemperatur (Kurve 1) ist gegenüber den Metallen vor allem der schon von Bruining und de Boer gefundene relativ hohe Wert von δ auffällig, ferner die Verschiebung des Maximums von δ zu höheren Elektronengeschwindigkeiten (> 1000 Volt statt < 1000 Volt wie bei den meisten Metallen) und schließlich die Tatsache, daß selbst bei 10 kV δ noch nicht unter 1 gesunken ist, während bei den Metallen der Schnittpunkt der Kurve mit ($\delta = 1$) schon bei 2 kV erfolgt.

Mit höherer Temperatur nimmt δ bei allen Elektronengeschwindigkeiten stark ab, was bisher noch an keinem Festkörper bekannt war; das Sekundäremissionsvermögen bleibt aber selbst bei 10 kV immer noch wesentlich größer als 1 (Kurven 2 und 3). Das Maximum verschiebt sich mit zunehmender Temperatur nach links.

Ein anomaler Anstieg des Sekundäremissionsvermögens, und zwar um nahezu 50 %, zeigte sich bei der hier untersuchten dünneren Seite eines KCl-Keils, nachdem die Schicht längere Zeit (etwa 2 h) auf 300° C gehalten wurde (Kurve 4). Da das hohe Sekundäremissionsvermögen bei wiederholter weiterer Erhitzung wieder abnahm, handelt es sich hier entweder um durch Dünnerwerden der Schicht infolge Abdampfung verursachte Feldemission[1]), oder um eine durch die Temperung hervor-

[1]) Dabei kann sich entweder die Schichtoberfläche positiv (z. B. bei der benutzten Objektträgervorspannung von 100 Volt auf 80 Volt gegen die Anode, d. h. auf + 20 Volt gegen den Objektträger) oder das Schichtinnere gegen die Schichtoberfläche bzw. sogar gegen den Objektträger negativ aufladen. Zur Aufladung der Schichtoberfläche vgl. L. Malter, Phys. Rev. 49, 478, 1936; 50, 48, 1936; E. R. Piore, ebenda 51, 1111, 1937 und H. Mahl, ZS. f. techn. Phys. 18, 559, 1937, zur Aufladung des Schichtinnern: H. Hintenberger, ZS. f. Phys. 114, 98, 1939. Der parallele Verlauf der Kurven 1 und 4 in Fig. 3 scheint darauf hinzudeuten, daß hier, wenn überhaupt, der erstere Fall vorliegt. Auch Geyer (l. c.) führt ein bei Elektronengeschwindigkeiten von 400 Volt und Schichtdicken von der Größenordnung 0,1 μ an NaCl in Abhängigkeit von der Schichtdicke gefundenes Ausbeutemaximum auf Feldemission zurück. Doch kann allein schon die mit der Feldstärke anwachsende Vorzugsrichtung der Elektronendiffusion (vgl. R. W. Pohl, l. c. S. 47) eine Erhöhung der Sekundäremissionsausbeute bewirken. Ferner ist stets der Einfluß noch nicht innerhalb der Reichweitenzone liegender Kristallschichten auf die Elektronennachlieferung zu berücksichtigen, welche durch Zuschalten ihres Widerstandes in den Sekundäremissionskreis die Sekundäremissionskurve in unkontrollierbarer Weise verändern. Ändert sich bei Herabsetzen dieses Zuschaltwiderstandes, z. B. durch UR-Ausleuchtung, die Kennlinie, so geht daraus hervor, daß es sich bei der gewählten Saugspannung um keine echte Sekundäremissionskennlinie gehandelt hat. M. Vudynski benutzt die Herabsetzung dieses Zusatzwiderstandes

gerufene bessere Kristallordnung der Schicht (vgl. Abschn. 3). Allgemein zeigt sich durch diesen und andere Versuche, daß die Sekundäremissionskurven, die an verschieden hoch und verschieden lange erhitzten Schichten aufgenommen wurden, erhebliche Streuungen aufweisen können und daß bei den Messungen entsprechende Vorsicht anzuwenden ist.

In der i_p/u_p-Kennlinie (Fig. 2) zeigt sich, an einer anderen Schicht aufgenommen, noch einmal unmittelbar das Sinken der Sekundäremission mit zunehmender Temperatur des KCl. Bei der Messung der Kurven 1 bis 3 wurde von der heißen Schicht ausgegangen; in dieser Reihenfolge bilden sich bei Aufnahme der Kurve 3 (Zimmertemperatur) die wenigsten F-Zentren. Da nämlich, wie später gezeigt wird, die F-Zentren die Ausbeute vermindern, mußten alle Messungen mit möglichst kleiner Primärstromdichte durchgeführt werden, damit ihr Einfluß vernachlässigbar blieb. Als Beispiel für das Gegenteil dient Kurve 4, die nach etwa 4stündiger Bestrahlung mit $\sim 3 \cdot 10^{-8}$ A/cm², also nach Bildung einer großen Zahl von F-Zentren, erhalten wurde und eine mehr als 50%ige Abnahme des Sekundäremissionsvermögens zeigte. Wesentlich an diesen Kurven erscheint uns auch der (bei höheren Temperaturen noch etwas zunehmende) ausgesprochene Sättigungscharakter im Gebiet hoher Saugspannungen. Dies zeigt, daß die von Bruining (l. c. S. 47) vertretene Auffassung, daß isolierende Verbindungen einen schlechten Sättigungswert aufweisen, für genügend dünne Schichten und kleine Ströme nicht gilt. Der gute Sättigungscharakter zeigt ferner das Fehlen einer von äußeren Aufladungen abhängigen Feldemission in dieser Schicht und ist demnach eine Kontrolle für das Vorliegen einer „echten" Sekundäremission.

Aus den verschiedenen Messungen ist besonders die relativ starke *Abnahme des Sekundäremissionsvermögens* einer kristallinen KCl-Schicht *mit zunehmender Temperatur* hervorzuheben, die in völligem Gegensatz zu den Metallen steht, wo bisher selbst in großen Temperaturintervallen eine Sekundäremissionsänderung nie festgestellt werden konnte. Untersucht man die Art dieser Abhängigkeit näher, so stellt sich heraus, daß die Sekundäremission etwa umgekehrt proportional zur absoluten Temperatur verläuft. Dieser Effekt ist nicht etwa auf die zunehmende Absorption durch Leitungselektronen zurückzuführen, sondern darauf, daß die Gitterschwingungen bei höherer Temperatur das Austreten

durch Erwärmung bewußt, um die wahre Sekundäremission dickerer Isolatorschichten zu bestimmen (Journ. Techn. Physics USSR. 8, 790, 1938). Eine zusammenfassende Darstellung der Feldemissionsprobleme gibt F. Trey (l. c.).

der Sekundärelektronen immer mehr verhindern. In Übereinstimmung damit steht der Befund von Glaser[1]), wonach der Schubweg der Photoelektronen im KCl-Kristall in demselben Temperaturintervall einen Gang proportional $1/T_{abs}$ aufweist.

3. Reichweite der Primär- und der Sekundärelektronen im KCl.

Wie erwähnt, durfte zur Gewinnung „echter" Sekundäremissionsbilder und -kurven die Dicke der aufgedampften Schichten nicht wesentlich größer sein als die Reichweite der Primärelektronen. Um diese zu kontrollieren und den Anteil der aus der metallischen Unterlage stammenden Sekundärelektronen festzustellen, bedienten wir uns einer schon früher entwickelten Methode. Sie beruht auf der Beobachtung, daß beim Elektronenabtaster mit Erhöhung der Geschwindigkeit der Abtastelektronen immer tiefere Schichtzonen eines Festkörpers in ihrer Struktur sichtbar werden[2]). Es wurde das Sekundäremissionsbild eines KCl-Keils hergestellt, der statt auf eine Molybdänplatte auf eine polierte Kupferscheibe aufgedampft war. In diese war vorher eine Anzahl von Silbernieten eingezogen, die durch die größere Sekundäremission des Silbers im Sekundäremissionsbild als weiße Punkte auf einem dunkleren Untergrund erschienen (Fig. 4a).

Es wurde nun so lange aufgedampft, bis bei 5 kV Elektronengeschwindigkeit das Sekundäremissionsbild der Unterlage völlig verschwunden war (Fig. 4b). Erhöhte man die Elektronengeschwindigkeit auf 10 kV, so erschien das Bild der Unterlage wieder (Fig. 4c); hieraus ergab sich, daß das Sekundäremissionsbild und die Messungen bei einer derartigen Schichtdicke bis 5 kV von einem Einfluß der Unterlage frei sein mußten; ferner konnte man schließen, daß die Reichweite für 5 bis 10 kV-Elektronen angenähert der Schichtdicke des KCl-Keils entsprach. Die Schichtdicke wurde durch Auszählen der Interferenzstreifen[3]) zu 0,3 bis 1,0 μ festgestellt, in Übereinstimmung mit den Angaben der Literatur für die Reichweite in Aluminium[4]), wenn man sie auf gleiche Dichte bezieht. Sämtliche folgenden Versuche konnten dann bei nahezu gleicher Schichtdicke ausgeführt werden.

[1]) R. W. Pohl, Ann. d. Phys. **29**, 243, 1937; G. Glaser, Gött. Nachr., Math.-Phys. Kl., **3**, 31, 1937. — [2]) Unveröffentlichte Arbeiten aus dem Röhrenlaboratorium der Techn. Hochschule Berlin; vgl. auch M. Knoll, ZS. f. techn. Phys. **17**, 615, 1936. — [3]) Die Dicke ergibt sich an der Stelle des 1., 2., 3. usw. Interferenzstreifens angenähert zu $d = \frac{1}{4n}\lambda$ bzw. $\frac{3}{4n}\lambda$ bzw. $\frac{5}{4n}\lambda$ usw., wobei $n = 1{,}5$ der Brechungsindex des KCl ist. — [4]) Handb. d. Phys. **22**, II, S. 35.

Für den Mechanismus der Sekundäremission ergeben sich darüber hinaus noch folgende Gesichtspunkte. Für die Entstehung des Bildes der Unterlage kann man sich zwei Grenzfälle denken: *Entweder* stammen die es hervorrufenden Sekundärelektronen aus der Unterlage und die Durchlässigkeit des Isolatorkristalls für diese ist außergewöhnlich hoch[1]),

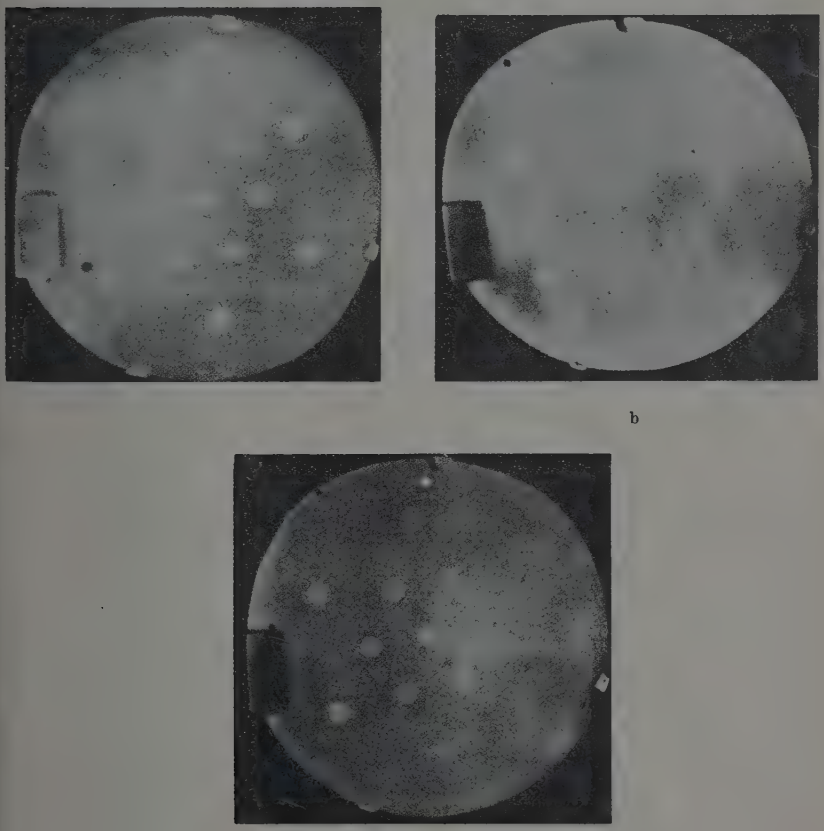


Fig. 4. Zur Bestimmung der Reichweite der Primärelektronen und der Auslösetiefe der Sekundärelektronen.
a) Cu-Platte mit Ag-Nieten, unbedampft.
b) Dieselbe Platte nach Bedampfen mit einem KCl-Keil, mit 5 kV-Elektronen abgetastet.
c) Dieselbe Schicht, mit 10 kV-Elektronen abgetastet.

[1]) Nach Rechnungen bzw. Beobachtungen von Kadyschewitsch (l. c.), Bruining (Physica 3, 1040, 1936), sowie Eucken und Riedel (Naturwissensch. 24, 696, 1936) werden langsame Elektronen in einer *Metall*schicht von 0,01 bis 0,1 μ Dicke praktisch schon völlig absorbiert.

oder die Sekundärelektronen werden erst in der oberen KCl-Schicht durch die in der Unterlage mehr oder weniger absorbierten schnellen rückdiffundierten Primärelektronen ausgelöst.

Um zu einer Entscheidung hierüber zu kommen, wurden weitere Beobachtungen an Aufdampfschichten aus W, Fe und Al ausgeführt. Da dort die zum Verschwinden der Unterlage erforderlichen Schichtdicken, auf gleiche Dichte bezogen, nur wenig kleiner waren als beim KCl, bei den Metallen andererseits die Beweglichkeit der langsamen Sekundärelektronen sicher nur gering ist[1]), muß also bei den Metallen angenommen werden, daß der zweite Fall zutrifft, daß also der größte Teil der das Bild hervorrufenden Sekundärelektronen durch rückdiffundierte Primärelektronen ausgelöst wird[2]).

Bei KCl wurde außerdem beobachtet, daß der Kontrast der Unterlage mit Erhöhung der Temperatur auf 300° C erheblich zurückging und bei Wiederabkühlung auf Zimmertemperatur den ursprünglichen Wert wieder annahm. Bei metallischen Aufdampfschichten war dagegen das Bild unabhängig von der Temperatur. Da die Absorption der verhältnismäßig schnellen rückdiffundierten Elektronen im Festkörper nicht wesentlich durch dessen Temperatur beeinflußt sein kann, müssen wir zusätzlich annehmen, daß bei Isolatorkristallen ein Teil der das Bild hervorrufenden Sekundärelektronen direkt in der Unterlage ausgelöst wird. Diese werden mit zunehmender Temperatur durch Gitterschwingungen am Durchlaufen der KCl-Schicht gehindert, wodurch der Bildkontrast herabgesetzt wird. Wir müssen also annehmen, daß bei Ionenkristallen die Durchlässigkeit für Sekundärelektronen eine wesentlich größere ist als bei Metallen, daß also beim Isolator im Gegensatz zum Metall die Sekundärelektronen aus der gesamten Reichweitenzone der Primärelektronen stammen, was auch im Hinblick auf die gemessene hohe Ausbeute der Schichten wahrscheinlich erscheint.

Eine Erklärung dafür ist darin zu suchen, daß bei den Ionenkristallen die Sekundärelektronen an den äußeren Elektronenschalen der Gitterionen mit ihrer relativ hohen Ablösearbeit (6,8 Volt) elastisch reflektiert werden im Gegensatz zu den Metallen, wo sie durch Zusammenstoß mit Leitungs-

---

[1]) Siehe Note 1 auf S. 11. — [2]) Entsprechend den Vorstellungen von P. Lenard (Quantitatives über Kathodenstrahlen, S. 226, 1918), A. Becker (Ann. d. Phys. **17**, 381, 1905; **78**, 253, 1925) und K. H. Stehberger (ebenda **86**, 825, 1928), wonach der größte Teil der Sekundärelektronen durch rückdiffundierte Primärelektronen ausgelöst wird.

elektronen vielfach zur Absorption gelangen[1]). Die Beobachtungen stehen auch in Übereinstimmung mit dem von Pohl auf anderem Wege (l. c.) gefundenen großen Diffusionsvermögen langsamer Elektronen in Ionenkristallen. Die von anderen Autoren vertretene Meinung, daß die Sekundärelektronen auch bei Isolatoren wie bei Metallen zum größten Teil aus Tiefen von nicht über 50 mμ stammen müssen, trifft also wenigstens für die Alkalihalogenidkristalle, wahrscheinlich aber für viele Ionenkristalle bestimmt nicht zu.

Gewisse Anzeichen lassen erkennen, daß bei längerem Stehenlassen der Schicht unter Vakuum oder bei Temperung die Durchlässigkeit für Sekundärelektronen noch weiter ansteigt; dies würde wie der bei der Kurve 4 in Fig. 3 beobachtete starke Sekundäremissionsanstieg auf einen Einfluß des Kristallisationszustandes hindeuten.

4. Einfluß der F-Zentren auf die Sekundäremission.

Die *F*-Zentren werden bekanntlich durch Elektronenstoß oder durch Einstrahlen von kurzwelligem UV ($\lambda = 180$ bis 200 mμ) in den Kristall gebildet und rufen ihrerseits durch eine (bei kleiner Strahlungsenergie oder sehr dünnen Schichten nicht sichtbare) Verfärbung eine neue Absorptionsbande im Gebiet 560 mμ hervor. Über ihren Einfluß kann man aus Beobachtungen von Bruining und de Boer[2]) einige Schlüsse ziehen, welche feststellen, daß die Sekundäremission von NaCl bei Bestrahlung mit Elektronen im Laufe einer gewissen Zeit auf einen Bruchteil ihres ursprünglichen Wertes abnimmt (vgl. Fig. 5, untere Kurve). Da die Autoren diese Veränderung bei ihren Versuchen, durch eine Behandlung der Schicht mit Sauerstoff wieder rückgängig machen konnten, deuteten sie den Rückgang der Sekundäremission durch Ausscheidung von Alkalimetall in Form von *F*-Zentren und kolloidalen Inseln in der Oberflächenschicht.

Durch Messung des Sekundäremissionsstromes einer frischen KCl-Schicht auf einer Metallunterlage in der Abtaströhre (Fig. 1) konnten wir die Abnahme des Sekundäremissionsvermögens mit der Bestrahlungszeit auch für KCl bei verschiedenen, auch höheren Elektronengeschwindigkeiten bestätigen (Fig. 5b). Die Zahl der bei derartigen Versuchen in der dünnen Reichweitenzone der Primärelektronen

[1]) Hilsch stellt z. B. durch Messung der Reflexion langsamer Primärelektronen an KCl fest, daß Elektronen $< 7{,}1$ Volt im Kristallgitter nur noch elastisch reflektiert und nicht mehr absorbiert werden (ZS. f. Phys. 77, 427, 1932). — [2]) H. Bruining u. I. H. de Boer, Physica 6, 823, 1939; H. Bruining, l. c., S. 44.

entstandenen F-Zentren ist so gering, daß bei der angewandten Stromdichte ($\sim 5 \cdot 10^{-8}$ A/cm²) eine sichtbare Verfärbung noch nicht zu erkennen ist. Also kann nach diesen Versuchen der Rückgang der Sekundäremission mit der Bestrahlung nicht ohne weiteres auf den Einfluß der F-Zentren zurückgeführt werden.

Durch gleichzeitige Wiedergabe einer mit UV und einer durch Elektronen verfärbten Schichtstelle im Sekundäremissionsbild sollte nun festgestellt werden, ob in der Tat die im Innern des Kristalls gebildeten F-Zentren die Sekundäremissionsabnahme hervorrufen. Da

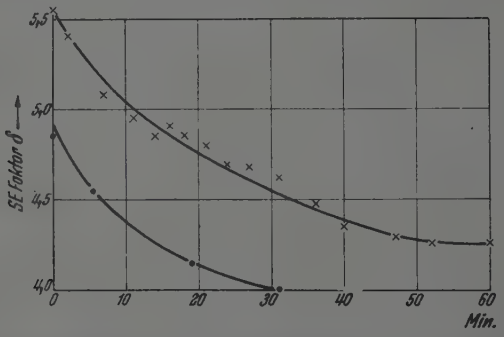


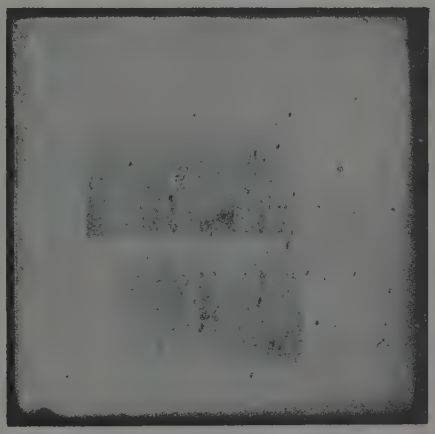
Fig. 5. Rückgang der Sekundäremission von Alkalihalogenidschichten durch Elektronenbestrahlung. Untere Kurve: NaCl, Elektronengeschwindigkeit 200 Volt, Stromdichte von der Größenordnung 10^{-7} A/cm² (Bruining und de Boer). Obere Kurve: KCl, Elektronengeschwindigkeit 1000 Volt, Stromdichte $3 \cdot 10^{-8}$ A/cm².

bekannt ist, daß sich die F-Zentren durch Temperaturerhöhung auslöschen lassen, müßte sich ein derartiger Effekt durch Wiederkehr der alten Sekundäremission der Schicht ebenfalls zeigen.

Es wurde deshalb auf einer Schicht (Fig. 6a) die Stelle u 10 min mit dem Al-Bogen durch eine darüberliegende Blende bestrahlt. Dann wurde an der Stelle e eine etwa ebenso große Fläche mit einer Elektronenstromstärke von $8 \cdot 10^{-7}$ A/cm² 2 min verfärbt. Die Verfärbung der Stelle e war dann visuell erkennbar, die der Stelle u noch nicht. Im Sekundäremissionsbild erschienen nun beide durch den verringerten Sekundäremissionsstrom deutlich gegenüber ihrer Umgebung verdunkelt (Fig. 6a). Die zugehörige quantitative Abnahme des Sekundäremissionsfaktors läßt sich unter der Annahme, daß das Produkt aus Bestrahlungsstromdichte und Bestrahlungszeit konstant ist, aus der oberen Kurve, Fig. 5, zu etwa 5% abschätzen. Nach Ausheizen auf 350° C verschwand die Verfärbung sowohl visuell wie im Sekundäremissionsbild. Mit dem Verschwinden der F-Zentren ist also auf der ganzen Schicht wieder die

Sekundäremission des reinen K Cl vorhanden. Da bei so langen Bestrahlungszeiten unter den *F*-Zentren bzw. Kaliumatomen sicher auch kolloidale Kaliumteilchen vorhanden sind, ist die Herabsetzung der Sekundäremission hier beiden zuzuschreiben.

Die günstigen Bedingungen der Versuchsanordnung lassen es zu, daß das Verhalten der Schicht auch bei kürzester Bestrahlungszeit und entsprechend geringer Zahl der ausgeschiedenen *F*-Zentren durch Vergleich des Kontrastes der bestrahlten und der unbestrahlten Fläche beobachtet werden kann. Um die Anzahl der *F*-Zentren abzuschätzen, welche eine eben noch im Elektronenabtaster meßbare Herabsetzung der Sekundäremission ergeben, wurde nur eine mittlere Zone der Schicht kurzzeitig mit einer Stromstärke von $0{,}6 \cdot 10^{-6}$ A bzw. $1{,}36 \cdot 10^{-7}$ A/cm² bei 5 kV abgetastet und dann das Bild der ganzen, bis auf die mittlere Zone noch unbeeinflußten Schicht aufgenommen (Fig. 7). Es zeigte sich erst bei einer Abtastdauer der Mittelzone von etwa 2 min eine gerade noch erkennbare dauernde Herabsetzung der Sekundäremission dieser Zone.



a

b

Fig. 6. Sekundäremissionshindernde Wirkung der durch UV (*u*) und durch Elektronenbeschuß (*e*) gebildeten *F*-Zentren. a) K Cl-Schicht unmittelbar nach der Bestrahlung (Stelle *e*: 5 kV, 10^{-6} A bzw. $8 \cdot 10^{-7}$ A/cm², Stelle *u*, Al-Bogen: 2 Minuten lang). b) Nach Tilgung der *F*-Zentren durch mehrere Minuten langes Erhitzen auf 350° C.

Berücksichtigt man nun, daß die visuelle Erkennbarkeit und optische Meßbarkeit der Verfärbung bei KCl-Einkristallen von 10 mm Dicke etwa bei $5 \cdot 10^{14}$ Zentren pro cm^3 [1]), bei Schichten von 1 μ Dicke also bei $5 \cdot 10^{18}$ Zentren/cm^3 liegt, sowie die Tatsache, daß bei dem Versuch nach Fig. 6a zur Herstellung einer eben noch *sichtbaren* Verfärbung der KCl-Schicht bei gleicher Bestrahlungsdauer eine etwa sechsmal größere Stromdichte erforderlich war, so ergibt sich, daß etwa 10^{18} Zentren/cm^3 eben noch durch Sekundäremissionsmessung feststellbar sind. Die Sekundäremissionsmessung ist also für derart dünne Schichten etwas empfindlicher als direkte Absorptionsmessungen. Ein einfacher Überschlag ergibt ferner, daß größenordnungsmäßig von jedem 5 kV-Primärelektron nicht mehr als 1 bis 10 *F*-Zentren gebildet werden.

Aus dem letzten Versuch geht weiter hervor, daß die von Bruining und de Boer[2]) in Betracht gezogene Möglichkeit, wonach bei kleiner Zahl der *F*-Zentren die Sekundäremission mit steigender *F*-Zentrenzahl zunehmen könnte, also die untere Kurve Fig. 5 in der Nähe der Ordinate ein Maximum hat, nicht besteht. Die Herabsetzung der Sekundäremission durch die *F*-Zentren beginnt vielmehr schon nach einigen Sekunden bzw. schon nach Bildung einer außerordentlich kleinen Zentrenzahl, bei der auch eine Verfärbung visuell noch nicht erkennbar ist.

Die beobachteten Erscheinungen sind zunächst überraschend, da man wegen der geringen Bindungsenergie der äußeren Elektronen der Kaliumatome, die im Kristallverband nur 2,2 Volt beträgt, und wegen der von mehreren anderen Forschern zweifellos nachgewiesenen Erhöhung der Sekundäremission durch auf Oxyde niedergeschlagene bzw. in diese eindiffundierte Alkaliatome[3]) im Gegenteil eine Erhöhung der Sekundäremission an den verfärbten Stellen erwarten sollte. Nur bei Vorhandensein *kolloidaler* Metallausscheidungen wäre die Herabsetzung der Sekundäremission verständlich; diese liegen aber, insbesondere bei dem Versuch nach Fig. 7, mit großer Wahrscheinlichkeit noch nicht vor, selbst nicht bei den schon mit dem Auge erkennbaren schwachen Verfärbungen, wie man aus deren violetter Farbe schließen kann.

Nach dem Vorgang von Bruining und de Boer[4]) wurde schließlich versucht, durch Behandlung mit Sauerstoff das Sekundäremissionsvermögen der „verfärbten" Stellen wieder zu erhöhen. Dies gelang aber

[1]) Vgl. H. Mollwo, ZS. f. Phys. 85, 56, 1933. — [2]) l. c., S. 825, Anmerkung. — [3]) R. Suhrmann, mündliche Mitteilung. — [4]) H. Bruining u. I. H. de Boer, Physica 6, 823, 1939.

selbst bei einstündiger Anwendung einer Glimmentladung nur in geringem Umfange, wahrscheinlich weil die genannten Autoren bei wesentlich niedrigeren Elektronengeschwindigkeiten (200 Volt an Stelle von 500 bis 10000 Volt) gearbeitet haben, bei denen die an der äußersten Oberfläche adsorbierten Atomschichten noch eine wesentliche Rolle spielen, während bei höheren Geschwindigkeiten die Sekundärelektronen größtenteils aus dem Innern des festen Körpers stammen. Dieser Versuch bestärkt den Schluß, daß nicht etwa nur freies, an der Oberfläche abgeschiedenes kolloidales Kalium, sondern auch die im Kristallinnern vorhandenen *F*-Zentren (und möglicherweise dort vorhandenen Metallkolloide) die Herabsetzung der Sekundäremission bewirken.

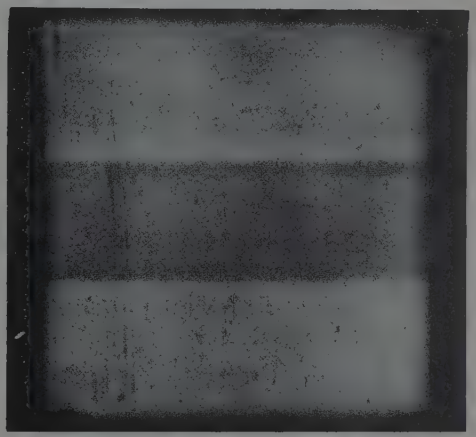


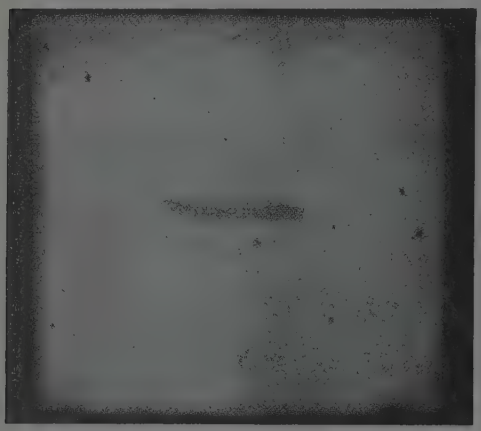
Fig. 7. Versuch zur Abschätzung der Zentrenzahl, die eine eben noch sichtbare Sekundäremissionsherabsetzung im Elektronenabtaster hervorruft.

Wir erkennen aus diesem Versuch, daß für die Sekundäremission nicht nur die bekannten *aktivierenden*, sondern auch *desaktivierende* Zentren existieren, ähnlich wie bei den Kristallphosphoren, z. B. beim ZnS, Ag- und Cu-Zentren einen aktivierenden, Ni-Zentren dagegen einen desaktivierenden Einfluß ausüben. Unsere KCl-Schichten zeigten an den elektronenbestrahlten Stellen gut wahrnehmbare, blaue Lumineszenz; ein Einfluß der für die Sekundäremission desaktivierend wirkenden *F*-Zentren auf dieses Leuchten war nicht festzustellen.

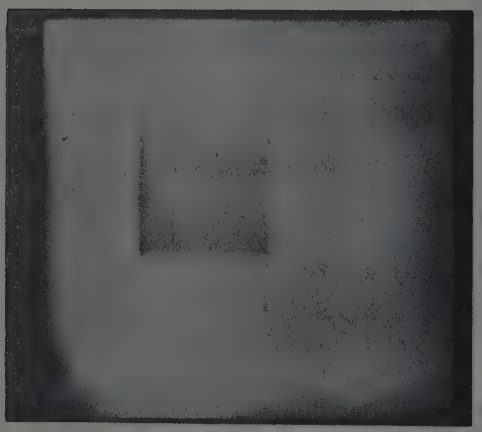
5. *Herabsetzung der Sekundäremission durch Leitungselektronen.*

Bekanntlich werden die *F*-Zentren bei Bestrahlung mit dem Licht ihrer Absorptionsbande (560 mμ) zum Verschwinden gebracht, wobei sie in das Kristallgitter vorübergehend Leitungselektronen abgeben, die alsbald wieder in den gebundenen Zustand zurückkehren (primärer innerer lichtelektrischer Effekt). Es wurde nun versucht, diese vorübergehende Leitfähigkeit im Sekundäremissionsbild nachzuweisen.

Die F-Zentren wurden dabei durch den Abtaststrahl selbst in genügender Zahl hervorgerufen. Zum Ausleuchten genügt das Licht einer Glühlampe, das während der Abtastung auf einen einige mm großen Fleck der Schicht gebündelt war. Man bemerkte nun an der belichteten Stelle im Moment des Einschaltens der Glühlampe eine stärkere *Herabsetzung* der Sekundäremission (Fig. 8a), die nach kurzer Zeit (Ausleuchten der vorhandenen F-Zentren) wieder verschwindet. Da durch das dauernde Abtasten laufend neue F-Zentren gebildet werden, bleibt eine geringe Herabsetzung der Sekundäremission an der belichteten Stelle dauernd bestehen. Die Stärke des sichtbaren schwarzen Fleckes, also die Herabsetzung der Sekundäremission, nahm mit der Zahl der zur Verfügung stehenden F-Zentren zu, also mit der Höhe des Abtaststromes und der Dauer der vorhergegangenen Elektronenabtastung. Verfärbt man beispielsweise die Schicht bis zum sichtbaren Violett, so bleibt das Bild der Glühlampenwendel in dem verfärbten Teil sehr viel kräftiger und länger



a



b

Fig. 8. Herabsetzung der Sekundäremission durch Leitungselektronen, die durch Bestrahlung mit Licht in der Absorptionsbande der F-Zentren ausgelöst sind.
a) Bei Bildung der F-Zentren durch den normalen Abtaststrom (6 kV, $0{,}2 \cdot 10^{-6}$ A bzw. 10^{-6} A/cm²).
b) Bei vorangegangener Verfärbung der Schicht durch Elektronen von 6 kV, Verfärbungsstrom $2 \cdot 10^{-6}$ A bzw. $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ A/cm² 2 Minuten (dunkles Rechteck).

(etwa 10 min) sichtbar als in dem nur durch den normalen Abtaststrom verfärbten Teil (Fig. 8b).

Bei *Bewegung* des Lichtflecks läßt sich unmittelbar die Verweildauer der Photoelektronen im freien Zustand erkennen. Der im Sekundäremissionsbild schwarz erscheinende Lichtfleck zieht dann nämlich eine schwarze Fahne hinter sich her, deren Länge[1]), dividiert durch die bekannte Bewegungsgeschwindigkeit des Lichtflecks, direkt die gesuchte Größe ergibt. Die auf diese Weise gemessene Verweildauer der Elektronen im freien Zustand beträgt 1 bis 2 sec. Es handelt sich dabei wahrscheinlich um dieselbe Trägheitserscheinung „freier" Elektronen, wie sie Glaser[2]) durch die Beobachtung des lichtelektrischen Primärstromes bei kurzzeitigen Stromstößen und verschiedenen Temperaturen feststellen konnte.

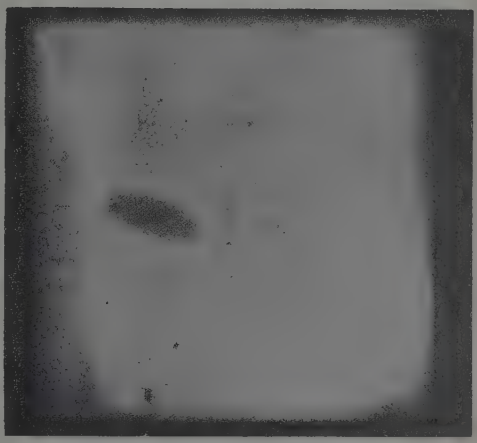
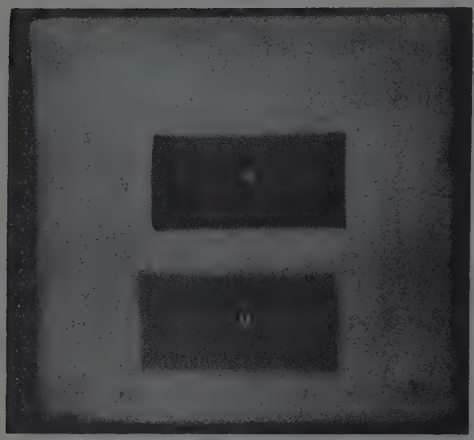


Fig. 9. Herabsetzung der Sekundäremission durch Leitungselektronen, die durch Elektronenstoß ausgelöst sind (Abtastelektronen-Geschwindigkeit 6 kV, Abtaststrom $0{,}2 \cdot 10^{-6}$ A, Geschwindigkeit der Stoßelektronen 1000 Volt, Stromdichte $< 10^{-8}$ A/cm²).

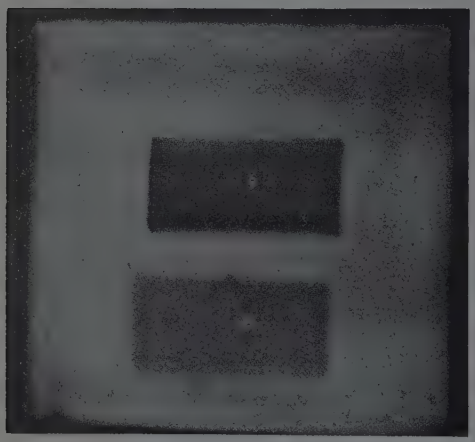
Ein anderer Weg, Leitungselektronen im Gitter zu erzeugen, war durch direkten *Elektronenstoß* gegeben. Als zu diesem Zweck mit einer zweiten Elektronenquelle während des Abtastvorganges Elektronen in den Kristall geschossen wurden, trat hierbei der gleiche Effekt auf wie beim Ausleuchten der *F*-Zentren mit Glühlampenlicht (Fig. 9). Die Bestrahlung durfte dabei nur sehr kurzzeitig erfolgen, damit die durch den zweiten Strahl gebildeten *F*-Zentren keine zusätzliche Herabsetzung der Sekundäremission ergaben.

Die Stromstärke des Zusatzstrahls wurde also so klein genommen, daß nach seinem Abschalten noch keine merkliche Anzahl von *F*-Zentren im Sekundäremissionsbild sichtbar war. Bei *Ablenkung* des Zusatz-

[1]) Genauer die Entfernung zwischen dem Fleck und derjenigen Stelle, wo die Intensität auf $1/e$ abgeklungen ist. — [2]) G. Glaser, Gött. Nachr., Math.-Phys. Kl. 3, 31, 1937.



a



b

Fig. 10. Dauernde Herabsetzung der Sekundäremission durch Gitterzerstörung.
a) Nach längerer Bestrahlung mit UV im Vakuum (*u*, Al-Bogen, 1,5 h) und Elektronen (*e*, 5000 Volt, Abtaststrom $3{,}5 \cdot 10^{-6}$ A bzw. $3 \cdot 10^{-6}$ A/cm², 3 Minuten).
b) Nach Ausheizen derselben Schicht auf 350° C kehrt nur der reversible Anteil der ursprünglichen Sekundäremission (*F*-Zentren nach Fig. 8a) zurück.

strahls über die Bildfläche zeigt sich nur dieselbe „Nachwirkung" des Flekkes wie bei dem bewegten Lichtstrahl, und man findet dieselbe Zeitkonstante für die Verweilzeit der Elektronen im freien Zustand.

Diese Beobachtung scheint uns wie eine frühere [1]) ein unmittelbarer experimenteller Nachweis der von der Theorie [2]) geforderten „Plasmawechselwirkung" zwischen einem gerichteten Strom von Elektronen bzw. der Sekundärelektronen und den mehr oder weniger freien Elektronen des Festkörpers zu sein [3]).

6. *Dauernde Veränderung der Kristallstruktur durch starke Bestrahlung mit UV und Elektronen.*

Bestrahlt man relativ lange oder stark mit kurzwelligem UV oder mit Elektronen, so ist die Sekundäremission der bestrahlten Stelle stark herabgesetzt (Fig 10a). Wird

[1]) M. Knoll, Naturwiss. 24, 345, 1936. Dort wurde die gleiche Beobachtung an einer grundsätzlich ähnlichen Versuchsanordnung gemacht, die jedoch an Stelle der KCl-Schicht eine dünne Aluminiumoxydschicht enthielt. — [2]) F. Möglich u. R. Rompe, ZS. f. Phys. 115, 707, 1940. — [3]) Die Annahme, daß die Herabsetzung der Sekundäremission etwa durch eine *Temperaturerhöhung* der

eine solche Schicht auf 350° C erwärmt, so entfärbt sie sich wieder; die gebildeten *F*-Zentren und das kolloidale Kalium können also offenbar alle wieder an passende Gitterplätze gelangen. Die ursprüngliche Sekundäremission kehrt jedoch nur zum Teil zurück (Fig. 10b). Es tritt also außer der sekundäremissionsvermindernden Wirkung der *F*-Zentren nach langer Bestrahlung eine *irreversible* Sekundäremissionsabnahme auf. Da die bestrahlten Stellen bei Beobachtung im streifenden Licht stärkere Streuung aufweisen als die Umgebung, ist es offensichtlich, daß die zusätzliche Sekundäremissionsabnahme durch Änderung des ganzen Gittergefüges hervorgerufen wird. Wahrscheinlich verlassen Chloratome den Gitterverband und zwar nicht nur aus der Oberflächenschicht, sondern aus der ganzen vorhandenen Schichttiefe von 100 bis 1000 Netzebenen, besonders dann, wenn die Schicht zur Tilgung der *F*-Zentren auf 350° erhitzt werden muß. Dies muß auch bei der Deutung der in Fig. 5 wiedergegebenen Kurven beachtet werden.

7. Folgerungen aus den Versuchen für die Sekundäremission im Innern des Festkörpers.

a) Kristalliner Isolator (z. B. KCl). Zusammenfassend lassen sich folgende Ergebnisse unserer Beobachtungen feststellen:

1. Die Sekundärelektronen kommen bei Isolatorkristallen (mit im UV liegender Grundgitterabsorption) auch aus tieferen Schichten des Kristalls. Ihre freie Weglänge ist also groß gegenüber derjenigen der Sekundärelektronen in Metallkristallen.

2. Die freie Weglänge der Sekundärelektronen und damit die Sekundäremissionsausbeute wird herabgesetzt

a) bei Erwärmung durch die Gitterschwingungen des Kristalls,
b) durch Zusammenstoß mit lichtelektrisch oder durch Elektronenstoß ausgelösten Leitungselektronen,
c) durch *F*-Zentren und möglicherweise gleichzeitig in geringer Menge vorhandenes kolloidales Kalium.
d) durch mangelhafte Kristallordnung.

---

bestrahlten Stelle zustande kommt, ist unwahrscheinlich, da selbst bei ruhendem Lichtfleck nur eine Temperaturerhöhung von der Größenordnung 1° C auftrat, die einer nicht mehr wahrnehmbaren Änderung des Sekundäremissionsfaktors entspricht. Dies geht auch aus der Abnahme des Signals trotz zunehmender Bestrahlungszeit nach Ausleuchten der *F*-Zentren durch einen ruhenden Lichtfleck eindeutig hervor (Abschn. 5).

Zu 1. Da die Sekundärelektronen im unbestrahlten Kristall nicht wie im Metall durch Stöße mit Leitungselektronen gebremst und dadurch absorbiert werden, sondern höchstens eine Absorption durch die unter 2a, c und d angeführten Prozesse auftritt, können sie sich im Gitter relativ frei bewegen. Dies kommt in der Sekundäremissionskurve nicht nur durch Höhe und Lage des Maximums, sondern auch dadurch zum Ausdruck, daß sie in einem großen Bereich der Elektronengeschwindigkeit, also bei sehr verschiedenen Reichweiten der Primärelektronen, nicht den Faktor 1 unterschreitet (Fig. 3). Mit dem Versuchsergebnis stimmt überein, daß schon früher[1]) bei gewissen Kristallphosphoren (ZnS) sogar noch bei 60 kV ein Sekundäremissionsvermögen über 1 festgestellt wurde.

Zu 2a. Wird der Ionenkristall *erwärmt*, so nimmt die Amplitude der Gitterschwingungen zu. Der letztere Vorgang verursacht eine wesentliche Erhöhung der Absorption der sonst austretenden Sekundärelektronen und damit eine Abnahme der Sekundäremission (vgl. die Kurven Fig. 2 und 3).

Zu 2b. Wird durch *Bestrahlung mit Elektronen oder Licht* vorübergehend die Zahl der Leitungselektronen erhöht, so absorbieren diese ihrerseits mehr Sekundärelektronen und setzen damit das Sekundäremissionsvermögen herab (Fig. 8 und 9). In den zu Fig. 8 und 9 gehörigen Versuchen war die Zahl der eine deutliche vorübergehende Herabsetzung der Sekundäremission ergebenden Photoelektronen von der Größenordnung 10^{18} El/cm³.

Zu 2c. Das Zustandekommen der weiterhin beobachteten *dauernden Abnahme* der Sekundäremission *durch F-Zentren*, die durch Entfärben des Kristalls mittels Erwärmung wieder rückgängig zu machen ist (Fig. 6 und 7), ist im einzelnen noch nicht geklärt. Die *F*-Zentren entstehen wahrscheinlich an ursprünglich im Kristall vorhandenen Fehlstellen; es liegen auch schon andere Beobachtungen über ihre absorbierende Wirkung, und zwar auf lichtelektrisch ausgelöste Elektronen vor (Umwandlung in *F'*-Zentren, vgl. R. M. Pohl, l. c. S. 41). Doch darf daraus nicht geschlossen werden, daß allgemein Störstellen im Kristall stets sekundäremissionshemmend wirken. So haben im Gegenteil Suhrmann und Kundt sowie Geyer[2]) an mit gitterfremden

[1]) Vgl. Anm. [2]), S. 138. — [2]) R. Suhrmann u. W. Kundt, Naturwiss. **27**, 707, 1939; K. H. Geyer, Ann. d. Phys. **42**, 241, 1942. Es handelt sich im letzteren Fall um Al_2O_3-Schichten mit Cr, Ce, Fe, Mn, Cu, V und U als Aktivatoren. Diese Untersuchungen sind hier besonders deswegen interessant,

Zusätzen aktivierten, also mit Störstellen („Zentren") versehenen Isolatorkristallen eine wesentliche Erhöhung der Sekundäremission gegenüber den entsprechenden nicht aktivierten Stoffen gefunden. *Es sind also in bezug auf die Sekundäremission ähnlich wie in bezug auf das licht- oder elektronenerregte Leuchten der Ionenkristalle aktivierende und desaktivierende Zentren (Metallatome) zu unterscheiden*, wobei aber beim KCl die gittereigenen desaktivierenden *F*-Zentren das elektronenerregte Leuchten nicht merkbar herabsetzen. Hieraus ist zu schließen, daß wenigstens beim KCl die Anregung der Leuchtzentren nicht unmittelbar durch die Sekundärelektronen hervorgerufen wird.

Zu 2d. Die Kurven Fig. 3 und die in Abschn. 3 wiedergegebenen Beobachtungen deuten darauf hin, daß nicht nur durch Temperaturerhöhung, sondern auch durch verschiedenen *Kristallisationszustand* die Absorption der Sekundärelektronen beeinflußt werden kann. Das letztere ist wahrscheinlich der Grund dafür, daß viele früher an manchen Isolatoren (Glas, Quarzglas) gemessenen Sekundäremissionskurven große Ähnlichkeit mit denjenigen der Metalle haben, während die Messungen an anderen mehr kristallinen Isolatoren (Al_2O_3, BeO, MgO, MgF_2, CaO und BaO der gleichen Autoren[1]) bei höheren Elektronengeschwindigkeiten noch über $\delta = 1$ liegen, also ähnliches Verhalten wie das KCl zeigen.

Kristallisationszustand, Temperatur, Zahl der freien Leitungselektronen sowie Zahl und Art der Störstellen — vorher eingebauter und durch Bestrahlung neu entstandener — werden also bei den verschiedenen Kristallen Sekundäremissionskurven ergeben, die jeweils zwischen denen des idealen Ionenkristalls und denjenigen der Metalle liegen. Aus den genannten Ergebnissen lassen sich auch einige für den Mechanismus der Sekundäremission in *Metallen* wichtige Schlüsse ableiten:

b) Metallisch-kristalliner Zustand. Bei Metallen scheint nach Beobachtungen von Suhrmann und Kundt[2]) die Durchlässigkeit

---

weil Elektronengeschwindigkeiten bis 4000 Volt verwendet wurden. Auch P. Timofeew und R. Aranovich [Journ. techn. Phys. (russ.) **10**, 32, 1940; Phys. Ber. **23**, 1072, 1942; vgl. auch F. Trey, l. c. S. 46] haben die Erhöhung der Sekundäremission beim Erhitzen einer auf Mg aufgewachsenen MgO-Schicht der Eindiffusion von Mg-Zentren aus dem Grundmetall zugeschrieben. Doch möchten wir gerade auf Grund unserer Beobachtungen darauf hinweisen, daß z. B. im letzteren Fall die Sekundäremissionserhöhung ebenso gut durch bessere Ordnung des MgO infolge der Glühung ohne Mitwirkung gittereigener Zentren entstanden sein kann (vgl. Abschnitt 2d). — [1]) H. Salow u. H. Maurer, ZS. f. Phys. **118**, 122, 1941; H. Geyer, Ann. d. Phys. **41**, 117, 1942; **42**, 241, 1942. — [2]) R. Suhrmann u. W. Kundt, Naturwiss. **27**, 707, 1939; ZS. f. Phys. **120**, 363, 1943.

für Sekundärelektronen im kristallinen Zustand ebenfalls etwas größer zu sein als im ungeordneten. Doch ist die Zahl der Leitungselektronen bei den Metallen mindestens noch um drei bis vier Größenordnungen höher als die Zahl der Leitungselektronen, die bei unserem Versuch (Fig. 9) schon eine merkliche Herabsetzung der Sekundäremission bewirkten, also von der Größenordnung 10^{21} bis 10^{22} El/cm^3. Hieraus folgt in Übereinstimmung mit der Theorie[1]) und mit den Beobachtungen über die freie Weglänge der Leitungselektronen in dünnen Drähten[2]), daß in Metallen bei höheren Geschwindigkeiten der Primärelektronen die Sekundärelektronen nicht aus der gesamten Reichweitenzone, sondern nur aus einer dünnen „Emissionszone" stammen. Wegen der vielen Zusammenstöße mit den Leitungselektronen können nur solche Sekundärelektronen, die in dieser unmittelbar an die Oberfläche anschließenden Emissionszone ausgelöst sind, das Metall verlassen[3]); die übrigen werden in einer sehr viel dickeren, von der Emissionsgrenze bis zur Reichweitengrenze reichenden „Absorptionszone" absorbiert. Die gegenüber den Gitterstößen überwiegenden Zusammenstöße der Sekundärelektronen mit Leitungselektronen sind auch der Grund für die bekannte Temperaturunabhängigkeit der Sekundäremission bei Metallen. Die Leitungselektronen geben die auf sie übertragene Energie schließlich durch Stoß an das Gitter weiter und setzen sie in Wärme um („Plasmawechselwirkung" nach Möglich und Rompe). Die Auslösung der Sekundärelektronen in der Emissionszone erfolgt entsprechend den in Abschn. 3 mitgeteilten Beobachtungen an Metall-Aufdampfschichten wohl hauptsächlich durch rückdiffundierte Primärelektronen.

Die Dicke der Emissionszone entspricht der mittleren freien Weglänge der Leitungselektronen im Metall, ist also von der Größenordnung 10 bis 100 mμ[3]). Sie ist in erster Annäherung unabhängig von der Geschwindigkeit der Primärelektronen, weil auch die Geschwindigkeit der Sekundärelektronen von dieser praktisch unabhängig ist, und von der Art des Metalls, weil die Konzentration des Elektronengases in den Metallen nicht sehr verschieden ist.

---

[1]) Vgl. A. E. Kadyschewitsch, l. c. — [2]) A. Eucken u. L. Riedel, Naturwiss. 24, 696, 1936; L. Riedel, Ann. d. Phys. 28, 603, 1937. — [3]) Dies ist selbstverständlich nicht wörtlich zu verstehen; entsprechend dem exponentiellen Verlauf des Absorptionsgesetzes werden in der Grenzschicht stets auch Sekundärelektronen aus einer Tiefe emittiert, wo gleichzeitig bereits Absorption stattfindet.

Hieraus ergibt sich auch eine einfache Deutung dafür, daß die Sekundäremissionsausbeute reiner Metalle bei hohen Elektronengeschwindigkeiten mit wachsender Dichte zuzunehmen[1]), bei niedrigen dagegen mit wachsender Dichte abzunehmen[2]) scheint. Ist nämlich die Reichweitenzone dicker als die Emissionszone, so nimmt die Zahl der innerhalb der letzteren (durch die primären und rückdiffundierten Elektronen) ausgelösten Sekundärelektronen wegen der größeren Ausbeute pro Wegeinheit in dieser Schicht mit der Dichte zu; ist sie dünner, so hängt ihre Zahl in erster Näherung nur noch von der Reichweite der Primärelektronen ab, die bekanntlich mit wachsender Dichte abnimmt.

c) *Hochemittierende Metall-Legierungen.* Die gezeigten Versuchsergebnisse und Überlegungen lassen auch die überraschend hohe Sekundäremission gewisser metallischer Legierungen, wie Cu/Be[3]), Ni/Be[3]), Ag/Mg[4]) und verwandter in einem neuen Lichte erscheinen. Typisch für ihre Zusammensetzung ist stets ein mehr oder weniger Sauerstoff enthaltendes Grundmetall, dem einige Prozent eines Erdalkalimetalls zulegiert sind. Bei geeigneter Temperaturbehandlung befindet sich das Erdalkalimetall im Grundmetall in Form eines γ-Kristallgemisches[5]). Anschließend wird die Legierung längere Zeit auf 500 bis 600° erhitzt, wobei sich Ausscheidungen des Erdalkalimetalls von etwa kolloidaler Größe bilden[6]) und sich gleichzeitig ein hohes Sekundäremissionsvermögen ($\delta = 5$ bis 16) einstellt, das durch zusätzliche Sauerstoffbehandlung noch erhöht werden kann.

Nach dem gefundenen hohen Sekundäremissionsvermögen kristalliner Isolatoren erscheint es nun sehr wahrscheinlich, daß diese hohe Elektronenausbeute durch eine bei der Erhitzung auf den Aus-

---

[1]) Vgl. P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen, S. 161. Heidelberg 1918; B. F. I. Schonland, Proc. Roy. Soc. London (A) 104, 235, 1923. Die Messungen von Schonland sind bei 18 kV Elektronengeschwindigkeit gemacht. Messungen von Warnecke bei 1,5 kV lassen dagegen noch keinen eindeutigen Dichteeinfluß erkennen (Journ. Phys. Rad. 7, 278, 1936). — [2]) H. Bruining u. I. H. de Boer, Physica 5, 913, 1938. — [3]) Nach M. R. Warnecke; vgl. auch R. Kollath, l. c. sowie Fernsehen und Tonfilm, 1941, S. 13; M. H. Le Boiteux, Rev. Technique CGCT-LMT 1, 21, 1941, Nr. 1; G. Gille, ZS. f. techn. Phys. 22, 228, 1941; I. Matthes, ebenda S. 232. — [4]) I. Friedheim u. I. G. Weiss, Naturwiss. 29, 777, 1941; Mitt. Forsch.-Anst. d. Reichspost 7, 153, 1941. — [5]) Vgl. G. Masing u. O. Dahl, Wiss. Veröff. d. Siemens-Konz. 8, 94, 1929/30 (Cu/Be) und S. 212 (Ni/Be). — [6]) H. Mahl, Metallwirtschaft 20, 983, 1941, Heft 40. Die von den „Inseln" bedeckte Oberfläche ist dann wesentlich größer als dem Prozentsatz der Beimengung entspricht.

scheidungsinseln wachsende, kristalline Oxydschicht des Erdalkalimetalls entsteht, wobei der Sauerstoff entweder aus dem Grundmetall oder von außen aufgenommen wird. Außer vom Ordnungszustand dieser Schicht ist das Sekundäremissionsvermögen dann möglicherweise noch vom Einbau gittereigener, also aus dem Erdalkalimetall stammender, oder gitterfremder „Aktivator-Zentren" abhängig. In analoger Weise würde sich die bekannte relativ hohe Ausbeute des nicht vorbehandelten Aluminiums, dessen natürliche Oxydhaut von der Größenordnung 100 mμ ist, sowie des häufig angewandten reinen Magnesiumoxyds[1]) erklären. Anhaltspunkte für das Vorhandensein kristalliner dünner Oxydschichten liefert bei Schichten > 100 mμ die Verschiebung des Sekundäremissionsmaximums zu höheren Elektronengeschwindigkeiten.

Die Arbeit wurde in der Abteilung für Röhrentechnik des Instituts für Elektrotechnik der Technischen Hochschule Berlin durchgeführt. Für die Bereitstellung von Mitteln danken wir der Deutschen Forschungsgemeinschaft, Herrn Dr. Mollwo und insbesondere Herrn Prof. R. Suhrmann für viele anregende und wesentliche Diskussionen, Herrn M. Stark für verständnisvolle Hilfe bei den Messungen.

---

[1]) Vgl. z. B. H. Schnittger, Verh. d. D. Phys. Ges. **21**, 45, 1940.

Materieerzeugung in einem homogenen, zeitlich veränderlichen elektrischen Feld *).

Von G. Blass in Leipzig.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 14. Mai 1943.)

In einem elektrischen Feld, das durch zeitliche Veränderung eines homogenen Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ entsteht, gibt es für skalare und spinorielle Materie im klassisch-anschaulichen Wellenbild *induzierte* Materieerzeugung. In der quantisierten Theorie findet *spontane* Materieerzeugung statt.

1. Einleitung.

Nach der Quantentheorie findet in genügend hohen elektrischen Feldern Materieerzeugung statt. Von den einfach zu übersehenden Möglichkeiten dieser Materieerzeugung im elektrischen Feld ist bisher vor allem der Fall eines örtlich veränderlichen Potentials V eingehend untersucht worden. Im klassisch-anschaulichen Wellenbild strömt also aus einem feldfreien Halbraum Materie auf eine Schicht mit $\mathfrak{E} \neq 0$ zu (V variiert dabei nur in einer Raumrichtung). Ein Teil der auftreffenden Materie wird an der Schicht reflektiert, während ein anderer Teil durch die Schicht hindurch in den anderen feldfreien Halbraum dringt. Die Bilanz zeigt, daß bei dem Vorgang Materie erzeugt worden ist — positiv und negativ geladene in gleichen, der ursprünglich einfallenden Materie proportionalen Mengen —, *induzierte* Materieerzeugung. Bei Quantisierung entsteht in dieser Schicht $\mathfrak{E} \neq 0$ dauernd Materie, selbst wenn keine Materie von außen auf die Schicht zuströmt — *spontane* Materieerzeugung[1])[2]).

In dieser Arbeit soll der von Stueckelberg[3]) im Rahmen seiner modifizierten Quantentheorie behandelte Fall untersucht werden, in dem das zur Materieerzeugung notwendige elektrische Feld

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}} - \operatorname{grad} V \qquad (1.1)$$

nicht als Gradient von V anzusehen ist, sondern durch zeitliche Veränderung von $\mathfrak{A}$ verursacht wird.

Es sei also ein im ganzen Raum homogenes Vektorpotential $\mathfrak{A}$ vorhanden, das in einem gewissen Zeitintervall Δt auf Null gesenkt

*) D 15.

[1]) F. Sauter, ZS. f. Phys. 69, 742; 73, 547, 1931. — [2]) F. Hund, ZS. f. Phys. 117, 1, 1940. — [3]) E. C. G. Stueckelberg, Helv. phys. acta 15, 23, 1942.

wird. Dabei entsteht ein im ganzen Raum homogenes, zeitlich veränderliches elektrisches Feld $\mathfrak{E}$ derart, daß

$$c \int_{\Delta t} \mathfrak{E}(t)\, dt = \mathfrak{A} \qquad (1.\ 1a)$$

wird (siehe Fig. 1).

Die Quantentheorie umfaßt das klassisch anschauliche Teilchenbild und das klassische Wellenbild der Materie in dem Sinne, daß — ganz gleich, ob man vom Teilchen- oder vom Wellenbild ausgeht — beim Quantisieren jedes der beiden Bilder durch Einführung der wesentlichen Züge des jeweils anderen Bildes in seiner Gültigkeit eingeschränkt wird. Deshalb lohnt es sich zu untersuchen, wieviel von einer quantentheoretischen Aussage schon in einem der beiden klassischen Bilder enthalten ist. Für die in einer klassischen Teilchentheorie unverständliche Materieerzeugung zeigt sich, daß sowohl in der skalaren als auch spinoriellen klassischen Feldtheorie der Materie immer dann in dem elektrischen Feld Paare erzeugt werden, wenn vorher schon Materie der betreffenden Art vorhanden war — die *klassische Feldtheorie* enthält also schon die *induzierte Materieerzeugung*.

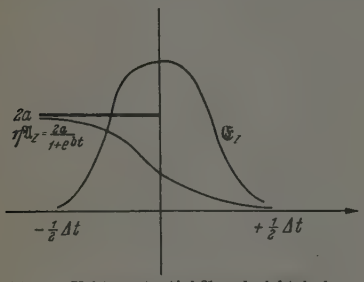


Fig. 1. Vektorpotential $\mathfrak{A}$ und elektrisches Feld $\mathfrak{E}$ als Funktion der Zeit t.

Quantisierung der skalaren Theorie[1]) wie auch Interpretation der spinoriellen Theorie mit Hilfe der Löchertheorie[2]) liefern dann auch *spontane Materieerzeugung*, d. h. es entstehen in dem elektrischen Feld immer Paare, unabhängig davon, ob vorher Materie der betreffenden Art vorhanden war oder nicht.

Dies Ergebnis ist insofern bemerkenswert, als Stueckelberg[3]) in seiner vorgeschlagenen modifizierten *Quanten*theorie für das hier zu untersuchende elektrische Feld nur die *induzierte* Materieerzeugung erhält.

Einige wesentliche Züge der Materieerzeugung durch ein solches elektrisches Feld, wie es bei dieser Veränderung von $\mathfrak{A}$ entsteht, werden

[1]) W. Pauli u. V. Weißkopf, Helv. phys. acta **7**, 709, 1934. — [2]) Die Löchertheorie kann zwar nur als korrespondenzmäßige Betrachtung gelten. Es wäre also eigentlich exakt mit Vertauschungsregeln zu quantisieren, um genaue Aussagen machen zu können. Aber wegen der bekannten Divergenzschwierigkeiten dieser Theorie erhält man damit keine schärferen Aussagen als eben mit der Interpretation der Löchertheorie. — [3]) E. C. G. Stueckelberg, a. a. O.

schon an dem leicht zu behandelnden Grenzfall $\Delta t \to 0$ deutlich, wobei das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ beliebig hoch ansteigt im selben Maß wie Δt gegen Null geht, so daß (1, 1a) gewahrt bleibt.

Da aber infolge des unendlich hoch anwachsenden elektrischen Feldes $\mathfrak{E}$ die gesamte spontan erzeugte Materiemenge unendlich groß wird — und um überhaupt den Einfluß der Dauer der Einwirkung des elektrischen Feldes studieren zu können — wird noch der Fall untersucht, daß $\mathfrak{A}$ in der Form

$$|\mathfrak{A}| = \frac{2a}{1 + e^{bt}}$$

von der Zeit t abhängt, wobei der Parameter b angibt, wie schnell das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ erzeugt wird und wieder verschwindet. Die gesamte Materieerzeugung wird bei dieser stetigen Abnahme von $\mathfrak{A}$ endlich.

Physikalisch läßt sich das hier untersuchte elektrische Feld $\mathfrak{E}$ nicht etwa durch einfaches Auf- und Entladen eines Plattenkondensators verwirklichen. Gewiß erhielte man dabei zwischen den Platten einen zeitlichen Verlauf von $\mathfrak{E}$, wie ihn Fig. 1 zeigt. Außerdem träte aber wegen

$$\text{rot}\, \mathfrak{H} - \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{E}} = \frac{4\pi}{c} \cdot \mathfrak{s}$$

ein Magnetfeld auf, weil ja $\mathfrak{s}$ zwischen den Platten Null ist. Zur elektrischen Beeinflussung käme also noch eine magnetische Ablenkung des Materiestromes hinzu. Der hier zu untersuchende Fall des homogenen $\mathfrak{A}$-Feldes läßt sich nur so verwirklichen, daß elektrische Ladung durch das betrachtete Gebiet hindurch und wieder zurück geführt wird.

Hierdurch könnte der Begriff der *nach der Quantentheorie möglichen spontanen* Materieerzeugung (wobei ja eben Materie einer bestimmten Art — etwa Mesonen oder skalare Teilchen — entstehen soll, ohne daß vorher Materie dieser Art vorhanden war) irgendwie fraglich erscheinen, weil ja doch immer erst Materie nötig ist zur Erzeugung des äußeren Feldes, in dem die *spontane* Materieerzeugung stattfinden soll. Immerhin kann man aber das elektrische Feld etwa mit einem Elektronenstrom erzeugen, wobei dann beliebige andere Materie — etwa Mesonen oder skalare Teilchen — eben doch *spontan* erzeugt wird.

2. Skalare klassische Materiewellen im plötzlich erzeugten elektrischen Feld.

Es bestehe bis zur Zeit $t = 0$ ein im ganzen Raum homogenes Vektorpotential $\mathfrak{A}$, dessen Richtung als z-Richtung gewählt sei. Zur Zeit $t = 0$ wird dieses $\mathfrak{A}_z$ auf Null gesenkt, wobei ein homogenes, zeitlich veränderliches elektrisches Feld $\mathfrak{E}_z$ entsteht (Fig. 1).

Wenn wir wissen wollen, wie ein vorhandener Materiestrom durch den Schaltvorgang beeinflußt wird, genügt es, seine Komponente parallel zu dem elektrischen Feld zu betrachten, weil ja senkrecht zur Feldrichtung keine Wirkung ausgeübt wird; wie am Schluß dieses Abschnitts gezeigt wird, bedeutet das aber nicht etwa, daß ein Materiestrom senkrecht zur Feldrichtung keine Materieerzeugung induziert.

Wir suchen also Lösungen für die eindimensionale Wellengleichung der skalaren Materie

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial z} - i\eta\,\mathfrak{A}_z\right)^2 - \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \varkappa^2\right]\psi = 0. \tag{2. 1}$$

$\varkappa = \frac{mc}{\hbar}$, $\eta = \frac{e}{\hbar c}$ sind hier noch rein klassische Größen.

In Gebieten konstanten Vektorpotentials $\mathfrak{A}_z$ ist jede ebene Welle

$$\psi = A \cdot e^{-i\omega t + ik_z z} \tag{2. 2}$$

eine Lösung der Wellengleichung, wenn nur

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - (k_z - \eta\,\mathfrak{A}_z)^2 = \varkappa^2 \tag{2. 3}$$

gilt. Da sich diese Beziehung durch $\pm|\omega|$ erfüllen läßt, ist *eine* Lösung der Wellengleichung in einem Gebiet konstanten Vektorpotentials $\mathfrak{A}_z$ für jeden frei vorgebbaren Wellenzahlvektor k_z:

$$\psi = A \cdot e^{-i\omega t + ik_z z} + B e^{+i\omega t + ik_z z}$$

mit

$$\omega = +c\sqrt{(k_z - \eta\,\mathfrak{A}_z)^2 + \varkappa^2}. \tag{2. 4}$$

Setzt man die spezielle Lösung (2. 2) in die bekannten Ausdrücke[1]) für Strom- und Ladungsdichte $[s/c, \varrho]$ und Impuls- und Energiedichte $[cg, u]$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{s_z}{c} \sim -\frac{i}{2}\eta\left[\psi^*\left(\frac{\partial}{\partial z} - i\eta\,\mathfrak{A}_z\right)\psi - \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\eta\,\mathfrak{A}_z\right)\psi^* \cdot \psi\right],\\
&\varrho \sim \frac{i}{2}\eta\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{c\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{c\partial t}\psi\right],\\
&cg \sim -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\psi^*}{c\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial z} - i\eta\,\mathfrak{A}_z\right)\psi - \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\eta\,\mathfrak{A}_z\right)\psi^*\frac{\partial\psi}{c\partial t}\right],\\
&u \sim \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial z} + i\eta\,\mathfrak{A}_z\right)\psi^* \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} - i\eta\,\mathfrak{A}_z\right)\psi + \frac{\partial\psi^*}{c\partial t}\frac{\partial\psi}{c\partial t} + \varkappa^2\psi^*\psi\right]
\end{aligned}\right\} \tag{2. 5}$$

[1]) Will man erreichen, daß im nichtrelativistischen Grenzfall die Ladungsdichte $\varrho = e\psi^*\psi$ wird, dann hat man den hier noch offengelassenen Proportionalitätsfaktor gleich $e/\varkappa\eta$ zu wählen, womit man allerdings neben den beiden klassischen Größen $\varkappa$ und η die Quantengröße e in eine klassische Theorie einführt.

ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{S_z}{c} &\sim \eta\,(\mathfrak{k}_z - \eta\,\mathfrak{A}_z)\,A^*A, \\ \varrho &\sim \eta\,\frac{\omega}{c}\,A^*A, \\ c\,g_z &\sim \frac{\omega}{c}\,(\mathfrak{k}_z - \eta\,\mathfrak{A}_z)\,A^*A, \\ u &\sim \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 A^*A. \end{aligned}\right\} \tag{2. 6}$$

$(\mathfrak{k} - \eta\,\mathfrak{A})$ gibt also im wesentlichen die Stromdichte, ω/c die Ladungsdichte an. Demnach besteht die Lösung (2. 4) der Wellengleichung aus zwei ebenen Wellen, die bei entgegengesetzter Ladungsdichte gleichgerichtete Stromdichten führen, also in entgegengesetzter Richtung fortschreiten.

Wählen wir irgendein festes $\mathfrak{k}_z$, dann lautet diese Lösung (2. 4) in unserem Beispiel für $t < 0$ (solange also $\mathfrak{A}_z = \text{const} \neq 0$)

$$\psi_1 = A \cdot e^{-i\omega_1 t + i\mathfrak{k}_z z} + B^* \cdot e^{i\omega_1 t + i\mathfrak{k}_z z}$$

mit

$$\left(\frac{\omega_1}{c}\right)^2 = \varkappa^2 + (\mathfrak{k}_z - \eta\,\mathfrak{A}_z)^2 \tag{2. 7}$$

und für $t > 0$, wo $\mathfrak{A}_z = 0$,

$$\psi_2 = C \cdot e^{-i\omega_2 t + i\mathfrak{k}_z z} + D^* \cdot e^{i\omega_2 t + i\mathfrak{k}_z z}$$

mit

$$\left(\frac{\omega_2}{c}\right)^2 = \varkappa^2 + \mathfrak{k}_z^2. \tag{2. 8}$$

(Die komplexen Amplituden sind dabei so benannt, daß immer die Amplituden der Wellen mit $+ i\,\omega\,t$ mit einem Stern versehen sind.)

Die zunächst willkürlichen Konstanten A, B^*, C, D^* müssen nun so bestimmt werden, daß ψ_1 und ψ_2 *eine* zusammenhängende Lösung für das ganze Intervall $-\infty < t < +\infty$ ergeben. Da die Wellengleichung zweiter Ordnung ist, muß man hierfür fordern, daß sowohl ψ_1 und ψ_2 als auch ihre ersten zeitlichen Ableitungen bei $t = 0$ stetig ineinander übergehen. Das ist dann der Fall, wenn

$$C = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2\,\omega_2}\,A + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\,\omega_2}\,B^*$$

und

$$D^* = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\,\omega_2}\,A + \frac{\omega_2 + \omega_1}{2\,\omega_2}\,B^* \tag{2. 9}$$

gewählt wird.

Nehmen wir etwa an, daß nur eine einheitliche Welle vorhanden war, ehe das $\mathfrak{A}$-Feld auf Null gesenkt wurde, setzen also $B^* = 0$, dann ergibt sich für $t < 0$

$$\psi_1 = A \cdot e^{-i\omega_1 t + i\mathfrak{k}_z z}$$

und für $t > 0$

$$\psi_2 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2\omega_2} A \cdot e^{-i\omega_2 t + i\mathfrak{k}_z z} + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_2} A \cdot e^{i\omega_2 t + i\mathfrak{k}_z z} \qquad (2.10)$$

als Lösung der Wellengleichung.

Das heißt: Aus einer einheitlichen Materiewelle entstehen in dem elektrischen Feld $\mathfrak{E}_z$ immer zwei ebene Wellen entgegengesetzter Ladung und entgegengesetzter Fortschreitrichtung — mithin gleicher Richtung des elektrischen Stromes —, außer wenn $\omega_1 = \omega_2$. Dies letztere ist, von dem trivialen Fall $\eta \mathfrak{A}_z = 0$ abgesehen, nur möglich, wenn $\eta \mathfrak{A}_z = 2\mathfrak{k}_z$ ist. Denn dann wird ja

$$\left(\frac{\omega_1}{c}\right)^2 = \varkappa^2 + (\mathfrak{k}_z - \eta \mathfrak{A}_z)^2 = \varkappa^2 + \mathfrak{k}_z^2 = \left(\frac{\omega_2}{c}\right)^2.$$

In diesem Sonderfall ist, wie man aus dem Ausdruck (2. 6) für die Stromdichte sofort sieht, die Bremsung der anfänglich vorhandenen Materiewelle durch das plötzlich erzeugte elektrische Feld $\mathfrak{E}_z$ gerade so groß, daß ihr Strom genau umgekehrt wird (Fig. 2b).

Von diesem besonderen Fall abgesehen, tritt also immer eine neue, zur Ausgangswelle A *entgegengesetzt geladene* Welle D^* auf. Da aber, wie man mit Hilfe von (2. 6) und (2. 10) leicht nachprüfen kann, die gesamte Ladungsdichte bei dem Vorgang erhalten bleibt, muß auch die C-Welle mehr Ladung führen als die Ausgangswelle A. In der Volumeneinheit muß also doppelt so viel geladene Materie erzeugt worden sein, wie der Ladungsdichte der D^*-Welle entspricht — positiv und negativ geladene in gleichen Mengen —, nämlich im ganzen:

$$2\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_2}\right)^2 \eta \frac{\omega_2}{c} A^* A.$$

Das Verhältnis der erzeugten zur anfänglich vorhandenen Materie ist demnach

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{2\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_2}\right)^2 \eta \frac{\omega_2}{c} A^* A}{\eta \frac{\omega_1}{c} A^* A}, \\ \varepsilon &= \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{2\omega_1 \omega_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

Schon nach einer rein klassischen Theorie wird also durch das plötzlich eingeschaltete elektrische Feld $\mathfrak{E}$ Materie erzeugt; aber nur

dann, wenn schon vorher Materie derselben Art vorhanden war (Fig. 2).

Bemerkt sei noch, daß diese Materieerzeugung auch für die besondere Welle mit $\mathfrak{k}_z = 0$ stattfindet — also im dreidimensionalen Raum auch für Wellen, die senkrecht zur $\mathfrak{E}$-Richtung fortschreiten.

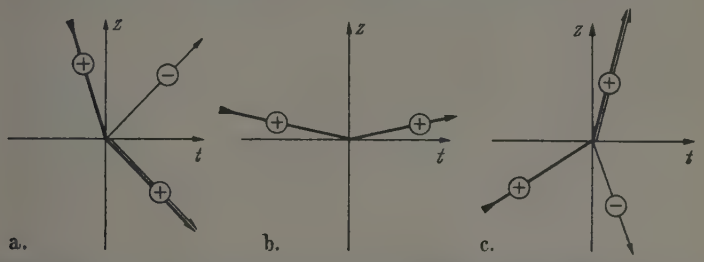


Fig. 2. Schema für Materieerzeugung im beliebig plötzlich erzeugten $\mathfrak{E}$-Feld, das in der z-Richtung wirke. a) Der ursprünglich vorhandene Materiestrom wird durch das $\mathfrak{E}$-Feld gebremst; b) er wird genau umgekehrt, wobei keine Materieerzeugung stattfindet; c) er wird beschleunigt.

3. *Materieerzeugung bei plötzlich erzeugtem elektrischem Feld in der quantisierten skalaren Theorie.*

Während in der im vorigen Abschnitt behandelten Theorie die Ladungsdichte ϱ kontinuierlicher Werte fähig war, kommt ja in der Natur Ladung nur in ganzzahlig Vielfachen der Elementarladung e vor. Diesem teilchenhaften Zug der Wirklichkeit wird man dadurch gerecht, daß man nur solche Lösungen ψ der Wellengleichung zuläßt, die den Vertauschungsregeln

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2\varkappa c}\left[\dot{\psi}^*(\mathfrak{x})\,\psi(\mathfrak{x}') - \psi(\mathfrak{x}')\,\dot{\psi}^*(\mathfrak{x})\right] &= \frac{1}{i}\,\delta(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}'), \\ \frac{1}{2\varkappa c}\left[\dot{\psi}(\mathfrak{x})\,\psi^*(\mathfrak{x}') - \psi^*(\mathfrak{x}')\,\dot{\psi}(\mathfrak{x})\right] &= \frac{1}{i}\,\delta(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}') \end{aligned}\right\} \qquad (3.\,1)$$

genügen. Alle anderen Vertauschungen von ψ, ψ^*, $\dot{\psi}$, $\dot{\psi}^*$ sollen wie bisher Null ergeben. Nach Einführung dieser Vertauschungsregeln muß man entscheiden, ob die in (2. 5) gewählte Reihenfolge der Faktoren in der Definition der Ladungsdichte oder die umgekehrte richtig ist. Es zeigt sich, daß man die halbe Summe aus dem in (2. 5) gegebenen und dem durch Vertauschung der Faktoren entstehenden Ausdruck zu bilden hat[1]):

$$\varrho = \frac{i}{2\varkappa c}\,e\left[\psi^*\dot{\psi} - \psi\,\dot{\psi}^*\right]. \qquad (3.\,2)$$

[1]) W. Pauli u. V. Weißkopf, Helv. phys. acta 7, 709, 1934 oder F. Hund, a. a. O.

(Hierin sind unter Berücksichtigung von $\varkappa = \frac{mc}{\hbar}$, $\eta = \frac{e}{\hbar c}$ Dimensionen und Einheiten so gewählt, daß im nichtrelativistischen Grenzfall $\psi^* \psi$ die Teilchendichte wird — siehe Fußnote S. 166.)

Wenn man nämlich wie üblich für Gebiete konstanten Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ die Wellenfunktion ψ in eine Fourier-Reihe entwickelt

$$\psi = \sum_{\mathfrak{k}} e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}} (P_{\mathfrak{k}} e^{-i\omega_{\mathfrak{k}} t} + Q^*_{\mathfrak{k}} e^{i\omega_{\mathfrak{k}} t}), \tag{3. 3}$$

wo entsprechend den Vertauschungsregeln (3. 1) die konstanten Amplituden $P_{\mathfrak{k}}, Q^*_{\mathfrak{k}}$ die Relationen

$$\left.\begin{aligned} \Omega \frac{\omega_{\mathfrak{k}}}{\varkappa c} (P_{\mathfrak{k}} P^*_{\mathfrak{k}} - P^*_{\mathfrak{k}} P_{\mathfrak{k}}) &= 1, \\ \Omega \frac{\omega_{\mathfrak{k}}}{\varkappa c} (Q_{\mathfrak{k}} Q^*_{\mathfrak{k}} - Q^*_{\mathfrak{k}} Q_{\mathfrak{k}}) &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{3. 4}$$

erfüllen müssen (Ω ist hierbei ein Periodizitätsquader, in dem die $\mathfrak{k}$ diskret werden), so erhält man für die gesamte im Periodizitätsquader enthaltene Ladung

$$\int \varrho \, d\mathfrak{r} = \frac{e\Omega}{\varkappa c} \sum_{k} \omega_{\mathfrak{k}} (P^*_{\mathfrak{k}} P_{\mathfrak{k}} - Q^*_{\mathfrak{k}} Q_{\mathfrak{k}}). \tag{3. 5}$$

Da nach (3. 4) $\Omega \frac{\omega_{\mathfrak{k}}}{\varkappa c} P^*_{\mathfrak{k}} P_{\mathfrak{k}}$ und $\Omega \frac{\omega_{\mathfrak{k}}}{\varkappa c} Q^*_{\mathfrak{k}} Q_{\mathfrak{k}}$ die Eigenwerte $0, 1, 2, 3, \ldots$ haben, läßt sich die Gesamtladungsdichte bei konstantem Potential als die Summe der positiven Ladungen $e P^* P$ und der negativen Ladungen $-e Q^* Q$ interpretieren. Diese berechtigte Forderung — denn bei konstantem Potential findet keine Materieerzeugung statt, und der Teilchenbegriff muß einen Sinn haben — läßt sich nur mit der Ladungsdefinition (3. 2) erfüllen.

Betrachten wir nun genau wie im vorigen Abschnitt eine ebene Welle unter dem Einfluß des kurzzeitigen elektrischen Feldes $\mathfrak{E}_z$, das bei der plötzlichen Änderung von $\mathfrak{A}_z$ entsteht,

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= e^{i\mathfrak{k}_z z} (A \cdot e^{-i\omega_1 t} + B^* e^{i\omega_1 t}), \\ \psi_2 &= e^{i\mathfrak{k}_z z} (C e^{-i\omega_2 t} + D^* e^{i\omega_2 t}) \end{aligned}\right\} \tag{3. 6}$$

mit denselben ω_1 und ω_2 wie in (2. 7) und (2. 8).

Aus der Forderung der Stetigkeit von ψ und $\dot{\psi}$ bei $t = 0$ folgt ebenso wieder

$$C = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2\omega_2} A + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_2} B^*; \quad C^* = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2\omega_2} A^* + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_2} B;$$

$$D^* = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_2} A + \frac{\omega_2 + \omega_1}{2\omega_2} B^*; \quad D = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_2} A^* + \frac{\omega_2 + \omega_1}{2\omega_2} B.$$

Zur Zeit $t > 0$ gibt es also zwei Wellen mit den Intensitäten

$$\left.\begin{aligned} C^*C &= \left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2\omega_2}\right)^2 A^*A + \left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2\omega_2}\right)^2 BB^* + \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{4\omega_2^2}(A^*B^* + BA), \\ D^*D &= \left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2\omega_2}\right)^2 AA^* + \left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2\omega_2}\right)^2 B^*B + \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{4\omega_2^2}(AB + B^*A^*), \end{aligned}\right\} \quad (3.7)$$

wenn vorher die beiden Wellen A^*A und B^*B vorhanden waren, wobei A, A^* und B, B^* den Vertauschungsregeln (3. 4) genügen müssen. Diese Vertauschungsregeln lassen sich, wie leicht gezeigt werden kann, praktisch dadurch erfüllen, daß man die Amplituden P_t, P_t^*, Q_t, Q_t^* durch Operatoren darstellt mit den Eigenschaften

$$\left.\begin{aligned} R &= \Delta_R^+ \sqrt{\frac{\varkappa c}{\omega}\frac{1}{\Omega}N_R} = \sqrt{\frac{\varkappa c}{\omega}\frac{1}{\Omega}(N_R+1)}\,\Delta_R^+, \\ R^* &= \Delta_R^- \sqrt{\frac{\varkappa c}{\omega}\frac{1}{\Omega}(N_R+1)} = \sqrt{\frac{\varkappa c}{\omega}\frac{1}{\Omega}N_R}\,\Delta_R^-, \\ \Delta_R^+\Delta_R^- &= \Delta_R^-\Delta_R^+ = 1, \end{aligned}\right\} \quad (3.8)$$

wobei sich die N_R häufig leicht auf Diagonalform bringen lassen, und wo jedes Δ_R nur auf Zahlen N mit dem gleichen Index R wirkt (R steht hierbei als Symbol für alle P_t und Q_t).

Wendet man diese Amplitudendarstellung (3. 8) sinngemäß auf (3. 7) an, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\omega_2}N_C &= \left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2\omega_2}\right)^2\frac{1}{\omega_1}N_A + \left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2\omega_2}\right)^2\frac{1}{\omega_1}(N_B+1) + \\ &\quad + \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{4\omega_2^2}\,\frac{1}{\omega_1}\left[\sqrt{N_A N_B}\,\Delta_A^-\Delta_B^- + \sqrt{(N_A+1)(N_B+1)}\;\Delta_B^+\Delta_A^+\right], \\ \frac{1}{\omega_2}N_D &= \left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2\omega_2}\right)^2\frac{1}{\omega_1}(N_A+1) + \left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2\omega_2}\right)^2\frac{1}{\omega_1}N_B + \\ &\quad + \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{4\omega_2^2}\,\frac{1}{\omega_1}\left[\sqrt{(N_A+1)(N_B+1)}\,\Delta_A^+\Delta_B^+ + \sqrt{N_A N_B}\,\Delta_B^-\Delta_A^-\right]. \end{aligned}\right\} \quad (3.9)$$

Wenn also N_A und N_B gewöhnliche Zahlen sind, dann sind N_C und N_D keine Zahlen. Die Quantentheorie schließt also bei genau bekannten Anfangsverhältnissen eine genaue Kenntnis der Verhältnisse nach der Einwirkung des elektrischen Feldes aus. Wohl aber ist eine Aussage über die *Erwartungswerte* möglich, weil nämlich bei der Mittelbildung über alle Phasen der anfangs vorhandenen Wellen die gemischten Operatorenausdrücke in den Klammern [] verschwinden. Man erhält dann

$$\bar{N}_C = \frac{\omega_2}{\omega_1}\left\{\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2\omega_2}\right)^2 N_A + \left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2\omega_2}\right)^2(N_B+1)\right\},$$

$$\bar{N}_D = \frac{\omega_2}{\omega_1}\left\{\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2\omega_2}\right)^2(N_A+1) + \left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2\omega_2}\right)^2 N_B\right\}.$$

Ist insbesondere bei $t < 0$ überhaupt keine Materie vorhanden gewesen, also $N_A = N_B = 0$, so werden danach doch immer zu jedem der in Ω möglichen Wellenzahlvektoren $\mathfrak{k}$ im Mittel

$$\bar{N}_C = \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{4\,\omega_1\,\omega_2} \quad \text{Teilchen mit positiver Ladung}$$

und

$$\bar{N}_D = \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{4\,\omega_1\,\omega_2} \quad \text{Teilchen mit negativer Ladung}$$

vorhanden sein, außer eben in dem Fall $\eta\,\mathfrak{A}_z = 2\,\mathfrak{k}_z$, dessen anschauliche Bedeutung schon im vorigen Abschnitt gezeigt wurde.

Nach der Quantentheorie gibt es also *spontane* Materieerzeugung, und zwar werden in dem zugrunde gelegten Periodizitätsbereich Ω genau so viel Teilchen erzeugt, wie in der ungequantelten Theorie das Verhältnis zwischen erzeugter und vorher vorhandener Materie betrug, nämlich

$$\varepsilon = \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{2\,\omega_1\,\omega_2}. \tag{3. 10}$$

Um die gesamte, durch das $\mathfrak{E}$-Feld erzeugte Materie anzugeben, müssen wir die bisherige Betrachtung für den dreidimensionalen Raum durchführen:

Die dreidimensionale Wellengleichung

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial}{\partial z} - i\eta\,\mathfrak{A}_z\right)^2 - \frac{\partial^2}{c^2\,\partial t^2} - \varkappa^2\right]\psi = 0$$

hat ebene Wellen

$$\psi = A \cdot e^{-i\omega t + i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}$$

zu Lösungen, wo

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \mathfrak{k}_x^2 + \mathfrak{k}_y^2 + (\mathfrak{k}_z - \eta\,\mathfrak{A}_z)^2 + \varkappa^2 \tag{3..11}$$

sein muß.

Die ganze Berechnung der Materieerzeugung verläuft genau wie bisher, nur bekommen jetzt in (3. 10) ω_1 und ω_2 die Bedeutung

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= c\sqrt{\mathfrak{k}_x^2 + \mathfrak{k}_y^2 + (\mathfrak{k}_z - \eta\,\mathfrak{A}_z)^2 + \varkappa^2}, \\ \omega_2 &= c\sqrt{\mathfrak{k}^2 + \varkappa^2} \end{aligned}\right\} \tag{3. 12}$$

entsprechend der neuen Dispersionsbeziehung (3. 11). In dem Periodizitätsquader

$$\Omega = \frac{8\,\pi^3}{\Delta\,\mathfrak{k}_x\,\Delta\,\mathfrak{k}_y\,\Delta\,\mathfrak{k}_z} \tag{3. 13}$$

findet für jede mögliche Wellenzahl $\mathfrak{k}$ die in (3. 10) angegebene Materieerzeugung statt, in der Volumeneinheit also

$$\frac{1}{16\,\pi^3}\int_0^\infty \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}-2+\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\mathrm{d}\mathfrak{k}_x\,\mathrm{d}\mathfrak{k}_y\,\mathrm{d}\mathfrak{k}_z. \qquad (3.14)$$

Dies Integral divergiert aber[1]). Man kann vermuten, daß diese ziemlich schwache Divergenz von der unendlich hohen elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ herrührt, die bei dem plötzlichen Senken des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ auf Null entsteht.

4. Einfluß der Wirkungsdauer des elektrischen Feldes auf die spontane Materieerzeugung.

Um den Einfluß der Wirkungsdauer des elektrischen Feldes auf die spontane Materieerzeugung zu studieren, wählen wir nunmehr $\mathfrak{A}_z$ stetig von der Zeit abhängig in der Form

$$\eta\,\mathfrak{A}_z = a\left(1-\mathfrak{Tg}\,\frac{b}{2}\,t\right)=\frac{2a}{1+e^{bt}} \qquad (4.1)$$

(siehe Fig. 1. Dabei ist $\Delta t \approx 4/b$). Der Parameter b ist hierbei ein direktes Maß dafür, wie schnell das elektrische Feld erzeugt wird und wieder verschwindet; und der bisher behandelte plötzliche Potentialsprung bei $t = 0$ ist als Spezialfall $b \to \infty$ in (4. 1) enthalten. Die Ergebnisse der folgenden Untersuchung müssen sich also stetig an die früheren Ergebnisse anschließen.

Mit diesem Potentialverlauf (4. 1) und dem Ansatz

$$\psi = e^{i\mathfrak{k}_z}\cdot\varphi\,(t)$$

erhält die Wellengleichung

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}-i\eta\,\mathfrak{A}_z\right)^2-\frac{\partial^2}{c^2\,\partial t^2}-\varkappa^2\right]\psi=0$$

die Form

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+c^2\left[\left(\mathfrak{k}_z-\frac{2a}{1+e^{bt}}\right)^2+\varkappa^2\right]\varphi=0. \qquad (4.2)$$

Und diese Gleichung läßt sich auf die Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion transformieren, über deren Lösungen genügend viel bekannt ist, um unser Problem lösen zu können.

---

[1]) Bei Einführung von Zylinderkoordinaten $\mathfrak{k}_r$, $\mathfrak{k}_z$, $\mathfrak{k}_\varphi$ bleibt zwar das Integral über $\mathfrak{k}_r$ und $\mathfrak{k}_\varphi$ endlich. Die letzte Integration über $\mathfrak{k}_z$ divergiert aber wie $\mathrm{const}\cdot\mathfrak{k}_z+\mathrm{const}\cdot\ln\mathfrak{k}_z$.

Führen wir neue Veränderliche

$$y = -e^{bt}, \quad \chi(y) = y^{-\mu} \cdot \varphi \tag{4.3}$$

ein, wo μ noch frei verfügbar bleibt, dann lautet die Wellengleichung in diesen neuen Veränderlichen:

$$y^2(1-y)\frac{d^2\chi}{dy^2} + (2\mu+1)y(1-y)\frac{d\chi}{dy} + \left[\mu^2(1-y) + \left(\frac{\varkappa c}{b}\right)^2(1-y) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\mathfrak{k}_z c}{b}\right)^2(1-y) - 4\frac{c^2}{b^2}\mathfrak{k}_z a + 4\frac{c^2}{b^2}a^2 + 4\frac{c^2}{b^2}a^2\frac{y}{1-y}\right]\varphi = 0.$$

Wählen wir nun

$$\mu^2 = -\frac{c^2}{b^2}\left(\varkappa^2 + (\mathfrak{k}_z - 2a)^2\right), \tag{4.4}$$

wo $2a$ die Höhe des gesamten Potentialsprunges ist (Fig. 1), dann fallen in der Klammer [] alle y-freien Glieder fort, so daß wir die Gleichung durch y dividieren können und mit der Abkürzung

$$\nu^2 = -\frac{c^2}{b^2}(\varkappa^2 + \mathfrak{k}_z^2) \tag{4.5}$$

die Gleichung

$$y(1-y)\frac{d^2\chi}{dy^2} + (2\mu+1)(1-y)\frac{d\chi}{dy} + \left[\nu^2 - \mu^2 + 4\left(\frac{ca}{b}\right)^2\frac{1}{1-y}\right]\chi = 0$$

erhalten (μ und ν sind rein imaginäre Größen).

Um noch das Glied mit $1/1-y$ zu beseitigen, transformieren wir weiter

$$\chi = (1-y)^\lambda \cdot F, \tag{4.6}$$

wo λ später passend gewählt wird. Das führt zur Gleichung

$$y(1-y)\frac{d^2F}{dy^2} + \{(2\mu+1)(1-y) - 2\lambda y\}\frac{dF}{dy} +$$
$$+ \left[\nu^2 - \mu^2 - (2\mu+1)\lambda + \lambda(\lambda-1)\frac{y}{1-y} + 4\left(\frac{ca}{b}\right)^2\frac{1}{1-y}\right]F = 0.$$

Den Faktor [] von F können wir leicht so umformen

$$[\,] = \left[\nu^2 - \mu^2 - (2\mu+1)\lambda - \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{1-y}\left\{\lambda(\lambda-1) + 4\left(\frac{ca}{b}\right)^2\right\}\right],$$

daß man erkennt: Durch die Wahl von

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{8ca}{b}\right)^2}\right) \tag{4.7}$$

verschwinden alle Glieder mit dem Nenner $(1-y)$ aus der Gleichung.

Unter Benutzung der Identität

$$[\nu^2 - \mu^2 - 2\mu\lambda - \lambda^2] = -(\mu + \nu + \lambda)(\mu - \nu + \lambda)$$

erhält die Gleichung die endgültige Form

$$y(1-y)\frac{d^2F}{dy^2} + [(2\mu+1) - (2\mu+2\lambda+1)y]\frac{dF}{dy} - \\ - (\mu+\nu+\lambda)(\mu-\nu+\lambda)F = 0.$$

Denn mit

$$\left.\begin{aligned} \mu + \nu + \lambda &= \alpha, \\ \mu - \nu + \lambda &= \beta, \\ 2\mu + 1 \quad &= \gamma \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

hat man schon die Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion in der üblichen Form:

$$y(1-y)\frac{d^2F}{dy^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)y]\frac{dF}{dy} - \alpha\beta F = 0. \tag{4.9}$$

Da uns physikalisch nur die Gesamtwirkung des in Fig. 1 dargestellten elektrischen Feldes $\mathfrak{E}_z$ auf eine anfänglich vorhandene Materiewelle interessiert, brauchen wir von der Wellenfunktion nichts zu wissen als ihr Verhalten bei $t \to -\infty$ und $t \to +\infty$, d. h. entsprechend (4. 3) bei $y = 0$ und $y = -\infty$, was für die hypergeometrische Funktion wirklich bekannt ist.

$t \to -\infty$: Die hypergeometrische Funktion ist allgemein so normiert, daß sie für $y = 0$ den Wert $+1$ hat.

Aus (4. 3) und (4. 6) ergibt sich also für den zeitlich veränderlichen Teil φ der Wellenfunktion ψ:

$$\varphi(t \to -\infty) = (-1)^{\mu} e^{\mu b t}(1 + e^{bt})^{\lambda},$$

wobei noch $(1 + e^{bt})$ für $t \to -\infty$ gegen 1 geht. Aus (4. 4) und (2. 7) sieht man, daß $\mu = \pm i\frac{\omega_1}{b}$ ist, wir wählen etwa

$$\left.\begin{aligned} \mu &= +i\frac{\omega_1}{b} \\ \text{und ebenso} \qquad \nu &= +i\frac{\omega_2}{b}. \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

Dann wird die Wellenfunktion bis auf Phasenfaktoren vom Betrag 1

$$\psi_{t \to -\infty} = e^{i\omega_1 t + i\mathfrak{k}_z z} \tag{4.11}$$

eine ebene Welle[1]), was ja auch der Fall sein muß, weil sich der Potential-

[1]) Sie ist hier auf 1 normiert. Man könnte natürlich noch in (4. 11) und (4. 12) eine willkürliche Integrationskonstante A anbringen.

verlauf (4. 1) für große negative Zeiten nicht von dem im Abschnitt 2 behandelten unterscheidet (Fig. 1).

$t \to +\infty$: Aus demselben Grunde erwarten wir für $t \to +\infty$ zwei entgegengesetzt geladene ebene Wellen mit entgegengesetzter Fortschreitrichtung.

Bei $y \to -\infty$ verhält sich die hypergeometrische Funktion wie[1])

$$F(y \to -\infty) = D \cdot (-y)^{-\alpha} + C \cdot (-y)^{-\beta},$$

wo D und C noch zu diskutierende Konstante sind.

Mit Berücksichtigung aller Transformationen (4. 3) und (4. 6) und der Definition (4. 8) und (4. 10) wird

$$\varphi(t \to -\infty) = (-1)^{\mu} e^{\mu b t} (1 + e^{b t})^{\lambda} (D e^{-b(\mu+\nu+\lambda)t} + C e^{-b(\mu-\nu+\lambda)t}),$$
$$\varphi(t \to +\infty) = (-1)^{\mu} (1 + e^{-bt})^{\lambda} (C e^{i\omega_2 t} + D e^{-i\omega_2 t}),$$

wobei noch der Faktor $(1 + e^{-bt})$ für große t gegen 1 geht, so daß bis auf Phasenfaktoren vom Betrag 1 die Wellenfunktion für große Zeiten die Gestalt

$$\psi_{t \to +\infty} = C e^{i\omega_2 t + i t_z z} + D e^{-i\omega_2 t + i t_z z} \tag{4. 12}$$

bekommt.

Genau wie beim plötzlichen Potentialsprung (Abschn. 2) tritt hier nach der Einwirkung des elektrischen Feldes eine neue zur Ausgangswelle entgegengesetzt geladene Welle D auf. Genau wie dort gibt das Doppelte ihrer Ladungsdichte ein Maß für die erzeugte Materiemenge.

Die Größe $|D|^2$ hat also hier dieselbe Bedeutung wie im Abschnitt 2. Es ist[1])

$$D = \frac{\Gamma(\beta - \alpha)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma - \alpha)}. \tag{4. 13}$$

Unter Benutzung von (4. 8) und der Rechenregel

$$\Gamma(n+1) = (n+1)\,\Gamma(n)$$

wird

$$D = \frac{(\mu - \nu + \lambda)\,\Gamma(1 - 2\nu)\,\Gamma(1 + 2\mu)}{-2\nu\,\Gamma(\mu - \nu + \lambda + 1)\,\Gamma(\mu - \nu - \lambda + 1)}. \tag{4. 14}$$

Hierin sind $\mu = i\frac{\omega_1}{b}$ und $\nu = i\frac{\omega_2}{b}$ rein imaginäre Größen. Für den hier zu untersuchenden Fall eines nicht allzu rasch erzeugten elektrischen Feldes $\mathfrak{E}$ können wir auch

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(1 (\pm) \sqrt{1 - \left(\frac{8\,c\,a}{b}\right)^2}\right) \tag{4. 7a}$$

[1]) Siehe etwa A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 2. Bd., 1939, S. 798.

genähert als rein imaginär annehmen

$$\lambda \approx i\frac{\lambda'}{b}; \quad \lambda' = 4ca.$$

Dann kann man zur Berechnung von $|D|^2$ die Rechenregel verwenden:

$$|\Gamma(1 \pm n)|^2 = \frac{2\pi|n|}{e^{\pi|n|} - e^{-\pi|n|}},$$

wo n rein imaginär sein muß. Man erhält:

$$\left.\begin{aligned} |D|^2 &= \frac{|\mu-\nu+\lambda|^2|\nu||\mu|\,(e^{\pi|\mu-\nu+\lambda|}-e^{-\pi|\mu-\nu+\lambda|})\,(e^{\pi|\mu-\nu-\lambda|}-e^{-\pi|\mu-\nu-\lambda|})}{\nu^2|\mu-\nu+\lambda||\mu-\nu-\lambda|\,(e^{2\pi|\nu|}-e^{-2\pi|\nu|})\,(e^{2\pi|\mu|}-e^{-2\pi|\mu|})}, \\ |D|^2 &= \frac{\omega_1(\omega_1-\omega_2+\lambda')\left(e^{\frac{2\pi}{b}(\omega_1-\omega_2)}+e^{-\frac{2\pi}{b}(\omega_1-\omega_2)}-e^{\frac{2\pi}{b}\lambda'}-e^{-\frac{2\pi}{b}\lambda'}\right)}{\omega_2(\omega_1-\omega_2-\lambda')\left(e^{\frac{2\pi}{b}(\omega_1+\omega_2)}+e^{-\frac{2\pi}{b}(\omega_1+\omega_2)}-e^{\frac{2\pi}{b}(\omega_1-\omega_2)}-e^{-\frac{2\pi}{b}(\omega_1-\omega_2)}\right)}. \end{aligned}\right\} \quad (4.\ 1$$

Die Ladungsdichte der D-Welle ist entsprechend (2. 6)

$$\varrho_D \sim \eta\frac{\omega_2}{c}|D|^2.$$

Ebenso kommt der ursprünglich vorhandenen Welle nach (2. 6) und (4. 11) die Ladungsdichte

$$\varrho_1 \sim \eta\frac{\omega_1}{c}\cdot 1$$

zu, so daß schließlich das Verhältnis der insgesamt erzeugten Materie zur ursprünglich vorhandenen wird:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= 2\frac{\omega_2}{\omega_1}|D|^2, \\ \varepsilon &= 2\frac{(\omega_1-\omega_2+\lambda')\left(e^{\frac{2\pi}{b}(\omega_1-\omega_2)}+e^{-\frac{2\pi}{b}(\omega_1-\omega_2)}-e^{\frac{8\pi}{b}ca}-e^{-\frac{8\pi}{b}ca}\right)}{(\omega_1-\omega_2-\lambda')\left(e^{\frac{2\pi}{b}(\omega_1+\omega_2)}+e^{-\frac{2\pi}{b}(\omega_1+\omega_2)}-e^{\frac{2\pi}{b}(\omega_1-\omega_2)}-e^{-\frac{2\pi}{b}(\omega_1-\omega_2)}\right)}. \end{aligned}\right\} \quad (4.\ 1$$

Für den Grenzfall sehr großer b wird, wie man aus (4. 7) ersieht, $\lambda = 0$, wenn in (4. 7) das Minuszeichen gewählt wird, was sich im folgenden rechtfertigt. Berücksichtigt man das in (4. 14) und den folgenden Rechnungen, so erhält man ein

$$\varepsilon_{b\to\infty} = \frac{e^{\frac{2\pi}{b}(\omega_1-\omega_2)}+e^{-\frac{2\pi}{b}(\omega_1-\omega_2)}-2}{e^{\frac{2\pi}{b}(\omega_1+\omega_2)}+e^{-\frac{2\pi}{b}(\omega_1+\omega_2)}-e^{\frac{2\pi}{b}(\omega_1-\omega_2)}-e^{-\frac{2\pi}{b}(\omega_1-\omega_2)}}. \quad (4.\ 17)$$

Entwicklung nach den kleinen Exponenten ergibt schließlich

$$\varepsilon_{b\to\infty} = \frac{(\omega_1-\omega_2)^2}{2\,\omega_1\,\omega_2} \tag{4.18}$$

in Übereinstimmung mit (3.10), was zu fordern ist.

Aus (4.16) und (4.17) sieht man auch, daß es nur eine Eigentümlichkeit des sprunghaft plötzlich erzeugten elektrischen Feldes $\mathfrak{E}$ war, daß für diejenige Welle, deren Strom durch das Feld genau umgekehrt wird, keine Materieerzeugung stattfindet. Denn setzen wir $\omega_1 = \omega_2$, dann verschwindet zwar $\varepsilon_{b\to\infty}$ (4.17), nicht aber das ε für beliebige b (4.16).

Die hier gegebene Rechnung läßt sich auch für den Fall durchführen, daß anfangs zwei entgegengesetzt geladene Wellen vorhanden waren, und dies Ergebnis läßt sich genau analog zu den Betrachtungen des Abschnitts 3 quantisieren. Es folgt, daß in der quantisierten skalaren Feldtheorie der Materie zu jedem Wellenzahlvektor $\mathfrak{k}$ im Mittel ebenso viele Teilchen im Periodizitätsbereich Ω spontan erzeugt werden, wie in der klassischen Theorie die Zahl ε angibt. Die Anzahl der im ganzen in der Volumeneinheit erzeugten Teilchen ist

$$N = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^\infty \varepsilon\,\mathrm{d}\mathfrak{k}, \tag{4.19}$$

wo ε aus (4.16) zu entnehmen ist. Die ω_1 und ω_2 haben aber jetzt die Bedeutung (3.12).

Für große $\mathfrak{k}$ geht ω_1 in ω_2 über. Der Integrand in (4.18) geht für wachsende $\mathfrak{k}$ exponentiell gegen Null, und die Zahl N der im cm³ erzeugten Teilchen bleibt endlich.

Für einen gewissen Bereich nicht allzu großer $\mathfrak{A}$ und b — die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ darf eine gewisse obere Grenze nicht überschreiten — läßt sich N als Funktion von $\mathfrak{A}$ und b und der für die Materieart charakteristischen Konstanten $\varkappa$ abschätzen. Wir führen dazu Zylinderkoordinaten $\mathfrak{k}_z$, $\mathfrak{k}_r = \sqrt{\mathfrak{k}_x^2 + \mathfrak{k}_y^2}$ und $\mathfrak{k}_\varphi$ ein mit der Symmetrieachse in der Richtung von $\mathfrak{E}$.

Mit der Transformation

$$\mathfrak{k}_z = \mathfrak{k}_z' + a$$

wird der Quotient von Exponentialfunktionen im Ausdruck für ε eine gerade Funktion von $\mathfrak{k}_z'$. Messen wir noch $\mathfrak{k}_r$, $\mathfrak{k}_z'$ und $\varkappa$ in Einheiten a, schreiben also

$$\frac{\mathfrak{k}_r}{a} = k_r, \quad \frac{\mathfrak{k}_z'}{a} = k_z, \quad \frac{\varkappa}{a} = k, \tag{4.20}$$

dann ist

$$N = \frac{a^3}{2\pi^2} \int_{-1}^{\infty} \mathrm{d}k_z \int_{0}^{\infty} k_r \, \mathrm{d}k_r \times$$

$$\times \frac{\left(4-(\mu_2-\mu_1)\right)\left(e^{4\beta}+e^{-4\beta}-e^{\beta(\mu_2-\mu_1)}-e^{-\beta(\mu_2-\mu_1)}\right)}{\left(4+(\mu_2-\mu_1)\right)\left(e^{\beta(\mu_2+\mu_1)}+e^{-\beta(\mu_2+\mu_1)}-e^{\beta(\mu_2-\mu_1)}-e^{-\beta(\mu_2-\mu_1)}\right)} \quad (4.\,21)$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= \sqrt{(k_z-1)^2+k_r^2+k^2}, \\ \mu_2 &= \sqrt{(k_z+1)^2+k_r^2+k^2}, \\ \beta &= 2\pi\frac{ca}{b}. \end{aligned}\right\} \quad (4.\,22)$$

Zur Abschätzung spalten wir das Integral (4. 21) auf in $N_1 = \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}k_z \ldots$ und $N_2 = \int_{-1}^{0} \mathrm{d}k_z \ldots$ und betrachten zunächst das erste von beiden.

Da nach (4. 7a) $\beta \gg 1$ sein soll, fallen im Zähler und Nenner alle Glieder mit negativem Exponenten fort. Da im ganzen $\mathfrak{k}$-Bereich $-2 \leqq (\mu_2-\mu_1) \leqq +2$ und $\beta \gg 1$, bleibt im Zähler nur das Glied $e^{4\beta}$ übrig und $\frac{4-(\mu_2-\mu_1)}{4+(\mu_2-\mu_1)}$ läßt sich zwischen $\frac{1}{3}$ und 3 einschließen.

Wenn noch k genügend groß gegen 1 ist, ist in dem ganzen Integrationsgebiet $(\mu_2+\mu_1) > (\mu_2-\mu_1)$, so daß wegen $\beta \gg 1$ endgültig

$$N_1 \approx \frac{a^3}{8\pi^2}\,(\overline{\tfrac{1}{3},\,3})\, e^{4\beta} \int_{0}^{\infty} k_r \, \mathrm{d}k_r \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}k_z \, e^{-\beta(\mu_2+\mu_1)} \quad (4.\,23)$$

wird.

Diese Voraussetzung $k > 1$ bedeutet, daß $a < mc/\hbar$ sein soll. Im selben Maß, wie $a < mc/\hbar$ gewählt wird, muß aber auch $b \ll mc^2/\hbar$ sein, weil ja $\beta = 2\pi\frac{ca}{b} \gg 1$ sein soll.

Der Gültigkeitsbereich der hier durchzuführenden Abschätzung ist also nach oben begrenzt durch die Beziehungen

$$a < \frac{mc}{\hbar}, \quad b \ll \frac{mc^2}{\hbar}. \quad (4.\,24)$$

Das bedeutet, daß $\mathfrak{E}$ bestimmt nicht größer als $\frac{m^2c^3}{e\hbar} \approx 10^{16}\,\mathrm{Vcm^{-1}}$ sein darf. Bei fest vorgegebenem $\mathfrak{A}$ wird diese Abschätzung die Materieerzeugung für beliebig kleine b ergeben; sie gestattet aber nicht, bei festem b die Materieerzeugung für kleine $\mathfrak{A}$ zu untersuchen, weil ja eben (4. 7a) erfüllt bleiben muß.

Der Exponent im Integral (4. 23) läßt sich — wenn man

$$\sqrt{k_r^2 + k^2} = K$$

setzt, — zwischen folgenden Grenzen einschließen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Für } -K \leqq k_z \leqq 0\text{:} & K+1-k_z \\ \text{für } \quad 0 \leqq k_z \leqq K\text{:} & K+1+k_z \\ \text{für } \quad K < k_z\text{:} & 2\,k_z \end{array}\right\} \leqq (\mu_2+\mu_1) \leqq \left\{\begin{array}{l} 2\,(K-k_z), \\ 2\,(K+k_z), \\ 2\,(K+k_z). \end{array}\right\} \quad (4.25)$$

Durch elementare Integration erhält man dann für N_1 (4. 23) die Abschätzung

$$\frac{a^3}{24\pi^2}\,\frac{k}{4\beta^2}\,e^{4\beta-2\beta k} \leqq N_1 \leqq \frac{3\,a^3}{8\,\pi^2}\,e^{4\beta}\left(\frac{k}{4\,\beta^2}\,e^{-2\beta k}+\frac{k}{\beta^2}\,e^{-\beta(1+k)}\right),$$

wobei höhere Potenzen von $1/\beta$ vernachlässigt sind.

Analog erhält man für das zweite Integral die Abschätzung

$$\frac{a^3}{24\pi^2}\,\frac{k}{4\beta^2}\,e^{4\beta-2\beta k} \leqq N_2 \leqq \frac{3\,a^3}{8\,\pi^2}\,\frac{k}{\beta^2}\,e^{4\beta-\beta(k+1)},$$

für das ganze Integral N also

$$\frac{k\,a^3}{48\,\pi^2\,\beta^2}\,e^{2\beta(2-k)} \leqq N_1+N_2 = N \leqq \frac{3}{4}\,\frac{k\,a^3}{\pi^2\,\beta^2}\,e^{\beta(3-k)}+\frac{3\,k\,a^3}{32\,\pi^2\,\beta^2}\,e^{2\beta(2-k)},$$

oder, da $\beta = 2\,\pi\,\frac{e\,a}{b}$ und $k = \frac{\varkappa}{a}$ ist,

$$\frac{\varkappa\,b^2}{192\,\pi^4\,c^2}\,e^{\frac{4\pi e}{b}(2a-\varkappa)} \leqq N \leqq \frac{3}{16}\,\frac{\varkappa\,b^2}{\pi^4\,c^2}\,e^{\frac{2\pi e}{b}(3a-\varkappa)}+\frac{3\,\varkappa\,b^2}{128\,\pi^4\,c^2}\,e^{\frac{4\pi e}{b}(2a-\varkappa)}$$

N verhält sich also ungefähr wie

$$N \approx \Lambda\,\varkappa\,b^2\,e^{\frac{2\pi e}{b}(1+\lambda)\,\eta\,|\mathfrak{A}|-\varkappa)},$$

wo $\Lambda \approx \frac{10^{-2}}{\pi^4\,c^2}$ und $\lambda \leqq 1$ ist. In dem betrachteten Gebiet (4. 24) ist der Exponent negativ.

5. *Spinorielle Materiewellen im sprunghaft plötzlich erzeugten elektrischen Feld.*

Wir lösen jetzt die eindimensionale Dirac-Gleichung

$$\left[\gamma_3\left(\frac{\partial}{\partial z}-i\,\eta\,\mathfrak{A}_z\right)+\frac{1}{i}\,\gamma_4\,\frac{\partial}{c\,\partial t}-\varkappa\right]\psi = 0 \quad (5.1)$$

für den Verlauf des Vektorpotentials $\mathfrak{A}_z$, wie er in Fig. 1 dargestellt ist. Wir benutzen dabei für die γ die übliche Darstellung

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

mit den Eigenschaften

$$\gamma_3 \gamma_4 + \gamma_4 \gamma_3 = 0$$
$$\gamma_3^2 = \gamma_4^2 = 1.$$

Und ψ ist eine Spalte von vier Wellenfunktionen ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4.

Für Gebiete konstanten Vektorpotentials $\mathfrak{A}_z$ ist allgemein jede ebene Welle

$$\psi = A\, e^{i \mathfrak{k}_z z - i \omega t} \tag{5.3}$$

eine Lösung der Wellengleichung (5.1), wenn nur $\mathfrak{k}_z$ und ω so gewählt sind, daß — genau wie in der skalaren Theorie — die Dispersionsbeziehung

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = (\mathfrak{k}_z - \eta\, \mathfrak{A}_z)^2 + \varkappa^2 \tag{5.4}$$

erfüllt ist, und wenn A eine Spalte von vier konstanten Amplituden A_1, A_2, A_3, A_4 ist, von denen zwei willkürlich vorgegeben werden können, während dann die beiden anderen durch die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} A_3 &= \frac{i}{\varkappa}\left(\mathfrak{k}_z - \eta\, \mathfrak{A}_z - \frac{\omega}{c}\right) A_1, \\ A_4 &= -\frac{i}{\varkappa}\left(\mathfrak{k}_z - \eta\, \mathfrak{A}_z + \frac{\omega}{c}\right) A_2 \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

festgelegt sind, die sich durch Einsetzen von (5.3) in (5.1) ergeben.

Für unsere Aufgabe, daß bis zur Zeit $t = 0$ ein konstantes Vektorpotential $\mathfrak{A}_z$ vorhanden ist, das bei $t = 0$ plötzlich auf Null gesenkt wird, setzen wir deshalb als Lösung an:

$$\left.\begin{aligned} &t < 0: \quad \psi_1 = A \cdot e^{i \mathfrak{k}_z z - i \omega_1 t} \\ &\text{mit} \\ &\left(\frac{\omega_1}{c}\right)^2 = (\mathfrak{k}_z - \eta\, \mathfrak{A}_z)^2 + \varkappa^2, \\ &t > 0: \quad \psi_2 = C \cdot e^{i \mathfrak{k}_z z - i \omega_2 t} + D\, e^{i \mathfrak{k}_z z + i \omega_2 t} \\ &\text{mit} \\ &\left(\frac{\omega_2}{c}\right)^2 = \mathfrak{k}_z^2 + \varkappa^2, \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

wo A, C, D jeweils vierzeilige Spalten sind, deren Glieder sinngemäß Bedingungen erfüllen, die der Beziehung (5.5) analog sind.

Der Wellenzahlvektor $\mathfrak{k}_z$ sei von vornherein fest vorgegeben. Der Ansatz (5. 6) enthält die Spezialisierung $B = 0$. Wir untersuchen also den besonderen Fall, daß genau eine einheitliche Materiewelle vorhanden war, ehe das elektrische Feld $\mathfrak{E}_z$ erzeugt wurde.

Die Spalten C und D sind nun so zu bestimmen, daß ψ_1 und ψ_2 zusammen *eine* einheitliche Lösung der Wellengleichung für das ganze Zeitintervall ergeben.

Dazu müssen die Wellenfunktionen ψ_1 und ψ_2 bei $t = 0$ stetig ineinander übergehen, während die erste zeitliche Ableitung der so zusammengesetzten Wellenfunktion bei $t = 0$ einen Sprung macht, weil ja eben die Wellengleichung erster Ordnung ist. Wir fordern also

$$A = C + D. \tag{5. 7}$$

Das sind, wenn man die Spalten ausschreibt, vier Gleichungen zur Bestimmung der vier Unbekannten C_1, C_2, D_1, D_2 aus den beiden vorgegebenen Amplituden A_1, A_2 der anfänglich vorhandenen Welle. Alle Amplituden mit den Indizes 3 oder 4 ergeben sich ja für jede Welle aus den jeweils (5. 5) analogen Beziehungen.

$$A_1 = C_1 + D_1$$

$$\frac{i}{\varkappa}\left(\mathfrak{k}_z - \eta\,\mathfrak{A}_z - \frac{\omega_1}{c}\right)A_1 = \frac{i}{\varkappa}\left(\mathfrak{k}_z - \frac{\omega_2}{c}\right)C_1 + \frac{i}{\varkappa}\left(\mathfrak{k}_z + \frac{\omega_2}{c}\right)D_1.$$

$$A_2 = C_2 + D_2$$

$$-\frac{i}{\varkappa}\left(\mathfrak{k}_z - \eta\,\mathfrak{A}_z + \frac{\omega_1}{c}\right)A_2 = -\frac{i}{\varkappa}\left(\mathfrak{k}_z + \frac{\omega_2}{c}\right)C_2 - \frac{i}{\varkappa}\left(\mathfrak{k}_z - \frac{\omega_2}{c}\right)D_2.$$

Man erhält

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{c}{\omega_2}\eta\,\mathfrak{A}_z\right)A_1; \\ D_1 &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{c}{\omega_2}\eta\,\mathfrak{A}_z\right)A_1; \\ C_2 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{c}{\omega_2}\eta\,\mathfrak{A}_z\right)A_2; \\ D_2 &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{c}{\omega_2}\eta\,\mathfrak{A}_z\right)A_2 \end{aligned}\right\} \tag{5. 8}$$

und hieraus und aus der zu (5. 5) analogen Beziehung

$$\left.\begin{aligned} C_3 &= \frac{i}{2\varkappa}\left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{c}{\omega_2}\eta\,\mathfrak{A}_z\right)\left(\mathfrak{k}_z - \frac{\omega_2}{c}\right)A_1; \\ D_3 &= \frac{i}{2\varkappa}\left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{c}{\omega_2}\eta\,\mathfrak{A}_z\right)\left(\mathfrak{k}_z + \frac{\omega_2}{c}\right)A_1; \\ C_4 &= -\frac{i}{2\varkappa}\left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{c}{\omega_2}\eta\,\mathfrak{A}_z\right)\left(\mathfrak{k}_z + \frac{\omega_2}{c}\right)A_2; \\ D_4 &= -\frac{i}{2\varkappa}\left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{c}{\omega_2}\eta\,\mathfrak{A}_z\right)\left(\mathfrak{k}_z - \frac{\omega_2}{c}\right)A_2. \end{aligned}\right\} \tag{5. 9}$$

Es tritt also hier ebenso wie in der skalaren Theorie nach der kurzzeitigen Einwirkung des elektrischen Feldes $\mathfrak{E}_z$ außer der anfangs vorhandenen Materie eine neue D-Welle mit entgegengesetzter Frequenz auf.

Da aber hier in der Dirac-Theorie die Frequenz nicht die Ladung bedeutet, kann nicht ohne weiteres gesagt werden, die D-Welle gebe ein Maß für die Materieerzeugung. Vielmehr bleibt bei dem Vorgang die Gesamtladung erhalten. Aus (5. 9) und (5. 10) sieht man nämlich sofort, daß die Ladungsdichte der C-Welle um ebensoviel geringer als die der A-Welle ist, wie die Dichte der D-Welle beträgt, so daß man sagen muß: Bei rein klassischer Auffassung der Dirac-Theorie geht durch die Einwirkung des elektrischen Feldes ein Teil der Materie aus dem Zustand $e^{-i\omega t}$ in den Zustand $e^{i\omega t}$ über.

Diese Überführung eines Teils der vorhandenen spinoriellen Materie aus dem Anfangszustand in denjenigen Endzustand, dem derselbe Wellenzahlvektor $\mathfrak{k}$, aber entgegengesetzte Frequenz zukommt, ließe sich nur dann als *induzierte* Materieerzeugung deuten, wenn man schon einige Aussagen der Löchertheorie vorausnähme.

In der quantentheoretischen Interpretation mit Hilfe der Löchertheorie wird dann sogar *spontane* Materieerzeugung möglich: Die Frequenz wird ja hier mit der Energie identifiziert ($E = \hbar\,\omega$), und die Löchertheorie postuliert, daß das ladungsfreie Vakuum aus der Gesamtheit aller mit je einem Elektron besetzten Zustände negativer Energie bestehen soll, während alle Zustände positiver Energie unbesetzt bleiben sollen.

Das ungeladene Vakuum enthält also zu jedem Wellenzahlvektor $\mathfrak{k}$ Elektronenmaterie im Zustand *negativer* Energie, die (5. 9) entsprechend durch das elektrische Feld $\mathfrak{E}_z$ in den Zustand *positiver* Energie gehoben werden kann und jetzt als *reale* Elektronenmaterie gezählt wird, während der frei gewordene Zustand negativer Energie als Positronenzustand gilt. Die D-Welle gibt also doch ein Maß für die *spontane* Materieerzeugung. Da jeder Zustand nach dem Pauli-Prinzip entweder ein Elektron enthält oder keins, muß $|D|^2$ als Wahrscheinlichkeitsamplitude für Paarerzeugung aufgefaßt werden, vorausgesetzt, daß die A-Welle auf 1 normiert wird.

Wir geben jetzt für ein festes $\mathfrak{k}_z$ diese Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen erzeugt wird, an. Sie soll wieder ε heißen.

In der hier gewählten Schreibweise der Dirac-Gleichung hat der Vierervektor für Strom und Ladung die Komponenten

$$s_\mu = \psi^+ \gamma_\mu \psi \quad \text{mit} \quad \psi^+ = \psi^* \gamma_4 .$$

Die Ladungsdichte ist also

$$\varrho = \psi^* 1 \psi. \tag{5.10}$$

Und für ε bekommen wir schließlich aus (5.5) und (5.9)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= 2\frac{\sum_{\mu=1}^{4} D_\mu^* D_\mu}{\sum_{\mu=1}^{4} A_\mu^* A_\mu}, \\ \varepsilon &= \frac{\begin{aligned}&\left(1-\frac{\omega_1}{\omega_2}-\frac{c}{\omega_2}\eta\,\mathfrak{A}_z\right)^2\left(\varkappa^2+\left(\mathfrak{k}_z+\frac{\omega_2}{c}\right)^2\right)A_1^* A_1 + \\ &\quad+\left(1-\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{c}{\omega_2}\eta\,\mathfrak{A}_z\right)^2\left(\varkappa^2+\left(\mathfrak{k}_z-\frac{\omega_2}{c}\right)^2\right)A_2^* A_2\end{aligned}}{\begin{aligned}&2\left(\varkappa^2+\left(\mathfrak{k}_z-\eta\,\mathfrak{A}_z-\frac{\omega_1}{c}\right)^2\right)A_1^* A_1 + \\ &\quad+2\left(\varkappa^2+\left(\mathfrak{k}_z-\eta\,\mathfrak{A}_z+\frac{\omega_1}{c}\right)^2\right)A_2^* A_2\end{aligned}}. \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

Für die beiden speziellen Wellen ($A_1 \neq 0$, $A_2 = 0$) und ($A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$) vereinfacht sich dieser Ausdruck entsprechend.

Wählt man aber, was ja für die spontane Materieerzeugung im Vakuum von Interesse ist, $A_1 = A_2$, so vereinfacht sich der Ausdruck für ε unter mehrfacher Benutzung der Dispersionsbeziehung (5.4) zu

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2+\left(\eta\,\mathfrak{A}_z\frac{c}{\omega_1}\right)^2-2\frac{\omega_2}{\omega_1}-\right.$$
$$\left.-2\,\eta\,\mathfrak{A}_z\,\mathfrak{k}_z\left(\frac{c}{\omega_2}\right)^2+2\,\eta\,\mathfrak{A}_z\,\mathfrak{k}_z\frac{c^2}{\omega_1\omega_2}\right]. \tag{5.12}$$

Um die gesamte spontane Materieerzeugung anzugeben, hat man die bisherige Betrachtung auf den dreidimensionalen Raum auszudehnen, was nichts ändert, als daß

$$\frac{\omega_1}{c} = \sqrt{(\mathfrak{k}_z-\eta\,\mathfrak{A}_z)^2+\mathfrak{k}_y^2+\mathfrak{k}_x^2+\varkappa^2}$$

und

$$\frac{\omega_2}{c} = \sqrt{\mathfrak{k}^2+\varkappa^2}$$

wird.

Mit diesen ω_1 und ω_2 ist dann (5.12) über den ganzen $\mathfrak{k}$-Raum zu integrieren.

6. *Spinorielle Materiewellen im langsam erzeugten elektrischen Feld.*

Entsprechend den Rechnungen des Abschnitts 4 für *skalare* Materie soll jetzt die Paarerzeugung für *spinorielle* Materie angegeben werden in dem langsam erzeugten elektrischen Feld mit dem in Fig. 1 dargestellten Verlauf des Vektorpotentials.

Mit diesem Potentialverlauf lautet die Dirac-Gleichung:

$$\left[\gamma_3\left(\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{2a}{1+e^{bt}}\right) + \frac{1}{i}\gamma_4\frac{\partial}{c\,\partial t} - \varkappa\right]\psi = 0. \tag{6.1}$$

Setzen wir wieder

$$\psi = e^{i\mathfrak{k}_z z}\cdot\varphi(t) \tag{6.2}$$

und führen statt t eine neue Veränderliche

$$y = -e^{bt} \tag{6.3}$$

ein, so lautet die Wellengleichung

$$\left[\gamma_3 i(\mathfrak{k}_z(1-y) - 2a) + \frac{1}{i}\gamma_4\frac{b}{c}y(1-y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} - \varkappa(1-y)\right]\varphi(y) = 0.$$

Multiplikation der γ mit der vierreihigen Spalte $\varphi(y) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ gibt dann, wenn man jede Zeile für sich schreibt, das System von vier Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
y(1-y)\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}y} + \frac{ic}{b}\{\mathfrak{k}_z(1-y) - 2a\}\varphi_1 &= \frac{\varkappa c}{b}(1-y)\varphi_3,\\
y(1-y)\frac{\mathrm{d}\varphi_3}{\mathrm{d}y} - \frac{ic}{b}\{\mathfrak{k}_z(1-y) - 2a\}\varphi_3 &= -\frac{\varkappa c}{b}(1-y)\varphi_1,\\
y(1-y)\frac{\mathrm{d}\varphi_4}{\mathrm{d}y} + \frac{ic}{b}\{\mathfrak{k}_z(1-y) - 2a\}\varphi_4 &= -\frac{\varkappa c}{b}(1-y)\varphi_2,\\
y(1-y)\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}y} - \frac{ic}{b}\{\mathfrak{k}_z(1-y) - 2a\}\varphi_2 &= \frac{\varkappa c}{b}(1-y)\varphi_4.
\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Die ersten beiden Gleichungen enthalten φ_1 und φ_3 verkoppelt, die beiden letzten φ_2 und φ_4. Es genügt also, *ein* solches Paar von Gleichungen zu betrachten, etwa das für φ_2 und φ_4. Man braucht dann immer nur $\varkappa$ mit $-\varkappa$ zu vertauschen, um das erste Gleichungspaar zu erhalten; dabei entsprechen dann φ_2 und φ_3 einander und ebenso φ_4 und φ_1.

Differentiation der dritten Gleichung nach y liefert $\mathrm{d}\varphi_2/\mathrm{d}y$. Setzt man dies in die vierte Gleichung ein, so erhält man schließlich für φ_4 die Gleichung zweiter Ordnung.

$$y^2(1-y)\frac{\mathrm{d}^2\varphi_4}{\mathrm{d}y^2} + y(1-y)\frac{\mathrm{d}\varphi_4}{\mathrm{d}y} + \left[\frac{c^2}{b^2}\{(\mathfrak{k}_z - 2a)^2 - \varkappa^2\} - \right.$$
$$\left. - \frac{c^2}{b^2}y(\mathfrak{k}_z^2 - \varkappa^2) + \frac{y}{1-y}\left(\left(\frac{2ca}{b}\right)^2 - i\frac{2ca}{b}\right)\right]\varphi_4 = 0.$$

Auf analoge Weise erhält man für φ_2 die Gleichung

$$y^2(1-y)\frac{\mathrm{d}^2\varphi_2}{\mathrm{d}y^2} + y(1-y)\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}y} + \left[\frac{c^2}{b^2}\{(\mathfrak{k}_z - 2a)^2 - \varkappa^2\} - \right.$$
$$\left. - \frac{c^2}{b^2}y(\mathfrak{k}_z^2 - \varkappa^2) + \frac{y}{1-y}\left(\left(\frac{2ca}{b}\right)^2 + i\frac{2ca}{b}\right)\right]\varphi_2 = 0.$$

Beide Gleichungen sind invariant gegen die Vertauschung von $\varkappa$ mit $-\varkappa$, gelten also auch für φ_1 und φ_3, so daß für das ganze Problem nur die Gleichung

$$y^2(1-y)\frac{d^2\varphi}{dy^2} + y(1-y)\frac{d\varphi}{dy} + \left[\frac{c^2}{b^2}\{(\mathfrak{k}_z - 2a)^2 - \varkappa^2\} - \right.$$
$$\left. - \frac{c^2}{b^2} y\,(\mathfrak{k}_z^2 - \varkappa^2) + \frac{y}{1-y}\,\frac{2ca}{b}\left(\frac{2ca}{b} \pm i\right)\right]\varphi = 0 \qquad (6.5)$$

zu lösen bleibt, wobei sich immer das obere Vorzeichen (+) auf φ_2 und φ_3 bezieht, das untere (−) auf φ_1 und φ_4.

Diese Gleichung (6.5) läßt sich ähnlich wie Gleichung (4.2) auf die Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion abbilden[1]).

Mit Hilfe der Transformation

$$\varphi = y^\mu \chi(y) \qquad (6.6)$$

erreicht man, daß die Gleichung durch y teilbar wird, wenn man

$$\mu^2 = -\frac{c^2}{b^2}\{(\mathfrak{k}_z - 2a)^2 + \varkappa^2\} \qquad (6.7)$$

wählt. Mit der Abkürzung

$$\nu^2 = -\frac{c^2}{b^2}\{\mathfrak{k}_z^2 + \varkappa^2\} \qquad (6.8)$$

lautet dann die Gleichung:

$$y(1-y)\frac{d^2\chi}{dy^2} + (2\mu+1)(1-y)\frac{d\chi}{dy} +$$
$$+ \left[\nu^2 - \mu^2 + \frac{1}{1-y}\,\frac{2ca}{b}\left(\frac{2ca}{b} \pm i\right)\right]\chi = 0. \qquad (6.9)$$

Die Transformation

$$\chi(y) = (1-y)^{\pm\lambda}\cdot F(y) \quad \text{mit} \quad \lambda = i\,\frac{2ca}{b} \qquad (6.10)$$

läßt noch das Glied mit dem Nenner $(1-y)$ verschwinden (dabei gilt der Exponent $+\lambda$ für die Wellenfunktionen ψ_2 und ψ_3, $-\lambda$ für ψ_1 und ψ_4):

$$y(1-y)\frac{d^2F}{dy^2} + \{(2\mu+1) - (2\mu \pm 2\lambda + 1)\,y\}\frac{dF}{dy} -$$
$$- (\mu + \nu \pm \lambda)(\mu - \nu \pm \lambda)F = 0.$$

---

[1]) Eine ähnliche Rechnung ist auch durchgeführt bei A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 2. Bd., 1939, S. 324, oder siehe auch F. Sauter, ZS. f. Phys. 73, 547, 1931.

Mit

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 = \alpha_3 = \mu + \nu + \lambda; \quad \beta_2 = \beta_3 = \mu - \nu + \lambda; \\ \alpha_1 = \alpha_4 = \mu + \nu - \lambda; \quad \beta_1 = \beta_4 = \mu - \nu - \lambda; \\ \gamma_{1,2,3,4} = 2\mu + 1 \end{aligned}\right\} \quad (6.11)$$

ist das die Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion in der üblichen Schreibweise

$$y(1-y)\frac{d^2F}{dy^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)y)\frac{dF}{dy} - \alpha\beta F = 0. \quad (6.12)$$

Wir geben jetzt die Wellenfunktion für große negative Zeiten an. Nach (6. 2), (6. 6) und (6. 10) ist

$$\psi_{2,3} = e^{i t_z z} \cdot y^{\mu} (1-y)^{\lambda} \cdot F(y) \cdot A_{2,3};$$
$$\psi_{1,4} = e^{i t_z z} \cdot y^{\mu} (1-y)^{-\lambda} \cdot F(y) \cdot A_{1,4},$$

wobei A_1, A_2, A_3, A_4 noch frei verfügbare Integrationskonstante sind Für große negative Zeiten geht nach (6. 3) y gegen Null. $F(0)$ ist auf 1 normiert. Wählen wir noch, was (6. 7) entspricht,

$$\mu = -i\frac{\omega_1}{b}, \quad (6.13)$$

wo ω_1 genau wie früher die Frequenz der vor Einwirkung des elektrischen Feldes vorhandenen Materiewelle ist, so wird

$$\psi_{t \to -\infty} = A \cdot e^{i t_z z - i\omega_1 t}. \quad (6.14)$$

Dabei wählen wir die Spalte A der vier Integrationskonstanten A_1, A_2, A_3, A_4 so, daß die ebene Welle $\psi_{t \to -\infty}$ wirklich Lösung der Wellengleichung wird: Etwa A_1 und A_2 willkürlich und A_3, A_4 entsprechend der Beziehung (5. 5). Mit dieser Wahl ist dann ψ für alle Zeiten bestimmt.

Für $t \to \infty$ geht $y \to -\infty$, und dort verhält sich die hypergeometrische Funktion wie

$$F(y \to -\infty) = D'(-y)^{-\alpha} + C'(-y)^{-\beta}.$$

Demnach wird z. B.

$$\varphi_2(t \to \infty) = A_2 e^{\mu b t}(1 + e^{b t})^{\lambda} (C'_2 e^{b t(-\mu + \nu - \lambda)} + D'_2 e^{b t(-\mu - \nu - \lambda)}),$$
$$\varphi_2(t \to \infty) = A_2 (1 + e^{b t})^{\lambda} \{C'_2 e^{b\nu t} + D'_2 e^{-b\nu t}\}.$$

Dabei ist A_2 die in (6. 14) festgelegte Integrationskonstante; C'_2 und D'_2 ergeben sich zwangsläufig aus der Differentialgleichung der hyper-

geometrischen Funktion. Nach der Festlegung (6. 13) müssen wir nun auch

$$\nu = -i\frac{\omega_2}{c} \tag{6. 15}$$

setzen (für $\mathfrak{A} = 0$ muß nämlich die ursprüngliche Welle unverändert bleiben, und das wäre bei $\nu = +i\frac{\omega_2}{b}$ nicht der Fall).

Dann wird

$$\left.\begin{aligned} \psi_2(t \to \infty) &= A_2 (C_2' e^{-i\omega_2 t} + D_2' e^{+i\omega_2 t}) \cdot e^{i\mathfrak{k}_z z} \\ \text{und} \qquad \psi_3(t \to \infty) &= A_3 (C_2' e^{-i\omega_2 t} + D_2' e^{+i\omega_2 t}) e^{i\mathfrak{k}_z z}. \end{aligned}\right\} \tag{6. 16}$$

Mit analoger Rechnung wird schließlich

$$\begin{aligned} \psi_4(t \to \infty) &= A_4 (C_4' e^{-i\omega_2 t} + D_4' e^{+i\omega_2 t}) e^{i\mathfrak{k}_z z}, \\ \psi_1(t \to \infty) &= A_1 (C_4' e^{-i\omega_2 t} + D_4' e^{+i\omega_2 t}) e^{i\mathfrak{k}_z z}. \end{aligned}$$

Es tritt also neben der Welle $e^{-i\omega_2 t}$ eine neue Welle

$$D \cdot e^{i\mathfrak{k}_z z + i\omega_2 t}$$

auf, wo

$$D = \begin{pmatrix} A_1 D_4' \\ A_2 D_2' \\ A_3 D_2' \\ A_4 D_4' \end{pmatrix}. \tag{6. 17}$$

Die A sind dabei aus (6. 14) zu entnehmen. Mit den in (6. 18) angegebenen Werten für D_2' und D_4' kann man unter mehrfacher Anwendung der Dispersionsgleichung für ω_1 und ω_2 zeigen, daß die ebene Welle D (6. 17) einer Beziehung der Art (5. 5) genügt, also wirklich eine Lösung der Dirac-Gleichung darstellt.

Die Ladungsdichte dieser D-Welle dividiert durch die der ursprünglichen A-Welle gibt nach den Überlegungen des vorigen Abschnitts die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Materie aus ihrem ursprünglichen Zustand in denjenigen gleicher Wellenzahl $\mathfrak{k}$, aber entgegengesetzter Energie springt, was dann in der Diracschen *Löchertheorie* Paarerzeugung bedeutet.

Diese Zahl soll jetzt angegeben werden. Die Rechnung verläuft genau analog der im vorigen Abschnitt durchgeführten (5. 11 u. ff.).

Es ist[1])

$$D_i' = \frac{\Gamma(\beta_i - \alpha_i)\,\Gamma(\gamma_i)}{\Gamma(\beta_i)\,\Gamma(\gamma_i - \alpha_i)}. \quad \text{(Der Index } i \text{ läuft von 1 bis 4.)}$$

[1]) Siehe A. Sommerfeld, a. a. O.

Also nach (6. 11)

$$\left.\begin{aligned} D_2' &= \frac{\Gamma(-2\nu)\,\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu-\nu+\lambda)\,\Gamma(\mu-\nu-\lambda+1)}, \\ D_2' &= \frac{(\mu-\nu+\lambda)\,\Gamma(1-2\nu)\,\Gamma(2\mu+1)}{-2\nu\,\Gamma(\mu-\nu-\lambda+1)\,\Gamma(\mu-\nu+\lambda+1)} \\ \text{und} \\ D_4' &= \frac{(\mu-\nu-\lambda)\,\Gamma(1-2\nu)\,\Gamma(2\mu+1)}{-2\nu\,\Gamma(\mu-\nu-\lambda+1)\,\Gamma(\mu-\nu+\lambda+1)}. \end{aligned}\right\} \quad (6.\ 18)$$

Mit der schon in Abschnitt 4 gezeigten Rechnung werden, wenn man noch für μ, ν, λ ihre Werte einsetzt, die Absolutquadrate hiervon

$$\left.\begin{aligned} |D_4'|^2 &= \frac{\omega_1(\omega_1-\omega_2+2ca)}{\omega_2(\omega_1-\omega_2-2ca)}\,\Delta, \\ |D_2'|^2 &= \frac{\omega_1(\omega_1-\omega_2-2ca)}{\omega_2(\omega_1-\omega_2+2ca)}\,\Delta \\ \text{mit} \\ \Delta &= \frac{e^{\frac{2\pi}{b}(\omega_1-\omega_2)} + e^{-\frac{2\pi}{b}(\omega_1-\omega_2)} - e^{\frac{4\pi}{b}ca} - e^{-\frac{4\pi}{b}ca}}{e^{\frac{2\pi}{b}(\omega_1+\omega_2)} + e^{-\frac{2\pi}{b}(\omega_1+\omega_2)} - e^{\frac{2\pi}{b}(\omega_1-\omega_2)} - e^{-\frac{2\pi}{b}(\omega_1-\omega_2)}}. \end{aligned}\right\} \quad (6.\ 19)$$

Mit (5. 5), (5. 9) und (6. 17) wird dann, wenn man wie in (5. 12) $A_1 = A_2$ setzt,

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \left[\left\{\varkappa^2 + \left(\mathfrak{k}_z - 2a + \frac{\omega_1}{c}\right)^2\right\}\frac{\omega_1-\omega_2+2ca}{\omega_1-\omega_2-2ca} + \right. \\ \text{oder} \\ &\quad \left. + \left\{\varkappa^2 + \left(\mathfrak{k}_z - 2a - \frac{\omega_1}{c}\right)^2\right\}\frac{\omega_1-\omega_2-2ca}{\omega_1-\omega_2+2ca}\right]\frac{c^2}{2\omega_1\omega_2}\,\Delta \\ \varepsilon &= 2\,\Delta\cdot\left\{\frac{\omega_1}{\omega_2}\,\frac{(\omega_1-\omega_2)^2+4c^2a^2}{(\omega_1-\omega_2)^2-4c^2a^2} + 4\,\frac{c^2a\,(\mathfrak{k}_z-2a)\,(\omega_1-\omega_2)}{\omega_2((\omega_1-\omega_2)^2-4c^2a^2)}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (6.\ 20)$$

Um die gesamte Materieerzeugung anzugeben, hat man dies ε über den ganzen $\mathfrak{k}$-Raum zu integrieren, wobei

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= c\sqrt{\mathfrak{k}_x^2 + \mathfrak{k}_y^2 + (\mathfrak{k}_z - 2a)^2 + \varkappa^2} \\ \text{und} \\ \omega_2 &= c\sqrt{\mathfrak{k}^2 + \varkappa^2} \end{aligned}\right.$$

zu setzen ist. Wegen des Δ-Faktors konvergiert das Integral sehr gut.

Für die Gesamtzahl

$$N = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^\infty \varepsilon\, d\mathfrak{k}$$

der in der Volumeneinheit erzeugten Teilchen führen wir eine ähnliche Abschätzung durch wie im Falle skalarer Materie (Abschnitt 4).

Genau wie dort führen wir Zylinderkoordinaten

$$\mathfrak{k}_z,\ \mathfrak{k}_\varphi,\ \mathfrak{k}_r = \sqrt{\mathfrak{k}_x^2 + \mathfrak{k}_y^2}$$

im $\mathfrak{k}$-Raum ein, transformieren $\mathfrak{k}_z = \mathfrak{k}_z' + a$, messen $\mathfrak{k}_z'$, $\mathfrak{k}_r$ und $\varkappa$ in Einheiten a:

$$\frac{\mathfrak{k}_r}{a} = k_r,\ \frac{\mathfrak{k}_z'}{a} = k_z,\ \frac{\varkappa}{a} = k$$

und erhalten

$$N = \frac{a^3}{2\pi^2}\int_{-1}^{\infty} \mathrm{d}k_z \int_0^{\infty} \mathfrak{k}_r \mathrm{d}k_r \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\left(4 + (\mu_2 - \mu_1)^2\right)}{\left(4 - (\mu_2 - \mu_1)^2\right)} - 4 \frac{(\mathfrak{k}_z - 1)(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_2 \left(4 - (\mu_2 - \mu_1)^2\right)} \right\} \times$$

$$\times \frac{e^{2\beta} + e^{-2\beta} - e^{\beta(\mu_2 - \mu_1)} - e^{-\beta(\mu_2 - \mu_1)}}{e^{\beta(\mu_2 + \mu_1)} + e^{-\beta(\mu_2 + \mu_1)} - e^{\beta(\mu_2 - \mu_1)} - e^{-\beta(\mu_2 - \mu_1)}}, \qquad (6.\ 21)$$

wobei

$$\mu_1 = \sqrt{(k_z - 1)^2 + k_r^2 + k^2},$$
$$\mu_2 = \sqrt{(k_z + 1)^2 + k_r^2 + k^2},$$
$$\beta = \frac{2\pi c a}{b} \gg 1.$$

Den Faktor μ_1/μ_2 im ersten Summanden können wir genähert gleich 1 setzen, denn er variiert nur zwischen 1 und $\sqrt{\frac{k^2}{k^2+2}}$.

Wir führen die Integration (6. 21) wieder in zwei Teilen aus: $N_1 = \int_0^{\infty} \mathrm{d}k_z \ldots$ und $N_2 = \int_{-1}^{0} \mathrm{d}k_z \ldots$; so daß im ganzen vier Integrale abzuschätzen sind. Die Rechnung verläuft genau so wie in Abschnitt 4. Nur dürfen für $(\mu_2 - \mu_1)$ in den Nennern nicht einfach die Grenzen $+2$ und -2 eingesetzt werden, weil ja dann die Nenner verschwinden. Es kann aber für die Integration über k_r bei festem k_z immer $(\mu_2 - \mu_1)$ zwischen 0 und demjenigen Wert $\mu(k_z)_{k_r=0} = \sqrt{(k_z+1)^2 + k^2} - \sqrt{(k_z-1)^2 + k^2}$ eingeschlossen werden, den es auf der k_z-Achse hat. Zur Integration über k_z erhält man für große k_z[1]) durch Entwicklung die Näherung

$$\mu(k_z) \approx 2 - \frac{1 + k^2}{k_z^2}.$$

Diese Entwicklung konvergiert, wenn $k_z > k$ ist. Damit wird

$$\frac{1}{4 - \mu^2} \approx \frac{1}{4\frac{1+k^2}{k_z^2} - \left(\frac{1+k^2}{k_z^2}\right)^2} \leqq \frac{k_z^2}{3(1+k^2)}. \qquad (6.\ 22)$$

[1]) Für kleine k_z kann genau wie in Abschn. 4 gerechnet werden.

Die Abschätzung der Integrale ergibt dann, wenn die höheren Potenzen von $1/\beta$ vernachlässigt werden, daß sich N verhält wie

$$N \approx \Lambda \varkappa b^3 \cdot e^{\frac{4\pi e}{b}\left((1+\lambda)\frac{\eta}{2}|\mathfrak{A}|-\varkappa\right)}, \tag{6. 23}$$

wo Λ und λ dieselbe Bedeutung wie in (4. 26) haben.

Die wesentliche Abhängigkeit von $\mathfrak{A}$ und b ist in der Exponentialfunktion enthalten. Für wachsende $\mathfrak{A}$ nimmt also die gesamte Materieerzeugung in der skalaren Theorie fast doppelt so stark zu wie in der spinoriellen, während die Abhängigkeit von b die gleiche ist.

Auch an dieser Stelle möchte ich den Herren Prof. Heisenberg und Prof. Hund dafür danken, daß ich in ihrem Institut arbeiten konnte. Herrn Prof. Hund danke ich für die Anregung zu dieser Untersuchung und für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit sowohl als auch an meinem ganzen Studium.

(Aus dem Forschungs-Institut der AEG.)

Das Jochlinsen-Kombinations-Übermikroskop für Durchstrahlungs- und Selbststrahlungsaufnahmen.

Von **E. Kinder.**

Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 14. Juli 1943.)

Das Jochlinsen-„Kombinations-Übermikroskop" wird beschrieben. Eingehende Darstellung finden die Jochlinsen, die mit einer rotationssymmetrischen Linse quantitativ verglichen werden und ihr Zusammenwirken im Mikroskop, das durch Ausbildung einer dritten Linse zu einer sehr weitgehenden Variationsmöglichkeit der Vergrößerung und zur Konstanthaltung der Bilddrehung führt. Die Verwendung des Gerätes als Emissions- und Durchstrahlungsmikroskop wird kurz besprochen und an Hand mehrerer Beispiele von Emissions- und Durchstrahlungsaufnahmen ein Bild von den Anwendungsmöglichkeiten des Instrumentes auf verschiedenen Gebieten gegeben.

Die Untersuchungen, die seit 1940 mit dem Jochlinsenmikroskop[1]) an durchstrahlten Objekten vorgenommen wurden, führten in letzter Zeit zu zwei Fortschritten, die das Instrument selbst betreffen: Erstens gelang es, das Mikroskop auch auf Selbststrahler[2]) im übermikroskopischen Gebiet anzuwenden; zweitens ließ sich eine Linsenanordnung finden mit der — im Gegensatz zu den bisherigen magnetischen Mikroskopen — die Vergrößerung ohne Drehung des Endbildes in weiten Grenzen geändert werden kann. So ist ein magnetisches Übermikroskop entstanden, das — in seinen Linsen und seinem allgemeinen Aufbau von dem Objektiv ab identisch — sich durch einen Durchstrahlungsaufsatz und einen Selbststrahlungsaufsatz je nach Bedarf als Durchstrahlungs- oder Selbststrahlungsmikroskop benutzen läßt, und das hinsichtlich Vergrößerungswahl und Konstanz der Bildstellung den einfachen elektrostatischen Geräten entspricht. Die folgenden Ausführungen dienen einer sehr gedrängten Darstellung dieses „Kombinations-Übermikroskops" und seiner Leistungen.

1. Die Linsen.

Ein rotationssymmetrisches magnetisches Feld, wie es als Elektronenlinse für das magnetische Übermikroskop gebraucht wird, läßt sich in verschiedener Weise herstellen. Entweder legt man um das

[1]) E. Kinder u. A. Pendzich, Jahrb. AEG-Forsch. **7**, 23, 1940. — [2]) E. Kinder, Naturwiss. **30**, 591, 1942.

Elektronenstrahlbündel eine Spule, deren Kraftfeld man zur Konzentrierung in einer Eisenpanzerung zusammenzieht[1]) und den durchbohrten Linsenpolschuhen zuführt[2]), oder man ordnet zu dem gleichen Zweck ein oder mehrere Elektromagnete neben dem Strahlengang an und leitet deren Kraftfluß durch eiserne Joche zu den Polschuhen[3]). Die erste Anordnung, die „Rundlinse", die bei den meisten elektromagnetischen Übermikroskopen benutzt wird, so z. B. von Siemens und von v. Ardenne, stammt aus dem Bau von Kathodenstrahl-Oszillographen und wurde in entsprechender Weise auch zur Erzielung starker Außenfelder bei Magnetspulen angewandt[4]). Der zweiten Anordnung — der „Jochlinse" — liegt die noch länger in der Experimentalphysik benutzte Bauart starker Elektromagnete zugrunde, wie sie mit durchbohrten Polschuhen, z. B. zu Versuchen über den Zeeman-Effekt, Verwendung fanden[5]).

Mit beiden Formen der magnetischen Linse sind Elektronen-Übermikroskope gebaut worden. Dem Vorteil der Rundlinse mit ihren ohne weiteres rotationssymmetrischen Feldern stehen bei der Jochlinse die Vorzüge gegenüber, die durch die Anordnung der Spulen mit der Achse außerhalb des Strahlenganges bedingt sind und die in der Auswechselbarkeit der Magnetspulen ohne Abbau des Gerätes, in der leichten Kühlbarkeit und der geringen Erwärmung des Innenraumes sowie in der freien Zugangsmöglichkeit zum Linsenfeld zu sehen sind. Es läßt sich somit das zu untersuchende Objekt durch den Zwischenraum zwischen den Linsenpolschuhen in das Vakuum einschleusen oder auch in diesem Zwischenraum eine auswechselbare und während des Betriebes leicht justierbare Aperturblende anbringen, die durch einfaches Verschieben den Übergang zur Dunkelfeldbeleuchtung vorzunehmen gestattet, ohne daß an Einstellung und Justierung des Instrumentes etwas geändert werden müßte.

Wie schon angedeutet, ging die Jochlinse aus dem hufeisenförmigen Laboratoriums-Elektromagneten hervor. Wird dieser in eine den Erfordernissen der Elektronenoptik angepaßte Form abgewandelt, so entsteht die sogenannte „Einjochlinse". Das eigentliche Linsenfeld weist hierbei zwar schon genügende Rotationssymmetrie auf, doch

---

[1]) D. Gabor, Forsch.-Hefte Höchstspannungs-Stud.-Ges. Heft 1, S. 7, 47, 62; 1927. — [2]) E. Ruska u. M. Knoll, ZS. f. techn. Phys. **12**, 389, 1931. — [3]) E. Kinder u. A. Pendzich, Jahrb. AEG-Forsch. **7**, 23, 1940. — [4]) E. Brüche, Terr. Magnetism. **36**, 41, 1931. — [5]) H. du Bois, ZS. f. Instrkde. **31**, 362, 1911.

bewirkt das zur optischen Achse unsymmetrische Streufeld des Magneten eine Krümmung des Strahlweges. Diesen Nachteil behebt man leicht durch die Kombination zweier Einjochlinsen, aus denen sich dann die Form der Fig. 1, die „Doppeljochlinse", ergibt[1]). Diese — auch konstruktiv zum Aufbau einer größeren Apparatur besser geeignete Ausführung — wurde bei dem Jochlinsenmikroskop bisher ausschließlich verwandt und hat sich bestens bewährt. Eine noch verbleibende geringe Unsymmetrie des Streufeldes um die optische Achse wird durch die sogenannten Symmetrierungszylinder — zwei nach außen an die Joche angesetzte Weicheisenzylinder (s. Fig. 1) — praktisch beseitigt. Natürlich steht nichts im Wege, durch Hinzufügung weiterer Joche und Elektromagnete zu einer Drei- oder Vierjochlinse überzugehen[2]). Damit könnte die Strombelastung der einzelnen Linsenspulen verringert werden, während jedoch eine Verbesserung der Bildqualität wegen der schon bei der Doppeljochlinse einwandfreien Abbildung nicht mehr zu erhoffen ist.

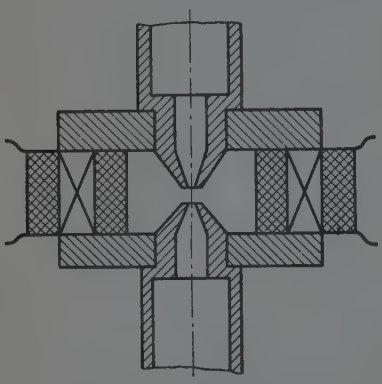


Fig. 1. Doppeljochlinse mit Symmetrierungszylindern.

Eine bisher beim Vergleich von Joch- und Rundlinse noch nicht erörterte Frage bildet die Ausnutzung des erzeugten magnetischen Flusses für die Wirkung der Linse. Wir werden erwarten, daß die Jochform dabei ungünstiger abschneidet, da die rotationssymmetrische diejenige ist, bei der der Kraftfluß am besten zusammengehalten wird. Um zu quantitativen Vergleichen zu kommen, wurden an zwei Jochlinsen (I und II) die Vergrößerungen bei verschiedenen Elektronengeschwindigkeiten gemessen, wofür Fig. 2a ein Beispiel gibt, und daraus der Verlauf der Brechkraft $1:f$ (f = Brennweite) in Abhängigkeit von der Amperewindungszahl berechnet. Das Ergebnis zeigt Fig. 2b, in die außerdem die Kurve für ein rotationssymmetrisches Objektiv vergleichbarer Polschuhdimensionen eingetragen wurde. Aus einer Arbeit von Ruska[3]) wurden die Werte der Vergrößerung und des

---

[1]) E. Kinder u. A. Pendzich, Jahrb. AEG-Forsch. **7**, 23, 1940. — [2]) D. R. P. 720927, Telefunken. Erfinder Willy Schröder. — [3]) E. Ruska, ZS. f. Phys. **89**, 90, 1934, Fig. 9.

Spulenstromes entnommen und die daraus berechneten Werte von $1:f$ unseren Messungen hinzugefügt. Ferner ist für jede der drei Linsen eine maßstäbliche Schnittskizze der Polschuhe beigefügt, in der die Größe von Polschuhöffnung und Polschuhabstand angegeben ist. In Übereinstimmung mit unserer Überlegung über den Unterschied zwischen Rundform und Jochform erweist sich, daß letztere einen um etwa 50 % höheren Aufwand an Amperewindungen erfordert. Nicht vorauszusehen war, daß im Gegensatz zur Rundlinse, die ein ausgeprägtes Minimum der Brennweite aufweist, bei den Jochlinsen die Minimalbrennweite mit steigender Strombelastung sehr langsam angenähert wird. So hat schließlich die Jochlinse I trotz größerer Polschuhabmessungen noch eine größere Brechkraft als das rotationssymmetrische Vergleichsobjektiv. Auch dürfte die Kurve für die Jochlinse II einem höheren Endwert zustreben, da sich der hier dargestellte Verlauf der Brechkraft durch Reduktion von Werten, die bei 96 kV — also bei stärkerer Eisensättigung — gemessen wurden, ergab.

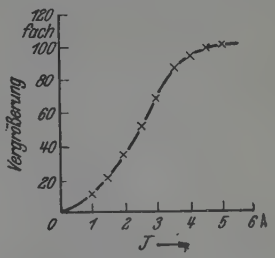


Fig. 2a. Vergrößerungsleistung der Jochlinse II bei 96 kV und 41 cm Bildweite.

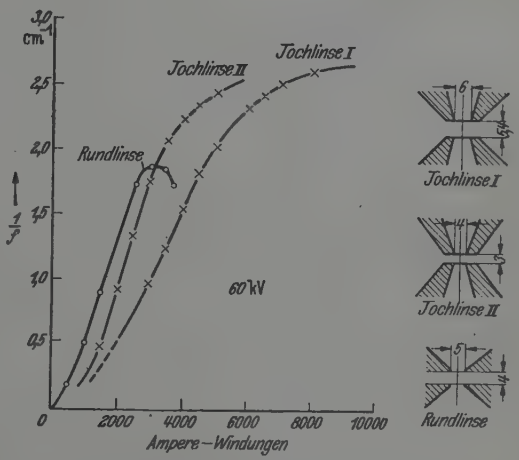


Fig. 2b. Brechkräfte zweier Jochlinsen und eines rotationssymmetrischen Objektivs (Rundlinse). Rechts: Polschuhe im Schnitt.

Fig. 2a und b. Optische Eigenschaften der Jochlinse.

2. Das Zusammenwirken der Linsen im Mikroskop.

Wie es bei hochvergrößernden Elektronenmikroskopen üblich ist, werden auch beim Jochlinsenmikroskop zwei Abbildungsstufen — Objektiv und Projektiv — verwendet. Sie liegen im Abstand von 50 cm (s. Fig. 3), während die einander zugewandten Enden der an den Jochlinsen angebrachten Symmetrierungszylinder einen gegenseitigen Abstand von etwa 9 cm haben. Dieser Zwischenraum ist durch einen Zylinder aus unmagnetischem Material überbrückt.

An den Enden der beiden Eisenzylinder entsteht nun ein rotationssymmetrisches Streufeld, das eine — unter Umständen erhebliche — Einwirkung auf die Abbildungsverhältnisse erlangen kann. Das Streufeld stellt eine Magnetlinse dar, deren Stärke von der magnetischen Durchflutung und Polung der Eisenzylinder und von Form und Abstand ihrer Enden (Polschuhe) abhängt. Diese „Mittellinse" zieht den vom Objektiv ausgehenden Strahlenkegel etwas zusammen und beeinflußt damit die Größe des vor dem Projektiv entstehenden *Zwischenbildes*. Liegen an den einander zugewandten Enden der Zylinder zunächst gleichnamige Magnetpole, so beobachtet man eine wesentliche Abnahme der Zwischen- und Endbildvergrößerung, wenn die Projektionslinse — bei konstantem Strom — umgepolt wird, so daß Projektiv und Objektiv sich nunmehr entgegengesetzte Polen zukehren.

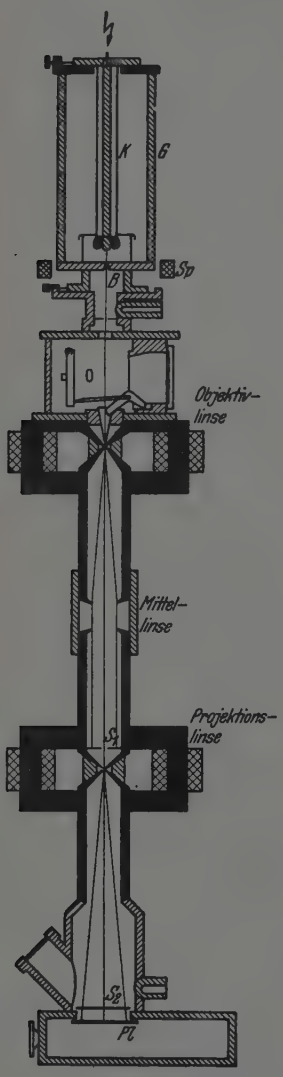


Fig. 3. Jochlinsenmikroskop (schematisch).

Eine genauere Darstellung der Verhältnisse gibt Fig. 4a. Dort ist die in Abhängigkeit vom Erregungsstrom der Projektionslinse am Leuchtschirm S_1 (Fig. 3) gemessene Zwischenbildvergrößerung eingetragen. Der Spulenstrom des Objektivs ist dabei außer kleinen Variationen zur Scharfstellung des Endbildes konstant, er beträgt rund 4 Amp. Wie Fig. 4a zeigt, beginnt unterhalb von $J_{proj} = +3$ Amp. die Wirkung der Mittellinse bemerkbar zu werden, die sich in der Abnahme der Zwischenbildvergrößerung äußert. Dieser Abfall setzt sich nach Umpolen des Spulenstromes der Projektionslinse (negative Stromwerte) naturgemäß fort. Projektiv und Objektiv wenden sich nun infolge der verschiedenen Stromrichtungen ungleiche Pole zu. Damit wird die Mittellinse bald so

stark, daß sie den vom Objektivbrennpunkt ausgehenden Strahlenkegel zu einem konvergenten Bündel zusammenzieht, innerhalb dessen das Zwischenbild entsteht und dessen Einschnürungspunkt bei — 2,9 Amp. gerade auf den Zwischenbildschirm fällt. Wandert mit weiterer Steigerung der Linsenstärke der Einschnürungspunkt *vor* den Zwischenbildschirm, so erscheint auf diesem infolge der Strahlüberkreuzung ein umgekehrtes Bild, womit sich auch das Endbild umkehrt. Die nach Überschreiten dieses „Umschlagpunktes" erhaltenen Bilder sind natürlich von geringerer Qualität und kommen nur durch die hohe Tiefenschärfe zustande.

Betrachten wir nun die Endvergrößerung der ganzen Anordnung, die sich aus dem Bild auf dem Schirm S_2 (Fig. 3) ergibt. Sie kommt durch das

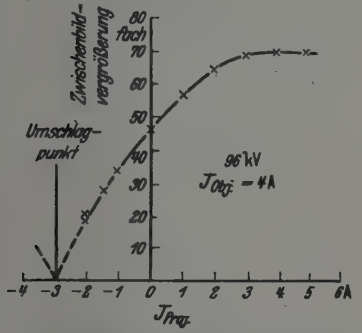


Fig. 4a. Zwischenbildvergrößerung in Abhängigkeit vom Projektionsstrom.

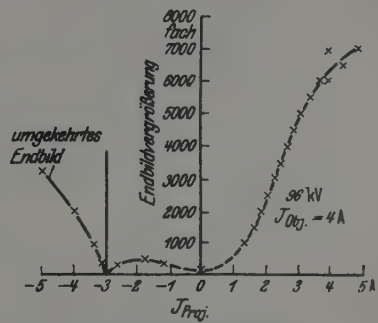


Fig. 4b. Endbildvergrößerung in Abhängigkeit vom Projektionsstrom.

Fig. 4a und 4b. Zwischen- und Endbildvergrößerung des Jochlinsenmikroskopes.

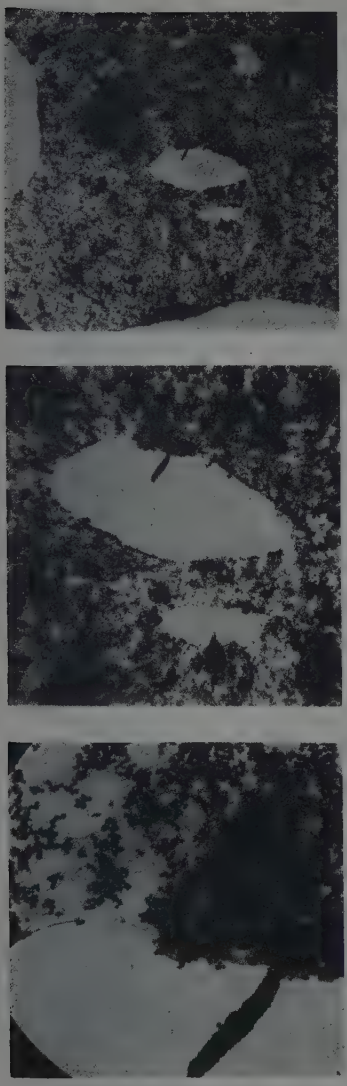
Zusammenwirken des Objektivs der Mittel- und Projektionslinse zustande und ist in Fig. 4b dargestellt. Dabei ist wieder der Objektivstrom konstant, während der Strom des Projektivs und damit die Brechkraft vom Projektiv und Mittellinse geändert wird. Wie Fig. 4b zeigt, verläuft bei positiven Stromwerten die Vergrößerung ganz ähnlich, wie es bei alleiniger Wirkung des Projektivs nach Fig. 2a der Fall sein würde. Nicht so bei negativen Strömen, die der umgepolten Projektionslinse entsprechen. Hier ist nach Fig. 4a die Wirkung der Mittellinse bereits sehr stark und äußert sich natürlich auch in der geringen Endvergrößerung, die jetzt infolge des Gegeneinanderwirkens von Mittellinse und Projektiv ein flaches Maximum durchläuft. In diesem Bereich erhält man wegen des sehr kleinen Zwischenbildes und der verhältnismäßig starken Erregung des Projektivs auf dem Endleuchtschirm ein einwandfreies,

unverzeichnetes Übersichtsbild, das die $^1/_{10}$ mm Bohrung des Objektträgerplättchens fast vollständig enthält[1]). Ohne Auswechseln der Linsenpolschuhe kann man also, wie Fig. 4b lehrt, die Gesamtvergrößerung des Instrumentes mit der getroffenen Anordnung im Verhältnis 10 : 1 kontinuierlich ändern. Darüber hinaus ergibt aber diese Linsenanordnung noch einen weiteren nicht zu unterschätzenden Vorteil: Sie ermöglicht es, die an sich bei Vergrößerungsänderungen auftretenden Bilddrehungen zu kompensieren. Dieser Effekt beruht darauf, daß mit abnehmender Durchflutung des Projektivs die Stärke der Mittellinse automatisch zunimmt, und zwar — wie eine einfache Überlegung über die Feldrichtungen auf der optischen Achse zeigt — stets in dem Sinne, daß die Bilddrehungen der beiden Linsen gegensinnig gerichtet sind. Wenn nun durch geeignete Dimensionierung erreicht wird, daß beide Linsen entgegengesetzt *gleich* stark drehen, so bemerkt man bei starken Vergrößerungsänderungen wohl eine Drehung des Zwischen- nicht aber des Endbildes. Ebenso werden auch Bilddrehungen, die durch Änderung der Objektivfeldstärke hervorgerufen werden, durch die Mittellinse kompensiert. Ein Wechsel der Objektivbrennweite bleibt daher ohne Einfluß auf die Stellung des Zwischen- und Endbildes. Das Endbild behält damit für alle Vergrößerungen und beim Scharfstellen seine Lage auf dem Leuchtschirm bei, was besonders für Stereoaufnahmen von großer Wichtigkeit ist, denn zur Erzielung aufrechtstehender Stereobilder verschiedener Vergrößerung genügt dann eine einmalige Festlegung der Kippachse des Stereoobjekthalters.

Das Gesagte sei noch an einem Beispiel veranschaulicht, das in Fig. 5a bis c durch drei Aufnahmen einer Folie mit MgO-Rauch als Testobjekt gegeben wird. Man sieht zunächst, daß der Übergang von Fig. 5a zu 5b, der durch einfaches Herunterregeln des Projektivstromes vorgenommen wurde, eine Verzeichnung der Randpartien mit sich bringt, die bei etwa 2500facher Originalvergrößerung einsetzt und dann schnell zunimmt[2]). Die Aufnahme der Fig. 5c dagegen wurde durch Umpolen der Projektionslinse — also unter starker Mitwirkung der Mittellinse —

---

[1]) Andere Möglichkeiten zur Herstellung eines Übersichtsbildes wären die Einführung eines Doppelprojektivs mit einer langbrennweitigen Linse (vgl. H. Mahl, Koll.-ZS. 91, 105, 1940) oder eine mechanische Vergrößerung des Abstandes Objekt—Objektiv unter entsprechender Veränderung der Objektivbrennweite. — [2]) Die Vergrößerungsangaben in Fig. 5 und 6 beziehen sich auf die hier wiedergegebenen Bilder. Die Originalvergrößerungen sind bei beiden Bildreihen im Verhältnis 1,11 : 1 höher.



a) Vergr. 7200 : 1. b) Vergr. 1620 : 1. c) Vergr. 650 : 1.
Fig. 5a bis c. Bildstellung beim Vergrößerungswechsel im Jochlinsenmikroskop mit Mittellinse. c) Übersichtsbild.

a) Vergr. 4500 : 1. b) Vergr. 3150 : 1. c) Vergr. 1130 : 1.
Fig. 6a bis c. Bilddrehung beim Vergrößerungswechsel in einem Rundlinsenmikroskop ohne Mittellinse.

erhalten und gibt neben einer verzeichnungsfreien Wiedergabe ein großes Gesichtsfeld.

Diese Aufnahmen, deren Ränder den Kanten der zugehörigen Photoplatten genau parallel sind, zeigen ferner, daß die drei Bilder trotz der verschiedenen Vergrößerung gegeneinander kaum eine Verdrehung aufweisen.

Zum Vergleich sind die Aufnahmen der Fig. 6a bis c mit einem gewöhnlichen Rundlinsenmikroskop[1]) ohne Mittellinse angefertigt worden und mit den Bildrändern ebenfalls parallel zu den Plattenkanten orientiert. Wie sich hier das Bild beim Vergrößerungswechsel ändert und dreht, ist aus Fig. 6 leicht zu entnehmen. Zu den beiden Bildreihen sei noch folgendes bemerkt: Bei Fig. 5 wurde eine Vergrößerungsänderung im Verhältnis 11 : 1, bei Fig. 6 eine solche von 4 : 1 vorgenommen. Die dabei stattfindende Bilddrehung liegt im ersten Fall um 10°, im zweiten beträgt sie rund 100°. Während in Fig. 5a und c das Bild bis zum Rande scharf und unverzeichnet ist, lassen sich bei Fig. 6 wegen der in dem Rundlinsenmikroskop üblichen Bildbegrenzungsblende keine Angaben über die Bildgüte außerhalb des sichtbaren Bereiches machen.

Zusammenfassend können wir also feststellen, daß durch die Einführung einer dritten Linse zwischen Objektiv und Projektiv einige Unzulänglichkeiten des magnetischen Mikroskops zu beheben sind. Es erhält damit auch die Eigenschaften, die bisher als Vorzüge der elektrostatischen Ausführung galten: Die Möglichkeit starker Vergrößerungsänderung, die Herstellung eines Übersichtsbildes durch einen Schaltgriff und die Unveränderlichkeit der Bildlage während der Einstellung und beim Wechseln der Vergrößerung. Wenn man eine kontinuierliche Vergrößerungsänderung als Vorteil betrachtet — ob mit Recht oder Unrecht sei dahingestellt —, so hat es außerdem als magnetisches Instrument gegenüber dem elektrostatischen alle jene Vorzüge, auf die in der Literatur vielfach hingewiesen wurde[2]).

3. Das Durchstrahlungsmikroskop.

Der Aufbau des Durchstrahlungsmikroskops mit zwei Jochlinsen wurde schon an anderer Stelle beschrieben[3]), so daß die hier gegebene Darstellung sich auf die wesentlichsten Züge beschränken kann. Hinsichtlich der Einzelheiten des Aufbaues sei nochmals auf die schematische Schnittskizze Fig. 3 verwiesen: Der für Betriebsspannungen bis 150 kV dimensionierte Glaszylinder *G* dient als Kathodenisolator. Er enthält

[1]) Der Firma Carl Zeiß (Jena), die die Anfertigung dieser und anderer Vergleichsaufnahmen mit dem Siemens-Übermikroskop nach v. Borries und Ruska gestattete, spreche ich für das freundliche Entgegenkommen meinen besten Dank aus. Insbesondere danke ich Frau v. Ekesparre für wertvolle Hilfe und Unterstützung bei der Ausführung dieser Arbeiten. — [2]) Vgl. z. B. E. Ruska, Arch. f. Elektrotechn. **36**, 431, 1942. — [3]) E. Kinder, Koll.-ZS. **95**, 326, 1941.

ein waagerecht verschiebbares Kupferrohr K, das an seinem unteren Ende Kathode und Wehnelt-Zylinder trägt. Das Kathodensystem kann durch Verschieben von K über die Öffnung der Anodenblende B zentriert werden. Die Spule Sp wirkt als Kondensor und kann zur Justierung des Strahles mitbenutzt werden.

Um einen bequemen und sicheren Objektwechsel zu ermöglichen, wurde die bewährte Objektschleuse des elektrostatischen AEG-Übermikroskops auch beim Jochlinsenmikroskop eingeführt. An Stelle des oberen Joches der Objektivlinse tritt ein kreisförmiger Eisenflansch, der mittels zweier Ansätze auf den Kernen der Elektromagnete ruht, die Objektschleuse O trägt und in einer zentrischen Bohrung den ersten Linsenpolschuh enthält. Dieser Eisenflansch übernimmt gleichzeitig die Funktion des oberen Symmetrierungszylinders der Objektivlinse und gewährleistet mit seinem großen Durchmesser ein rotationssymmetrisches Streufeld. Um dieses nicht wieder zu verzerren, wurden der Schleusenkörper und sämtliche Organe des Objektverschiebungsmechanismus aus unmagnetischem Material hergestellt.

Die verschiebbare Objektivblende befindet sich in der Nähe des bildseitigen Brennpunktes und liegt somit unterhalb der Öffnung des zweiten Polschuhes. Hiermit wird ein großes Gesichtsfeld im Zwischenbild erreicht. Die Bewegungsübertragung zum Justieren der Blende und für den Übergang zu Dunkelfeldbetrieb erfolgt durch den leicht zugänglichen Raum zwischen den Polschuhenden des Objektivs.

Der weitere Aufbau des Gerätes mit Mittellinse, Projektiv und Plattenschleuse Pl ist aus Fig. 3 ohne nähere Erläuterung ersichtlich.

4. Das Emissionsmikroskop.

Verschiedene experimentelle Untersuchungen über die Auflösungsgrenze des Emissionsmikroskops wurden in jüngster Zeit mit rein elektrischen Linsen durchgeführt[1])[2])[3]). Sie legten es nahe, einen Parallelversuch mit magnetischen Linsen auszuführen und das Jochlinsenmikroskop auch für Emissionsaufnahmen heranzuziehen[4]). Dies ließ sich durch einige Umänderungen des im vorigen Abschnitt beschriebenen Durchstrahlungsmikroskops erreichen, so daß nunmehr ein Instrument

[1]) H. Mahl in C. Ramsauer, Elektronenmikroskopie, 2. Auflage, S. 26. H. Mahl, ZS. f. techn. Phys. **23**, 117, 1942. — [2]) W. Mecklenburg in C. Ramsauer, Elektronenmikroskopie, 2. Auflage, S. 6, 3. Auflage, S. 44, 56, 57; W. Mecklenburg, ZS. f. Phys. **120**, 21, 1942. — [3]) H. Boersch, Naturwiss. **30**, 120, 1942. — [4]) E. Kinder in C. Ramsauer, Elektronenmikroskopie, 3. Auflage, S. 47, 58, 59; E. Kinder, Naturwiss. **30**, 591, 1942.

entstanden ist, das als Durchstrahlungs- und Selbststrahlermikroskop benutzt werden kann. Zum Umbau des Durchstrahlungsmikroskops in ein Selbststrahlermikroskop werden die Objektschleuse *O* (vgl. Fig. 3) und der Glaszylinder *G* entfernt und in die Objektivlinse Polschuhe von etwas anderer Gestalt eingesetzt. Auf die Eisenplatte des Objektivs wird dann an Stelle der Schleuse eine Glasglocke gesetzt, die eine mittels Schliffes auswechselbare Emissionskathode enthält (Fig. 7). Die Kathode, z. B. ein Wolfram- oder Molybdänband, ist von einem Wehnelt-Zylinder umgeben. Da die Glasglocke samt der Kathode eine Querverschiebung mittels Druckschrauben gestattet, können die interessierenden Partien der Emissionskathode innerhalb gewisser Grenzen, die durch die Öffnung des Wehnelt-Zylinders gegeben sind, ins Bildfeld gebracht werden. Das Beschleunigungsfeld liegt zwischen der Kathode und dem oberen Linsenpolschuh, wobei eine Blende von etwa 1 mm Durchmesser aus unmagnetischem Material das Hineingreifen des elektrischen Feldes in die magnetische Linse verhindert.

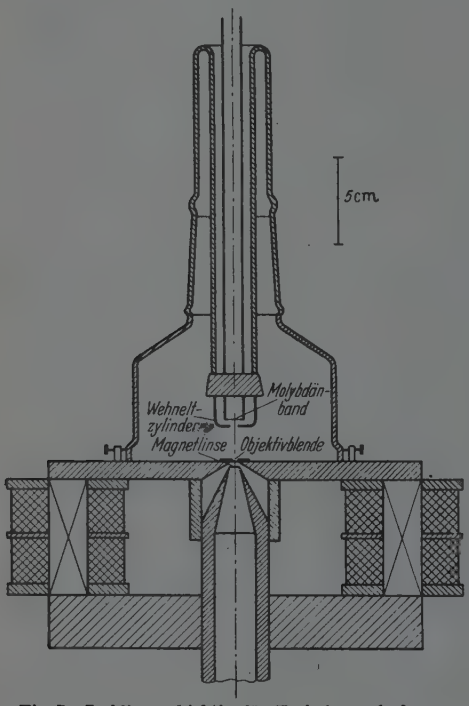
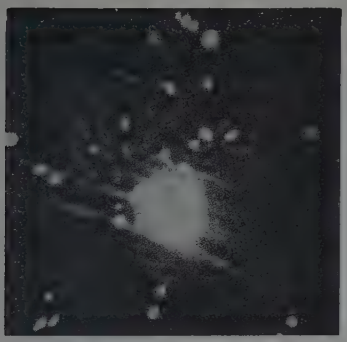


Fig. 7. Jochlinsenobjektiv für Emissionsaufnahmen.

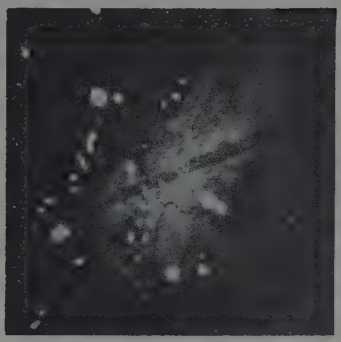
Der durch die Beschleunigungsspannung von 50 bis 60 kV bedingte relativ große Abstand der Kathode von der Objektivlinse läßt in der ersten Stufe nur begrenzte Vergrößerungen zu. Mit zweistufiger Abbildung konnten aber Emissionsbilder bis zu 2500facher Vergrößerung erhalten werden.

5. *Aufnahmebeispiele.*

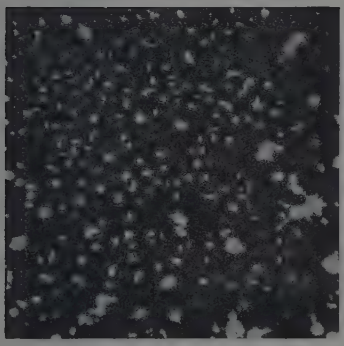
a) Emissionsbilder. Die folgenden sechs Aufnahmen (Fig. 8a bis f) geben einige charakteristische Emissionszustände eines thorierten



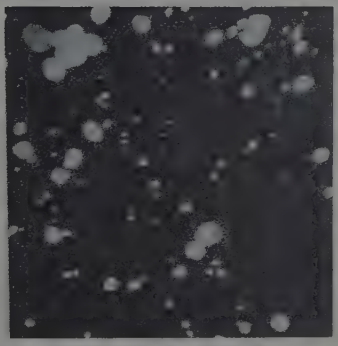
a) Vergr. 720 : 1.



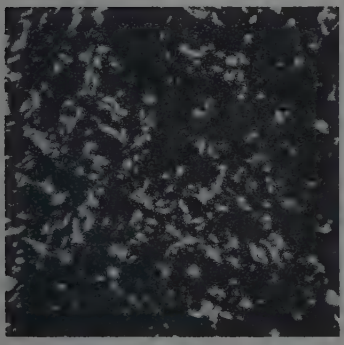
b) Vergr. 720 : 1.



c) Vergr. 1450 : 1.



d) Vergr. 1450 : 1.



e) Vergr. 1450 : 1.

f) Vergr. 1450 : 1.

Fig. 8a bis f. Emissionsaufnahmen mit dem Jochlinsenmikroskop

Molybdänbandes wieder. Eingehende Untersuchungen der Emissionsvorgänge an thorierten Kathoden wurden bereits früher in unserem Institut durchgeführt[1]). Die damals ohne Unterschreitung der lichtoptischen Auflösungsgrenze erzielten Ergebnisse werden durch die in neuerer Zeit erhaltenen übermikroskopischen Aufnahmen bestätigt. Hier ist in erster Linie die Tatsache des diskontinuierlichen Thoraustrittes aus dem Grundmaterial zu nennen. Wie seinerzeit festgestellt wurde, tritt das als Thoroxyd im Trägermetall eingeschlossene Thor nach Reduktion bei hoher Glühtemperatur an einzelnen Stellen an die Oberfläche. Diese Thoraustrittsstellen liegen in den Korngrenzen der Kristalle des Kathodenmetalls, aber auch oft inmitten einzelner Kristallite. Das im Metall eingeschlossene Thor tritt demnach durch kleine Kanäle oder Poren aus. Derartige Störstellen bestehen somit nicht nur an den Kristallgrenzen, sondern auch im Innern der Kristallite. Je nach der Größe der Poren zeigen sich nun im Emissionsbild feinere oder gröbere leuchtende Punkte. Solche Thoraustrittsstellen aller Größen finden sich auf den Aufnahmen der Fig. 8a und b. Bei Fig. 8a sieht man eine sehr starke Thorquelle mit darüberliegender Raumladung. Fig. 8b zeigt uns neben den Emissionspunkten deutlich das Kristallgefüge des Molybdäns. Die Gruppierung der Thorquellen längs der Umrandung der einzelnen Kristallflächen ist gut zu erkennen, daneben zahlreiche Emissionspunkte auf den Kristallen selbst. Das starke Hervortreten des gleichmäßig strahlenden Bereiches in der Bildmitte ist auf teilweise Zerstörung des Thorfilms in der Umgebung durch Ionenbombardement bei ungenügendem Vakuum zurückzuführen. Fig. 8c und d bestätigen diese Beobachtungen. Sie zeigen Emissionszentren, von denen viele einen Durchmesser von unter $^1/_{1000}$ mm haben und die ebenso häufig auf den Kristalliten wie an den Korngrenzen liegen.

Ein Beispiel für die Entwicklung eines Strukturbildes im Übermikroskop vermitteln schließlich die Aufnahmen der Fig. 8e und f. Beim Glühen des thorierten Molybdänbandes bildeten sich starke Emissionszentren, deren Anordnung in Fig. 8e zwei aufeinander senkrechte Vorzugsrichtungen erkennen läßt. Bei weiterem Erhitzen der Kathode breitete sich das Thor auf der Oberfläche aus, wobei die einzelnen Emissionspunkte zu einem System von Bändern und Streifen zusammenflossen, das jetzt in Fig. 8f die oben angedeutete rechtwinklige Struktur klar hervortreten läßt, die mit dem kubisch-raum-

[1]) E. Brüche u. H. Mahl, ZS. f. techn. Phys. 16, 623, 1935; 17, 262, 1936.

zentrierten Gitter des Molybdäns in Zusammenhang stehen dürfte. Analoge Erscheinungen wurden bei Nickelkathoden beobachtet[1]); auch dort bildeten sich Streifensysteme, die nach der Kristallstruktur orientiert zu sein scheinen.

Bei der Auswertung der hier gezeigten Aufnahmen — insbesondere bei Fig. 8e — konnten Punktabstände bis 90 mμ herab festgestellt

a) 96 e-kV. b) 40 e-kV.

Fig. 9a und b. Einfluß der Durchstrahlungsenergie bei Hellfeld. Diatomee-Ausschnitt. Vergr. 25200 : 1.

werden. Sicher getrennte Punkte im Abstand von 150 mμ ließen sich in größerer Zahl finden, womit auch hier das Auflösungsvermögen des Lichtmikroskops sicher unterschritten ist[2]).

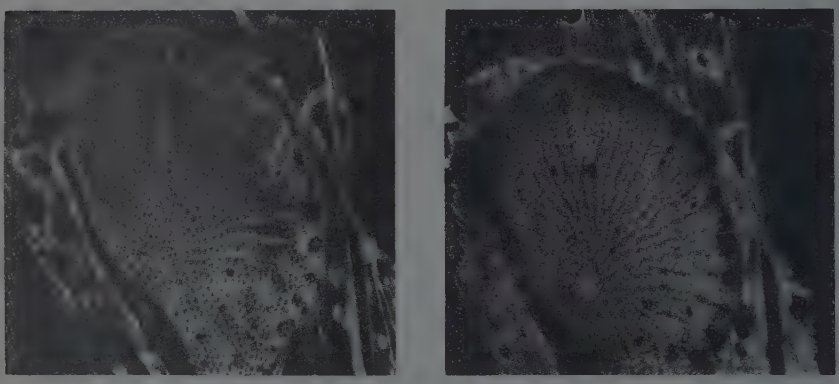
b) Durchstrahlungsaufnahmen. Elektronenmikroskopische Durchstrahlungsaufnahmen sind bereits in so großer Zahl veröffentlicht worden, daß hier nur wenige Bilder wiedergegeben und einige spezielle Fragen berührt werden sollen, zumal die Möglichkeit der starken Vergrößerungsänderung beim Jochlinsenmikroskop schon in Abschnitt 2 gezeigt worden ist.

Ein neueres Beispiel für die Wahl der günstigsten Elektronenenergie zur Objektdurchstrahlung geben die Bilder der Fig. 9a und b. An diesen

[1]) W. Mecklenburg, ZS. f. Phys. **120**, 21, 1942. — [2]) E. Kinder, Naturwiss. **30**, 591, 1942.

beiden Hellfeldaufnahmen einer Diatomee (Stephanodiscus Hantzschii), die mit 96 bzw. 40 e-kV erhalten wurden, wird die schon länger bekannte Tatsache, daß es für jede Objektdicke eine geeignete Durchstrahlungsspannung gibt[1]), wiederum deutlich. Das feine Maschenwerk in den Poren tritt bei der 40 e-kV-Aufnahme bedeutend kräftiger hervor, während die radialen Adern bei 96 e-kV durchstrahlt werden und eine körnige Struktur erkennen lassen.

Die entsprechenden Dunkelfeldbilder Fig. 10a und b zeigen die ebenfalls schon beobachtete Verschiebung des Aufhellungsmaximums



a) 96 e-kV. b) 50 e-kV.

Fig. 10a und b. Einfluß der Durchstrahlungsenergie bei Dunkelfeld. Diatomee. Vergr. 4300 : 1.

zu größeren Massendicken mit steigender Elektronenenergie[2]) [3]). Dünne Partien, wie die Trägerfolie und die Poren, die auf der 50 e-kV-Aufnahme noch hell erscheinen, sind bei 96 e-kV fast nicht mehr von materiefreien Stellen zu unterscheiden. Dickere Stellen, wie der rechte Rand der Diatomee, sind bei hoher Spannung aufgehellt.

Eine andere Dunkelfeldaufnahme — Fig. 11 — weist auf eine Eigentümlichkeit der Elektronenbeugung an Kanten hin, für die bisher noch keine Deutung gefunden wurde: Die eine — dem Dunkelfeld zugewandte — Kante des abgebildeten MgO-Kristalls ist bedeutend stärker aufgehellt als die gegenüberliegende. Es handelt sich hier um einen von Boersch[4]) näher untersuchten Effekt Fresnelscher Elek-

[1]) E. Kinder, ZS. f. techn. Phys. **21**, 222, 1940. — [2]) B. v. Borries u. E. Ruska, ZS. f. Phys. **116**, 249, 1940. — [3]) E. Kinder, Koll.-ZS. **95**, 326, 1941. — [4]) H. Boersch, Phys. ZS. **44**, 32, 1943.

tronenbeugung, bei der die Streuung in den Schattenraum für kleine Winkel bedeutend intensiver ist als die in den „Lichtraum". Da die Aperturblende, durch deren Verschieben das Dunkelfeldbild erhalten wird, in unserem Fall noch innerhalb der Brennweite des Objektivs lag, entspricht der Aufhellung einer dunkelfeldseitigen Kante eine Bevorzugung der „inneren" Streuung, ganz in Übereinstimmung mit den Resultaten von Boersch.

Fig. 11. MgO-Kristall im Dunkelfeld. Dunkelfeldseitige Kante Intensitäts-bevorzugt. Vergr. 9000 : 1.

Die folgende Hellaufnahme Fig. 12 ist das Ergebnis eines Versuchs, die Höhen übermikroskopischer Objekte aus

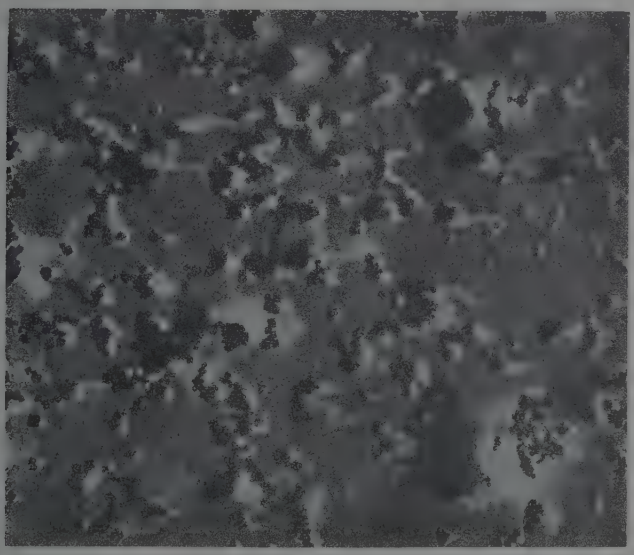


Fig. 12. MgO-Kristalle mit Aufdampfschatten. Vergr. 7000 : 1.

einem Einzelbild zu bestimmen. Auf der Trägerfolie wurde MgO-Rauch aufgefangen und das Objektträgerplättchen im Vakuum mit Aluminium

schräg bedampft. Hinter den einzelnen Kristallen oder Kristallgruppen entstehen dann die sogenannten Aufdampfschatten[1]), aus deren Länge die Höhe der zugehörigen Teilchen bei bekanntem Aufdampfwinkel zu entnehmen ist[2]).

Bei der vorliegenden Aufnahme ist schon aus der Gestalt und Schärfe des Schattens zu erkennen, ob sich der betreffende Kristall auf der Folie oder in einer gewissen Höhe darüber befindet. Wegen der Verwendung einer nichtpunktförmigen Dampfquelle erzeugen nämlich nur die unmittelbar auf der Folie liegenden Partikel scharfe Konturen. Die aus der Schattenlänge bestimmten Höhen einzelner markanter Punkte ergeben eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den Werten, die die Stereoaufnahme desselben Präparates liefert.

Bei der Ausmessung und Betrachtung dieser Stereoaufnahme zeigte sich noch eine interessante Erscheinung, die auf die kristalline Natur des Aluminium-Niederschlages hindeutet: Beim Betrachten der ungestörten Partien der Aufdampfschicht im Stereoskop gelingt es nicht, diese Schicht mit dem Auge in einer bestimmten Ebene zu lokalisieren. Ein genauer Vergleich der Teilbilder lehrt nun, daß feinere Einzelheiten des Niederschlages — etwa dunkle Punkte — in den beiden Aufnahmen einander keineswegs entsprechen. Punkte, die auf der einen Aufnahme vorhanden sind, fehlen auf der anderen und umgekehrt. Daraus folgt, daß die Schwärzungsunterschiede in der Aufdampfschicht nicht nur auf reiner Absorption eines amorphen Materials beruhen können, denn diese wäre ja von der Durchstrahlungsrichtung unabhängig, sondern daß der Niederschlag kristalliner Natur sein muß. Einzelne Kristallite in geeigneter Lage reflektieren die einfallende Strahlung seitwärts heraus und erscheinen somit im Bild dunkel. Bei der Kippung des Objekts werden nun andere Kriställchen in die Reflektionsstellung kommen und im zweiten Bild dunkle Punkte an anderen Stellen hervorrufen.

Abschließend sei noch erwähnt, daß das bisher erreichte Auflösungsvermögen des Jochlinsenmikroskops aus der Trennung benachbarter Bildpunkte zu rund 5 mμ bestimmt wurde.

---

[1]) Vgl. H. Mahl u. I. Pohl, ZS. f. techn. Phys. **16**, 219, 1935, Abb. 3c und d. — [2]) H. O. Müller, ZS. f. Instrkde. **62**, 389, 1942.

Bemerkung zur Theorie des Kathodenfalls.

Von **R. Seeliger** in Greifswald.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 17. Juli 1943.)

Es wird untersucht, welche Bedingungen die Abhängigkeit der Elektronenstoßionisierung von der Feldstärke erfüllen muß, damit die Charakteristik des Kathodenfallgebietes in Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen verläuft. Das Ergebnis läßt sich geometrisch durch eine einfache Flächenbeziehung veranschaulichen und physikalisch in Zusammenhang bringen mit einer Extremalforderung.

Alle bisher ausgearbeiteten Theorien des Kathodenfalls benutzen bekanntlich mehr oder minder weitgehend vereinfachende Annahmen, teils weil man die zu berücksichtigenden Elementarprozesse quantitativ noch nicht genau genug kennt, teils, weil sonst sehr bald schon unüberwindliche mathematisch-formale Schwierigkeiten auftreten oder die Endformeln indiskutabel kompliziert werden. Von diesen „Näherungstheorien" wird man demgemäß nicht mehr verlangen dürfen, als jeweils in ihren Prämissen enthalten ist; aber auch das ist — wenn man sie kritisch und sinngemäß auswertet — doch schon recht viel, und gibt bereits ein recht befriedigendes Gesamtbild. Andererseits kann man sich fragen, wie weit die Vereinfachung und Schematisierung der Theorie überhaupt getrieben werden kann, ohne daß Wesentliches verloren geht. Bei Überlegungen allgemeiner Art oder bei abschätzenden Betrachtungen kommt es nämlich oft nicht so sehr auf quantitative wie auf qualitative oder nur größenordnungsmäßige Zusammenhänge an, und es ist dann erwünscht, möglichst handliche Endformeln zur Verfügung zu haben. Zu einer Untersuchung über die Möglichkeiten weiterer Vereinfachungen der Theorie ist nun die von v. Engel und Steenbeck[1]) ausgearbeitete besonders geeignet: Die grundsätzlichen Voraussetzungen dieser Theorie (einfacher Beweglichkeitsansatz für Ionen, Elektronenionisierung nach dem Schema von Townsend) sind dieselben, wie sie in allen Näherungstheorien gemacht werden, und die wesentliche weitere Vereinfachung (linearer Feldstärkeabfall im Kathodenfallgebiet) scheint zumindest den wirklichen Sachverhalt soweit richtig wiederzugeben, daß es gerechtfertigt sein dürfte, sie bereits unter die Prämissen aufzunehmen und damit von vornherein eine der unan-

[1]) A. v. Engel u. M. Steenbeck, Gasentladungen. II, S. 69ff.

genehmsten mathematisch-formalen Schwierigkeiten zu umgehen; nebenbei bemerkt läßt sich zudem die neuerdings betonte[1]) Nichtunabhängigkeit des Kathodenfallgebietes vom Glimmlichtplasma im Rahmen der ersten Näherung ohne große Schwierigkeiten und wesentliche Änderungen in die Theorie einbauen. Dazu kommt, daß man hier unmittelbar den Nutzen erkennt, den weitere Vereinfachungen mit sich bringen würden. Die Endformel für den Kathodenfall in Abhängigkeit von der Stromdichte ist nämlich zwar in geschlossener Form darstellbar, kann aber nur numerisch ausgewertet werden und läßt deshalb den Wunsch nach einer „Algebraisierung" entstehen. Man sieht ferner sofort, wo überhaupt noch etwas vereinfacht werden könnte, ohne das physikalische Bild zu verzerren. Eine Möglichkeit dazu bietet sich offenbar nur noch in der Wahl einer anderen Näherungsdarstellung des Ionisationskoeffizienten $\alpha\,(\varepsilon)$ als der auch von v. Engel und Steenbeck benutzten üblichen halbempirischen Exponentialformel.

Ganz abgesehen davon, daß die genannte Exponentialformel für α nur eine an sich ziemlich grobe (und für manche Gase sogar recht schlechte) Näherungsformel ist, gilt sie nicht in den ganzen im Kathodenfallgebiet vorkommenden Feldstärkebereichen. Die Feldstärken liegen zwischen $\varepsilon = 0$ und mindestens $\varepsilon = 2\,V_n/d_n$ für normalen Kathodenfall bzw. beliebig hohen Werten für beliebig hohen anomalen Kathodenfall. Aus den für V_n und d_n zur Verfügung stehenden Angaben ergibt sich hieraus z. B.

	He—Al	He—Fe	Ar—Al	Ar—Fe
ε/p	0 bis $\geqq 210$	0 bis $\geqq 230$	0 bis $\geqq 690$	0 bis $\geqq 1000$,

während andererseits als Gültigkeitsbereich der Exponentialformel für α angegeben wird für He $\varepsilon/p = 20$ bis 150, für Ar $\varepsilon/p = 100$ bis 600. Es liegt schon deshalb die Vermutung nahe, daß andere Näherungsformeln, wenn sie nur physikalisch nicht von vornherein unvernünftig sind und den Verlauf von α einigermaßen wiedergeben, für eine Näherungstheorie ebensogut brauchbar sein müßten. Man überzeugt sich jedoch leicht, daß dem überraschenderweise nicht so ist, wenn man die Rechnungen von v. Engel und Steenbeck wiederholt, z. B. mit algebraischen Näherungsformeln ersten oder zweiten Grades, sondern daß man dann auf ganz absonderliche nnd sogar fallende Charakteristiken $V(j)$ kommt. Dies legt es jedenfalls nahe zu untersuchen,

[1]) W. Weizel, R. Rompe u. M. Schön, ZS. f. Phys. 112, 339, 1939.

welche Bedingungen die Funktion $\alpha(\varepsilon)$ erfüllen muß, um nicht auf evident unsinnige Ergebnisse zu führen. Die Antwort läßt sich, wie sich zeigen wird, durch recht einfache Überlegungen geben.

Mit einer für spätere Zwecke nützlichen kleinen Verallgemeinerung — es soll die Feldstärke ε von dem Wert ε_0 an der Kathode linear abnehmen auf den Wert ε_m an der Grenze $x = d$ des Kathodenfallgebietes, wobei zugleich $\alpha = 0$ sein soll für $\varepsilon \leqq \varepsilon_m$ — sind die Ausgangsgleichungen der Theorie

$$j = \frac{b_+(1+\gamma)}{4\pi} \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_m)}{d}, \tag{1}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{2V_k}{d} - \varepsilon_m, \tag{2}$$

$$\int_0^d \alpha \, \mathrm{d}x = \frac{d}{\varepsilon_0 - \varepsilon_m} \int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_0} \alpha(\varepsilon) \, \mathrm{d}\varepsilon = \ln(1 + 1/\gamma). \tag{3}$$

Dabei ist nun natürlich auch ε_m als vorgegebene Konstante zu betrachten. Die Größe γ ist zunächst wie bei v. Engel und Steenbeck eine Konstante, worauf später jedoch noch einzugehen sein wird. Ausdrücklich bemerkt sei noch, daß alles folgende sich sofort und ohne jede grundsätzliche Änderung in den Schlußfolgerungen übertragen läßt von dem hier benutzten Ansatz $u = b_+ \cdot \varepsilon$ für die Ionenwanderung auf den Ansatz $u = b_+ \sqrt{\varepsilon}$, also nicht an den ersteren Beweglichkeitsansatz gebunden ist.

Zunächst wird man als Forderungen an die Lösung der Grundgleichungen (1) bis (3) zu stellen haben, daß

$$\frac{\partial d}{\partial j} < 0, \quad \frac{\partial d}{\partial V_k} < 0, \quad \frac{\partial V_k}{\partial j} > 0 \tag{4}$$

sein soll. Die Untersuchung, welche Eigenschaften $\alpha(\varepsilon)$ haben muß, damit diesen drei Forderungen genügt wird, wird nun dadurch sehr vereinfacht, daß die erste stets, d. h. wie beschaffen $\alpha(\varepsilon)$ auch sein mag, erfüllt ist, und daß deshalb die zweite von selbst erfüllt ist, wenn dies für die dritte der Fall ist. Um dies zu zeigen, eliminiert man d aus (1) und (3) und erhält

$$j = \left(\frac{b_+(1+\gamma)}{4\pi \ln(1+1/\gamma)}\right) \cdot \varepsilon_0 \int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_0} \alpha \, \mathrm{d}\varepsilon, \tag{5a}$$

wodurch j als Funktion von ε_0 allein gegeben ist. Wie man hieraus sofort erkennt, nimmt j stets zu, wenn ε_0 zunimmt, d. h. es ist stets

$\partial j/\partial \varepsilon_0 > 0$. Andererseits gibt (3) bereits d als Funktion von ε_0 allein. Wenn man nach ε_0 differenziert, erhält man

$$\frac{\partial d}{\partial \varepsilon_0} \int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_0} \alpha \, \mathrm{d}\, \varepsilon = \ln (1 + 1/\gamma) - d \cdot \alpha (\varepsilon_0).$$

Da nun aber stets gilt

$$\ln (1 + 1/\gamma) = \int_0^d \alpha \, \mathrm{d}\, x < d \cdot \alpha (\varepsilon_0),$$

ist also $\partial d/\partial \varepsilon_0 < 0$ und daraus ergibt sich in Verbindung mit $\partial j/\partial \varepsilon_0 > 0$, daß stets $\partial d/\partial j < 0$ ist. Um nun die Bedingung dafür zu finden, daß

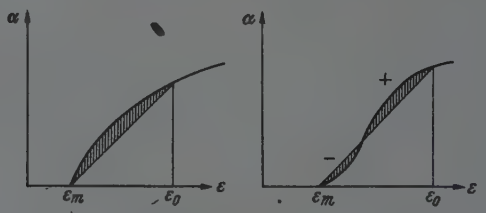


Fig. 1. Geometrische Darstellung der Bedingung (6).

der dritten der in (4) angegebenen Forderungen genügt wird, eliminiert man d aus (2) und (3) und erhält

$$V_k = \left(\frac{\ln (1 + 1/\gamma)}{2}\right) \cdot \frac{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_m^2}{\int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_0} \alpha \, \mathrm{d}\, \varepsilon}. \tag{5b}$$

Die beiden Gleichungen (5a) und (5b) geben die Charakteristik $V_k (j)$ in Parameterdarstellung. Differenziert man sie nach ε_0, so findet man unmittelbar die gesuchte Bedingung:

$$\int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_0} \alpha \, \mathrm{d}\, \varepsilon > \left(1 + \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0}\right) \cdot \left[\frac{1}{2} (\varepsilon_0 - \varepsilon_m) \cdot \alpha (\varepsilon_0)\right]. \tag{6}$$

Es läßt sich dies geometrisch veranschaulichen. Das Integral ist die von der α-Kurve abgeschlossene Fläche, die eckige Klammer die Dreiecksfläche Δ mit den Ecken ε_m, ε_0 und $\alpha (\varepsilon_0)$. Die Differenz der beiden Flächen ist die Fläche F (in den Fig. 1 schraffiert), und die Bedingung (6) läßt sich deshalb am übersichtlichsten schreiben in der Form

$$F = \int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_0} - \Delta > \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} \cdot \Delta. \tag{6a}$$

Dabei ist natürlich darauf zu achten, daß F aus positiven und negativen Teilen bestehen kann.

Die drei Forderungen (4) verlangen demnach von der $\alpha(\varepsilon)$-Kurve noch recht wenig, und z. B. auch die (oben schon erwähnten) linearen und quadratischen Darstellungen $\alpha = a(\varepsilon - \varepsilon_m)$ und $\alpha = a \cdot \varepsilon - b \cdot \varepsilon^2$ würden der Bedingung (6) bereits genügen. Nun muß man aber von der Lösung der Grundgleichungen auch noch verlangen, daß sie den „normalen" Kathodenfall mitenthält. Er ist in der zur Diskussion stehenden Theorie dadurch gegeben, daß $\partial V_k/\partial j = 0$ sein soll, wobei der zugehörende Wert von j die normale Stromdichte ist. Man wird deshalb über die Erfüllung der Bedingung (6) hinaus noch verlangen müssen, daß überhaupt im Bereich endlicher, von Null verschiedener Stromdichtewerte $\partial V_k/\partial j = 0$ wird. Die Bedingung dafür ist offenbar, daß es ein endliches, von 0 verschiedenes $\varepsilon_0 (= \varepsilon_n)$ gibt, für das

$$\int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_0} \alpha \, \mathrm{d}\varepsilon = \left(1 + \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0}\right) \left[\frac{1}{2} (\varepsilon_0 - \varepsilon_m) \cdot \alpha(\varepsilon_0)\right] \tag{7}$$

ist. Auch hier kann man die Sachlage geometrisch am besten übersehen. Für $\varepsilon_m = 0$ genügt z. B. eine überall nach unten konkave α-Kurve nicht, wohl aber eine Kurve mit einem Wendepunkt, während für $\varepsilon_m > 0$ auch eine nach unten überall konkave Kurve alle gewünschten Eigenschaften haben kann. Bemerkenswert ist, daß sich für die Bedingung (7) auch eine physikalische Deutung geben läßt insofern, als sie die mathematische Formulierung einer Ökonomieforderung ist, die aus der Theorie des normalen Kathodenfalls bekannt ist[1]). Es soll sich nämlich beim normalen Kathodenfall diejenige Stromdichte einstellen, bei der die erforderliche Ionisation im Kathodenfallgebiet mit dem geringsten Spannungsbedarf bewirkt wird, d. h. bei der die im Mittel zur Bildung eines Ionenpaares aufzuwendende Arbeit $\bar{\eta}$ ein Minimum ist. In der bisherigen Bezeichnungsweise ist nun

$$\bar{\eta} = \frac{\int_0^d \varepsilon \, \mathrm{d}x}{\int_0^d \alpha \, \mathrm{d}x} = \frac{\int_0^d \varepsilon \, \mathrm{d}x}{\frac{d}{\varepsilon_0 - \varepsilon_m} \int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_0} \alpha \, \mathrm{d}\varepsilon}$$

[1]) Es hat mich hierauf Herr Steenbeck aufmerksam gemacht (vgl. dazu W. Rogowski, ZS. f. Phys. 82, 473, 1933). Kritische Bemerkungen zur Extremaltheorie des Kathodenfalls werde ich demnächst mitteilen.

oder ausgerechnet für den linearen Feldabfall $\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_m}{d} x$

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_m^2}{\int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_0} \alpha \, d\varepsilon}.$$

Bei vorgegebenem $\alpha(\varepsilon)$ ist also $\bar{\eta}$ nur abhängig von ε_0 und die genannte Extremalforderung ist also, daß $d\bar{\eta}/d\varepsilon_0 = 0$ sein soll. Mit dem obigen Ausdruck für $\bar{\eta}$ gibt dies aber gerade die Bedingung (7).

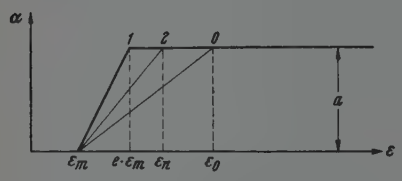


Fig. 2. Einfaches Beispiel für eine überall nach unten konkave α-Kurve.

Als ein besonders einfaches und instruktives Beispiel für eine nach unten überall konkave α-Kurve sei noch das in Fig. 2 gezeichnete betrachtet. Es steigt α von $\varepsilon = \varepsilon_m$ an geradlinig an auf den Wert a, den es bei $\varepsilon = e \cdot \varepsilon_m$ $(e > 1)$ erreicht und dann weiterhin beibehält. Wie man leicht ausrechnen kann, ist für

$$\varepsilon = \varepsilon_n = \varepsilon_m \left\{ \frac{1+e}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+e}{2}\right)^2 - 1} \right\}$$

die Fläche F = Fläche des Dreiecks $(\varepsilon_m, 1, 2)$ gleich $(\varepsilon_m/\varepsilon_n) \times$ Fläche des Dreiecks $(\varepsilon_m, \varepsilon_n, 2)$, d. h. es ist die Bedingung (7) erfüllt. Ebenso einfach läßt sich zeigen, daß für alle $\varepsilon_0 > \varepsilon_n$ die Fläche F des Dreiecks $(\varepsilon_m, 1, 0)$ jeweils größer ist als $(\varepsilon_m/\varepsilon_0) \times$ Fläche des Dreiecks $(\varepsilon_m, \varepsilon_0, 0)$, so daß also auch die Bedingung (6) erfüllt ist. In den Gleichungen (5a) und (5b) ist hier

$$\int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_0} \alpha \, d\varepsilon = a \left(\varepsilon_0 - \frac{e+1}{2} \varepsilon_m \right)$$

und man erhält mit $\varepsilon_0 = x \cdot \varepsilon_m$ als bequemste Darstellung der Charakteristik $i(v_k)$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{4\pi \ln(1+1/\gamma)}{b_+(1+\gamma) \cdot a \cdot \varepsilon_m^2}\right) j &= i = x\left(x - \frac{e+1}{2}\right), \\ \left(\frac{2a}{\ln(1+1/\gamma) \cdot \varepsilon_m}\right) V_k &= v_k = \frac{x^2 - 1}{x - \frac{e+1}{2}}, \end{aligned}\right\} \quad x \geqq \frac{e+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{e+1}{2}\right)^2 - 1}.$$

Die Fig. 3 zeigt diese reduzierten Charakteristiken für zwei Werte von e in halblogarithmischer Darstellung. Die Form der Kurven ist also qualitativ dieselbe wie die von v. Engel und Steenbeck angegebene.

Ohne Schwierigkeit kann man noch einen Schritt weiter gehen und in die Theorie hineinnehmen eine Abhängigkeit der Größe γ von ε_0. Erforderlich ist dabei lediglich die physikalisch evidente Annahme, daß $\partial\gamma/\partial\varepsilon_0 > 0$ ist. Die Rechnungen verlaufen ganz ebenso wie oben und brauchen nicht nochmals im einzelnen wiederholt zu werden. Man findet, daß bezüglich der beiden ersten Forderungen (4) alles unverändert bleibt. Als Bedingung dafür, daß $\partial V_k/\partial j \geqq 0$ ist, ergibt sich nun ein etwas komplizierterer Zusammenhang, der sich am übersichtlichsten in der Form schreiben läßt

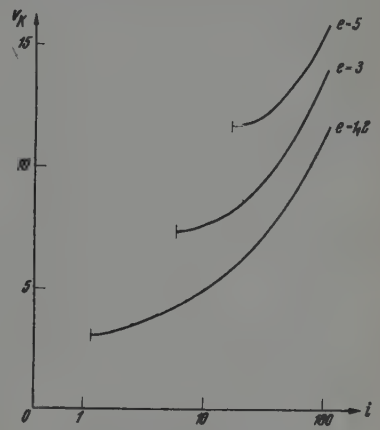


Fig. 3. Reduzierte Charakteristiken für die α-Kurve von Fig. 2.

$$(1-f)\int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_0} \alpha\, d\,\varepsilon \geqq \left(1+\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0}\right)\left[\frac{1}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon_m)\cdot\alpha(\varepsilon_0)\right]; \tag{8}$$

f ist dabei eine positive Größe, die sich ergibt zu

$$f = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0^2-\varepsilon_m^2}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{\ln(1+1/\gamma)}\,\frac{\partial \ln(1+1/\gamma)}{\partial\,\varepsilon_0} \tag{8a}$$

oder ausgeführt

$$f = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon_m^2}{\varepsilon_0^2}\right)\left[\frac{\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial\varepsilon_0}}{\ln(1+1/\gamma)\,(1+\gamma)}\right]. \tag{8b}$$

Nach den zur Zeit zur Verfügung stehenden Daten über die Feldstärkeabhängigkeit von γ und über die in der Glimmentladung anzusetzenden Werte für γ und ε_0 ist die eckige Klammer in (8b) nicht klein gegen 1. Es käme dann also, wenn man die Bedingung (8) in Analogie zu (6a) in der Form schreibt

$$F = \int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_0} - \Delta \geqq \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0}\cdot\Delta + f\int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_0}$$

nun auf der rechten Seite noch ein nicht zu vernachlässigendes Zusatzglied dazu, wodurch die Sachlage etwas komplizierter wird. Die Diskussion im einzelnen durchzuführen, würde allerdings nicht ganz einfach sein, weil f auch noch implizite ε_0 in dem γ steckend enthält.

Untersuchung der Elektronenlawine mit der Nebelkammer*).

Von W. Riemann in Jena.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 20. Juli 1943.)

Mit Hilfe der Nebelkammer werden mit einer gegenüber der früheren[1]) in verschiedener Hinsicht verbesserten Apparatur die Geschwindigkeit und Breite der Elektronenlawinen in verschiedenen Gasen (O_2, CO_2, N_2, Luft, H_2, Ar) gemessen. Eine eingehende Diskussion zeigt, daß der Dampfzusatz zu dem Gas in der Kammer (Wasser- und Alkoholdampf) keinen meßbaren Einfluß auf die Geschwindigkeit hat, eine je nach Gasart verschiedene, aber geringe Wirkung auf die Zahl der gebildeten Träger. Aus der Lawinengeschwindigkeit und -breite wird unabhängig voneinander die ungeordnete Energie der Elektronen bestimmt; sie ergibt sich zu 1 bis 5 bzw. $^1/_2$ bis 1 Volt, so daß von einer größenordnungsmäßigen Übereinstimmung gesprochen werden kann. Der Grund für die Verschiedenheit der Energiewerte liegt vermutlich in den vereinfachten Ansätzen zu ihrer Berechnung.

I. Einleitung.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die Geschwindigkeit der Elektronenlawine, d. h. die feldgerichtete Geschwindigkeit der Elektronen, in möglichst verschiedenen Gasen zu messen. Mit Hilfe der Formeln für die Elektronenbewegung in elektrischen Feldern kann aus der geordneten, d. h. in Feldrichtung gemessenen Fortschreitgeschwindigkeit der Elektronen die ungeordnete (thermische) Geschwindigkeit oder Energie berechnet werden. Vergleicht man diese mit der ungeordneten Energie, die aus der durch die Elektronendiffusion bestimmten Breite der Lawine ermittelt werden kann, so findet man für Luft und Wasserstoff, daß diese Energien größenordnungsmäßig übereinstimmen, jedoch die aus der Geschwindigkeit errechnete Energie größer als die aus der Breite bestimmte ist[1]). Durch Ausdehnung der Messungen auf andere Gase soll festgestellt werden, ob dieses Ergebnis allgemein gilt. Die so bestimmte ungeordnete Energie soll dann daraufhin geprüft werden, ob sie ausreicht, die beobachtete Stoßionisierung zu liefern.

*) D 27.

[1]) H. Raether, ZS. f. Phys. 107, 91, 1937.

Die zur Geschwindigkeitsbestimmung benutzte Methode ist die früher angegebene[1]):

Auf der Kathode einer ebenen Entladungsstrecke werden durch einen Funken einige Photoelektronen ausgelöst, die in dem elektrischen Feld der Entladungsstrecke so stark beschleunigt werden, daß sie stoßionisieren und Elektronenlawinen bilden. Die Dauer des Spannungsstoßes wird so bemessen, daß die Lawine im Elektrodenraum endet. Um diese Elektronenlawinen sichtbar zu machen, ist der Raum zwischen den Elektroden als Nebelkammer ausgebildet. Die gebildeten Ionen dienen also als Kondensationskerne und lassen die Lawine als Tropfenspur erkennen. Mit Hilfe einer Wanderwellenleitung kann die Dauer des Spannungsstoßes und damit die Lawinenlänge verändert werden, so daß aus der Längendifferenz und der zugehörigen Zeitdifferenz die Geschwindigkeit der Lawine berechnet werden kann.

II. Versuchsanordnung und experimentelle Einzelheiten.

Um die Lawinengeschwindigkeit in den verschiedenen Gasen und ihre Unterschiede genau zu bestimmen, war es notwendig, die Meßgenauigkeit der Lawinenlänge zu erhöhen. Hierzu mußte vor allem die Güte der Aufnahmen verbessert werden, worüber ich bereits berichtet habe[2]), und die Streuung der Lawinenlänge bei festgehaltener Stoßdauer möglichst herabgedrückt werden. An der vorhandenen Apparatur wurden daher einige Verbesserungen angebracht:

1. Beleuchtung der Nebelspuren. Zur Beleuchtung der Nebelspuren diente der Lichtblitz einer Argonentladung, der von einem Kondensator (5 μF, 10 kV) erzeugt wurde. Das Argonentladungsrohr (aus Supremax-Glas), dessen Bau bereits beschrieben wurde[3]), zeigte mit steigender Zahl von Entladungen feine Risse an den Innenseiten, die zu einer Schwächung des durchgehenden Lichtes führten. Eine Lampe aus Quarz hingegen zeigte sich allen thermischen Belastungen gewachsen und wurde zum größten Teil der Aufnahmen verwendet. Sie hat den Nachteil, daß sie bei einem Argondruck von 150 Torr bei etwa 7 bis 8 kV von selbst zündet, während das Supremax-Rohr Spannungen bis zu 10 kV hielt.

---

[1]) H. Raether, a. a. O. — [2]) W. Riemann, ZS. f. Phys. **120**, 16, 1942. Für die dort angegebene Lawine mit überlagerter Schwingung (Fig. 3) wurde versehentlich eine Stoßdauer von $1 \cdot 10^{-7}$ sec angegeben. Sie beträgt in Wirklichkeit das Doppelte, so daß auf eine überlagerte Schwingung von etwa $3 \cdot 10^7$ Hz geschlossen werden kann. — [3]) W. Riemann, a. a. O. sowie E. Bagge, Phys. ZS. **43**, 228, 1942.

2. Verringerung der Streuung des Funkeneinsatzes zur Auslösung der Photoelektronen. Spricht die Funkenstrecke zur Beleuchtung der Kathode nicht immer zum gleichen Zeitpunkt an, so schwankt die Länge der Lawinen. Um diese Streuung zu verringern, wurde folgende Anordnung mit Erfolg verwendet:

An die Funkenstrecke, deren Licht Photoelektronen aus der Kathode löst, wurde zusätzlich eine Hilfsspannung gelegt, die die Funkenstrecke gerade nicht zündete (Fig. 1). Parallel zu dieser Hilfsspannung lag zur Intensitätssteigerung des Funkens in wenigen Metern Abstand von der Funkenstrecke eine Kapazität von 2 μF. Um die

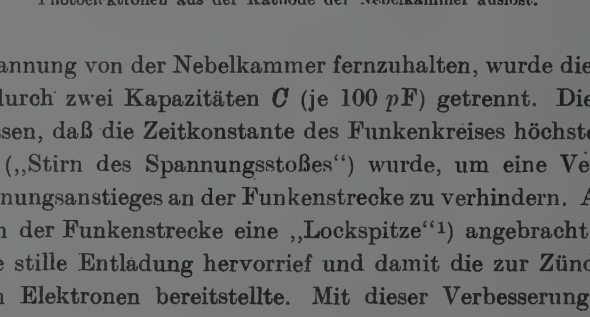


Fig. 1. Schaltung der Funkenstrecke zur Verringerung der Streuung des Funkens, dessen Licht Photoelektronen aus der Kathode der Nebelkammer auslöst.

Gleichspannung von der Nebelkammer fernzuhalten, wurde die Funkenleitung durch zwei Kapazitäten C (je 100 pF) getrennt. Diese waren so bemessen, daß die Zeitkonstante des Funkenkreises höchstens einige 10^{-8} sec („Stirn des Spannungsstoßes") wurde, um eine Verflachung des Spannungsanstieges an der Funkenstrecke zu verhindern. Außerdem wurde an der Funkenstrecke eine „Lockspitze"[1]) angebracht, die eine dauernde stille Entladung hervorrief und damit die zur Zündung notwendigen Elektronen bereitstellte. Mit dieser Verbesserung streuten die Lawinenlängen statt um 20% nur mehr um 5%.

3. Das Expansionsverhältnis bei verschiedenen Dampf- und Gasfüllungen der Nebelkammer. Zur Erzeugung des Kondensationsdampfes wurde anfangs ein Gemisch aus 1 : 1 Volumenteilen Methylalkohol und Wasser benutzt. Diese Dampffüllung hat gegenüber dem Äthylalkohol-Wassergemisch (1 : 3) den Vorteil, daß sie größere Tropfen bildet und für das Expansionsverhältnis einen größeren Spielraum zuläßt. Obgleich die Expansionsverhältnisse beider Füllungen für höhere Drucke

[1]) Z. B. G. Balz, H. Kaiser, P. H. Keck, Spectrochem. Acta, II. Bd., S. 92, sowie C. E. Wynn-Williams, Phil. Mag. (7) 1, 353, 1926.

Tabelle 1. Expansionsverhältnis für verschiedene Kondensationsdämpfe in Stickstoff bei einem Gesamtdruck von 100 und 280 Torr.

Druck in Torr (20° C)	Expansionsverhältnis bei Dampffüllung der Nebelkammer mit	
	$C_2H_5OH + H_2O$ 1:3	$CH_3OH + H_2O$ 1:1
100	1,25	1,31
280	1,20	1,20 [1])

($\geqq$ 280 Torr) nahezu gleich sind (vgl. die gemessenen Werte in Tabelle 1) und die eben genannten Vorteile bestehen, wurde für die Messungen Äthylalkohol-Wassergemisch (1 : 3) verwendet, da nach Tabelle 2 sein Dampfdruck erheblich kleiner ist und somit eine geringere Beeinflussung der Ergebnisse, z. B. der Trägerbildung u. a. zu erwarten ist.

Tabelle 2. Partialdruck der Kondensationssubstanz für verschiedene Dampffüllungen.

	Partialdruck der Dampffüllung		
	H_2O destilliert	$C_2H_5OH + H_2O$ 1:3	$CH_3OH + H_2O$ 1:1
Druck (20° C) in Torr ...	17	29,6 (17 Torr H_2O + 12,6 Torr C_2H_5OH) [2])	42

Abgesehen von der Dampffüllung ist das Expansionsverhältnis von der Gasfüllung abhängig, wie Tabelle 3 zeigt.

Tabelle 3. Gemessenes Expansionsverhältnis für verschiedene Gase bei einem Gesamtdruck von 300 Torr (20° C) in Äthylalkohol-Wassergemisch (1 : 3).

	Ar	H_2	N_2	Luft	O_2	CO_2
Expansionsverhältnis	1,14	1,19	1,20	1,18	1,21	1,24

4. Einsatzspannung der Lawinen. Die an den Kapazitäten liegende Spannung, die über die Dämpfungswiderstände auf die Leitung geschaltet wird, wurde mit einer Funkenstrecke gemessen, um das primärseitige Voltmeter zu eichen. Um nun festzustellen, ob die an die Nebelkammer kommende Spannung die Hälfte der an die Kapazitäten

[1]) In meiner Arbeit ZS. f. Phys. 120, 16, 1942 ist das Expansionsverhältnis für Methylalkohol-Wassergemisch mit 1,13 angegeben. Dies gilt für Atmosphärendruck [vgl. J. A. Froemke, C. R. Bloomquist u. E. X. Anderson, ZS. f. phys. Chem. (A) 166, 305, 1933]. — [2]) Berechnet nach Crit. Tables III, S. 290.

gelegten Spannung ist (die Hälfte, weil die Dämpfungswiderstände den Spannungsstoß halbieren), wurde folgende Beobachtung angestellt:

Es wurde die Feldstärke geteilt durch Druck (E/p) gemessen, bei der die erste beobachtbare Ionisation eintritt, d. h. größenordnungsmäßig 10 Ionenpaare oder Tröpfchen. Mit Hilfe dieses E/p berechnet man die Gesamtzahl der Ionenpaare

$$N = e^{\alpha \cdot d},$$

wobei d die Länge der Lawine ist (2 cm), und α den Tabellen über die Stoßfunktionen entnommen wird. Liegt der berechnete Wert für N in der Größenordnung 10, so ist die Höhe des Spannungsstoßes gleich der halben an den Kapazitäten liegenden Spannung.

Tabelle 4. Einsatz der Stoßionisation bei einem Gesamtdruck von 300 Torr (20° C).

Gas	E/p $\left(\frac{\text{Volt}}{\text{cm} \cdot \text{Torr}}\right)$	$\alpha_{(Gas)}$	$\alpha_{(H_2O)}$	$N = e^{\alpha \cdot d}$
O_2	31,0	0,30	0,26	~ 10
Luft	32,7	0,73	0,36	
N_2	32,4	0,60	0,32	
H_2	20,7	6,8	0	—

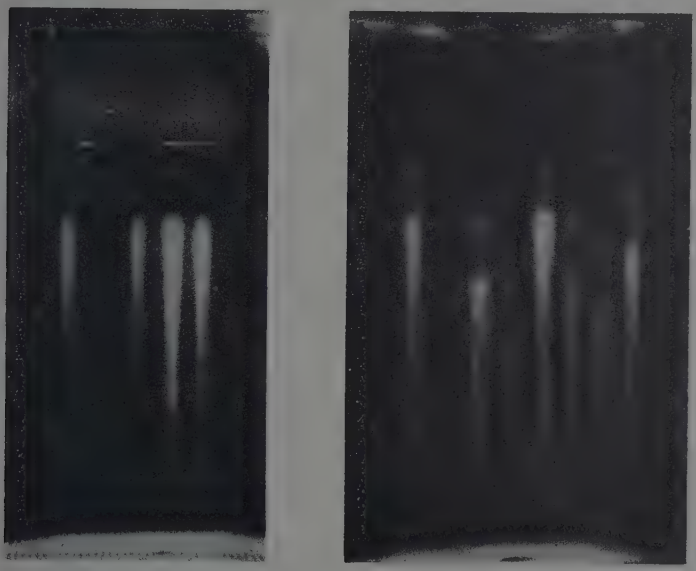
Tabelle 4 zeigt, daß in O_2, Luft und N_2 die erwartete Trägerzahl größenordnungsmäßig berechnet wird, und somit die Spannungsverhältnisse in Ordnung sind. (Bei der Berechnung der gebildeten Ladungsträger wurde der Anteil des Dampfes an der Stoßionisation hinzugenommen, und zwar nur der des Wasserdampfes ($\alpha_{(H_2O)}$), da dieser den des Alkohols übertrifft. Entscheidend ist jedoch diese Berücksichtigung nicht.) In CO_2 sind die α/p-Werte bei kleinem E/p nur durch sehr unsichere Extrapolation zu ermitteln, so daß eine Berechnung nicht möglich war. In Wasserstoff kommen zu große α/p-Zahlen heraus, jedoch ist die Angabe des α-Wasserstoffwertes unsicher: Der in der Tabelle 4 angegebene Wert entstammt einer Arbeit von Ayres[1]), der die Stoßfunktion von Wasserstoff, Stickstoff und Argon gemessen hat. Da sich bei Nachmessungen herausgestellt hat[2]) [3]), daß

[1]) T. L. R. Ayres, Phil. Mag. **45**, 353, 1932. — [2]) K. Masch, Arch. f. Elektrotechnik **24**, 587, 1932. — [3]) A. A. Kruithoff u. F. M. Penning, Physica **3**, 531, 1936.

seine Werte für Stickstoff und Argon wesentlich zu hoch angegeben waren, ist zu vermuten, daß das gleiche für Wasserstoff gilt, weshalb auf die $e^{\alpha d}$-Berechnung verzichtet wurde[1]).

III. Ergebnisse und ihre Diskussion.

1. Ergebnisse. a) Lawinenaufnahmen. Mit den eben beschriebenen Verbesserungen der Apparatur wurden in den verschiedenen



a b

Fig. 2. Elektronenlawinen in Stickstoff (a) und Wasserstoff (b). In (a) sind die Lawinen fast gleichzeitig gestartet, während sie in (b) mit einigen 10^{-8} sec Zeitunterschied die Kathode verließen. Die Lawinen in H_2, die durch große Tropfen auffallen, liefen unter der Wirkung eines Spannungsstoßes, dem eine Schwingung folgte, so daß nach Ablauf der eigentlichen Stoßwelle noch Elektronen aus dem Kopf herausgezogen wurden.

Gasen Lawinenaufnahmen erhalten, die sich von den in CO_2 und Luft erhaltenen[2]) nicht wesentlich unterscheiden, von H_2 abgesehen, in welchem die Tropfen der Nebelspur besonders groß sind. Da diese rasch zu Boden sinken, ist in H_2 eine genaue Einstellung in der Aufeinander-

[1]) In der Arbeit von H. Raether, a. a. O., S. 98, ist der Einsatz der Stoßionisation in H_2 bei gleichem E/p gemessen worden. Infolge eines Rechenfehlers wurde jedoch versehentlich die Zahl der gebildeten Ionen als übereinstimmend mit der Berechnung angegeben. — [2]) W. Riemann, a. a. O.

folge von Expansion — Spannungsstoß — Photographie erforderlich. Fig. 2 zeigt Aufnahmen von Lawinen in N_2 und H_2.

b) Meßergebnisse. Die folgende Tabelle 5 zeigt die in den verschiedenen Gasen erhaltenen Werte der Breite der Lawinen bei den angegebenen Lawinenlängen sowie ihrer Vorwachsgeschwindigkeit, die aus der Zunahme der Lawinenlänge bei vorgegebener Vergrößerung der Stoßdauer berechnet wurde. Druck, sowie Feldstärke geteilt durch Druck (E/p), bei denen die genannten Werte gemessen wurden, sind beigefügt, ebenso die Zahl der Lawinen, die zur Festlegung der Lawinenlänge für die Geschwindigkeitsmessung verwendet wurden.

Über die Genauigkeit der Meßwerte läßt sich folgendes sagen: Die Lawinenlängen, aus denen die Vorwachsgeschwindigkeit berechnet wird, streuen um etwa 0,1 cm, d. h. $\pm 5\%$. Diese Streuung ist hauptsächlich durch die nicht mehr vermeidbare Schwankung des Zeitpunktes bedingt, in dem ein oder mehrere Photoelektronen ausgelöst werden.

Tabelle 5. Die Meßergebnisse der Breite, Länge und Geschwindigkeit der Lawinen.

Gas	Druck (Torr, 0° C)	E/p $\left(\frac{\text{Volt}}{\text{cm} \cdot \text{Torr}}\right)$	Breite der Lawinen (cm)	Länge der Lawinen (cm)	u (cm/sec)	Zahl der gemessenen Lawinen
CO_2	285	36	0,17	1,87	$1{,}72 \cdot 10^7$	120
O_2	290	34	0,19	1,82	1,63	140
Luft	285	37	0,14	2,10	1,47	130
N_2	280	38	0,15	2,10	1,20	240
			0,12	1,75		
			0,09	1,40		
	143	39	0,22	2,57	1,24	170
	94	42	0,30	2,57	1,29	44
			0,29	2,34		
			0,18	1,62		
			0,17	1,40		
H_2	467	22	0,11	1,75	0,68	66
	305	26	0,15	2,34	0,80	100
			0,14	2,10		
	121	31	0,28	2,10	0,92	100
			0,14	1,52		
Ar	528	12	0,23	1,87	0,43	75
	290	16	0,35	2,33	0,53	160
			0,23	1,87		

Da die Lawinen nicht immer genau in der Mitte der Kammer, sondern in einem Kreis von etwa 1 cm Radius um die Kammermitte entstehen, kommt eine zusätzliche Unsicherheit von etwa 2% hinzu. Die Unsicherheit in der Angabe der Vorwachsgeschwindigkeit ist daher auf höchstens 10% zu veranschlagen. Die Streuung der Lawinenbreiten ist etwa $\pm$ 0,01 cm.

Die Geschwindigkeit der Lawinen in Luft und Wasserstoff stimmt innerhalb der Fehlergrenzen mit den früher in der Nebelkammer gemessenen überein[1]). Ein Vergleich mit den nach anderen Methoden[2]) erhaltenen Werten ist leider nicht möglich, da diese Messungen nur bis rund zum halben E/p-Wert des hier benutzten gehen. Eine Ausnahme bildet Wasserstoff, in welchem Nielsen und Bradbury bis zu $E/p = 20$ Volt/cm · Torr gemessen haben und hierfür den Wert von $u = 6{,}9 \cdot 10^6$ cm/sec bestimmten[2]). Extrapoliert man aus ihren experimentellen Daten auf $E/p = 20{,}5$ (20° C), so erhält man $u = 7{,}0 \cdot 10^6$ cm/sec, während aus Nebelkammerbeobachtungen $u = 6{,}8 \pm 0{,}7 \cdot 10^6$ cm/sec gefunden wurde. Dies beweist unabhängig von den Ergebnissen der S. 224, daß die Nebelkammermethode einwandfreie Geschwindigkeitsbestimmungen erlaubt.

Die in der vorletzten Spalte angegebene Geschwindigkeit zeigt eine Abhängigkeit vom Gas einerseits und bei vorgegebenem Gas vom Druck andererseits. Letztere findet ihre Erklärung darin, daß mit abnehmendem Druck die Feldstärke gesteigert werden muß, um die Trägerzahl unverändert zu erhalten. Da aber die Elektronengeschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit der Lawinen, mit der Wurzel aus E/p zunimmt[3]), ist mit abnehmendem Druck ein Anwachsen der Geschwindigkeit zu erwarten. Die beobachtete Zunahme entspricht der Berechnung.

Bevor die Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Gas und die in der Einleitung angeschnittene Frage nach der ungeordneten Energie der Elektronen diskutiert wird, soll der Einfluß des Dampfzusatzes auf die Meßergebnisse besprochen werden.

2. Einfluß des Dampfzusatzes. a) Auf die Vorwachsgeschwindigkeit. Es sollte untersucht werden, ob der Dampfzusatz auf die Lawinengeschwindigkeit wirkt. Deshalb wurde bei gleichem Gesamt-

[1]) H. Raether, a. a. O. — [2]) R. A. Nielsen u. N. E. Bradbury, Phys. Rev. **49**, 388, 1936. — [3]) $u = 0{,}84 \sqrt[4]{\varkappa} \sqrt{e/m \lambda E}$, $\varkappa$ (vgl. S. 226) ist innerhalb des obigen E/p-Bereiches als konstant anzusehen.

lichkeit eines Zählrohrs für γ-Strahlen. Dieses Problem, das auch sonst von erheblicher Bedeutung ist, hat heute, vor allem durch Koinzidenzmessungen, eine gewisse Klärung gefunden [siehe die sorgfältige Diskussion bei Norling[1])]. Dabei hat sich der erste Ansatz von v. Baeyer und vor allem die von v. Droste[2]) aus seinen Messungen abgeleitete Formel gut bestätigt.

Die Zahl der radioaktiven Kerne, deren Umwandlungsschema gut bekannt ist, ist heute noch recht klein. Unter den künstlich aktiven Kernen, die mehrere γ-Linien besitzen, ist besonders gut Na^{24} untersucht. Neben Elektronen mit der maximalen Energie von 1,4 e-MV[3]) werden γ-Strahlen ausgesandt. Nach Messungen in der Wilsonkammer von Richardson und Kurie[4]) besteht die γ-Strahlung aus drei Linien mit den Energien 3,0; 2,04; 1,01 e-MV und den relativen Intensitäten 0,65; 0,95; 1,05. Es liegt nahe, die Energie der ersten Linie als die Summe der beiden anderen zu deuten. Es bestünden dann zwei angeregte Zustände von 3 e-MV und von 2 oder 1 e-MV. Unter Mitberücksichtigung der Intensitäten erhält man das in Fig. 1a gezeigte Umwandlungsschema. Es ist allerdings leicht möglich, kompliziertere Termschemata mit z. B. drei angeregten Termen aufzustellen, die innerhalb der Meßfehler mit den obigen Daten verträglich sind. In Fig. 1b ist ein solches Schema gezeigt, bei dem die Umwandlungsenergie um 1 e-MV erhöht ist. Es treten dann bei jedem Zerfall mindestens zwei Quanten auf. Der 4 e-MV-Übergang müßte dann mit einem Auswahlverbot behaftet sein, da eine solche γ-Linie nicht beobachtet wurde.

Gegen das einfache Schema wurden verschiedentlich experimentelle Gründe angeführt. Die Untersuchung der Form des β-Spektrums führte mehrere Autoren zu dem Schluß, daß es zwei oder drei Teilspektren geben sollte[5]), wogegen Feather und Dunworth[6]) aus Absorptions-

[1]) F. Norling, Ark. Mat. Astron. Fysik 27 A, Nr. 27, 1941. — [2]) G. v. Droste, ZS. f. Phys. 100, 529, 1936; 104, 474, 1937. — [3]) Z. B. J. L. Lawson, Phys. Rev. 56, 131, 1939; S. Kikuchi, Y. Watase, J. Itoh, E. Takeda u. S. Yamaguchi, Proc. Phys. Math. Soc. Japan (3) 21, 381, 1939. — [4]) J. R. Richardson u. F. N. D. Kurie, Phys. Rev. 50, 999, 1936; J. R. Richardson, ebenda 53, 124, 1938. Damit in ungeklärtem Widerspruch steht eine Messung von Kikuchi und Mitarbeitern (l. c.), die γ-Energien von 2,97; 1,55; 0,8 e-MV angeben, sowie von S. C. Curran, P. J. Dee u. J. E. Strothers, Proc. Roy. Soc. London (A) 174, 546, 1940, die 3,03; 2,0; 1,46 e-MV finden. Im Text soll wegen der Einfachheit des Ergebnisses von Richardson und Kurie formal an diesem festgehalten werden. Auf das Endergebnis hat diese Annahme, wie sich zeigen wird, kaum Einfluß. — [5]) A. Sugimoto, Nature 142, 754, 1938; S. Kikuchi u. a., l. c. — [6]) N. Feather u. J. V. Dunworth, Proc. Cambr. Phil. Soc. 34, 442, 1938.

messungen schlossen, daß es einheitlich sei. Koinzidenzmessungen von Langer, Mitchell und Mc Daniel[1]) erbrachten schließlich den Beweis für die Einfachheit des Spektrums. Dagegen führte die quantitative Auswertung von Koinzidenzhäufigkeiten[2]) [1]) zu Widersprüchen mit der Erwartung nach Fig. 1a, so daß die genannten Autoren ein Schema mit mehr als zwei angeregten Zuständen, etwa nach Fig. 1b, annehmen mußten. Feather und Dunworth glaubten außerdem gefunden zu haben, daß insgesamt mehr β- als γ-Übergänge stattfinden sollten.

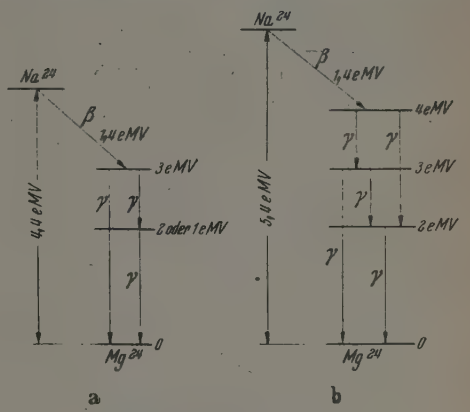


Fig. 1. Mögliche Umwandlungsschemata von Na^{24}.

Anläßlich anderer Untersuchungen bot sich die Gelegenheit, das Problem wiederaufzugreifen. Außerdem konnte noch Na^{22} (Halbwertszeit 3 Jahre) untersucht werden, das Positronen mit einer maximalen Energie von 0,6 e-MV [3]) und eine homogene γ-Strahlung von 1,3 e-MV aussendet[4]). Hier besteht die Frage, ob die γ-Strahlung zu dem Positronenübergang gehört, oder ob sie in Verbindung mit einem möglichen K-Einfang ausgesandt wird. Nach Berechnungen von Lamb[5]) sollte K-Einfang in erheblichem Umfang auftreten.

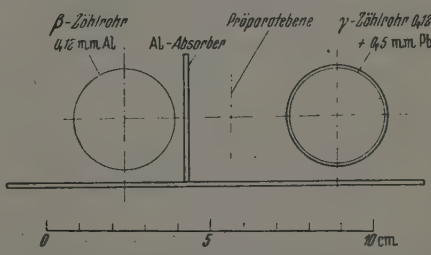


Fig. 2. Anordnung zur Messung von β-γ- und γ-γ-Koinzidenzen. Für letztere wird auch das β-Zählrohr mit 0,5 mm Blei umgeben. Zählrohrdurchmesser 28 mm, wirksame Länge 55 mm, Abstand der Achsen 65 mm.

2. Methodisches. Die Anordnung Fig. 2, die bei Na^{24} verwendet wurde, ist als Standardanordnung für solche Messungen gedacht. Das

[1]) L. M. Langer, A. C. G. Mitchell u. P. W. Mc Daniel, Phys. Rev. **56**, 962, 1939. — [2]) Siehe Anm. 6, S. 234. — [3]) L. J. Laslett, Phys. Rev. **52**, 529, 1937; C. Magnan, C. R. Séances Acad. Sci. Paris **205**, 1147, 1937. — [4]) F. Oppenheimer u. E. P. Tomlinson, Phys. Rev. **56**, 858, 1939. — [5]) W. E. Lamb, Phys. Rev. **50**, 388, 1936.

in die freie Weglänge (λ) und in die ungeordnete Elektronengeschwindigkeit (v) eingeht.

Während man die Weglänge der Elektronen (λ) aus Messungen kennt, ist über die ungeordnete Energie $\left(\frac{m}{2} v^2 = e\,U\right)$ in diesem E/p-Gebiet der gerade einsetzenden Stoßionisierung nichts bekannt. Die vorliegenden Messungen von u wurden daher dazu benutzt, mit Hilfe von (1) die ungeordnete Energie U zu berechnen (vgl. Tabelle 8). [U trägt den Index u, da sie aus der Geschwindigkeit (u) berechnet wurde; über die Bedeutung von U_b vgl. S. 227.]

Aus den angegebenen Messungen kann man auch den relativen Energieverlust pro Stoß ($\varkappa = \Delta U/U$) berechnen, da im stationären Zustand die pro Stoß abgegebene Energie (ΔU) gleich der pro Weglänge aufgenommenen Energie $\left(E\,\lambda\,\frac{u}{v}\right)$ ist, woraus $\varkappa = \frac{(E\,\lambda)^2}{2\,U^2}$ folgt. Die Werte liegen in der zu erwartenden Größenordnung (Engel-Steenbeck, Gasentladungen I, S. 187, 188), lassen jedoch keine weitergehenden Schlüsse zu.

Die Werte von U_u sind mit den gaskinetischen Weglängen berechnet worden; in Wirklichkeit sind die Weglängen stark von der Geschwindigkeit abhängig; so daß wegen der quadratischen Abhängigkeit der U von λ [vgl. (1)] diese Korrektur zu beachten ist. Vergleicht man die gaskinetischen mit den wahren Wirkungsquerschnitten[1]), so ist die Abweichung am auffälligsten bei H_2, wo im Bereich zwischen 1 bis

Tabelle 8. Berechnung der ungeordneten Elektronenenergie.

Gas	Druck (0^0 C) Torr	λ (cm) (0^0 C, 1 Torr)	α/P $\left(\frac{\text{Ionenpaare}}{\text{cm} \cdot \text{Torr}}\right)$	U_u (Volt)	U_b (Volt)	$\varkappa$
CO_2	285	$1{,}71 \cdot 10^{-2}$	$2{,}4 \cdot 10^{-2}$	1,1	$\sim 0{,}5$	$1{,}5 \cdot 10^{-2}$
O_2	290	2,78	1,28	3,0	1,0—1,5	5
Luft	285	2,62	0,93	3,9	0,5—1	3
N_2	280	2,53	0,71	5,7		
	143		0,86	5,6	1—1,5	1,5
	94		1,4	6,0		
H_2	467	4,82	2,8	21,4		
	305		4,2	21,7	0,1—0,2	0,1
	121		8,3	23,2		
Ar	528	2,72	1,3	5,1		
	290		3,85	6,0	$\sim 0{,}5$	0,2

[1]) Geiger-Scheel, Handbuch der Physik XXII/2, S. 266, Art. Ramsauer und Kollath.

3 Volt mit einer Weglänge von etwa $2 \cdot 10^{-2}$ cm zu rechnen ist statt mit $4{,}8 \cdot 10^{-2}$ cm. Der ermittelte Energiewert sinkt dadurch auf etwa 4 Volt, also auf einen im Vergleich zur Ionisierungsspannung vernünftigen Wert und reiht sich damit in die Zahlen der übrigen Gase ein.

b) Berechnung der ungeordneten Energie der Elektronen aus den Dimensionen der Lawine. Die ungeordnete Energie kann unabhängig von der eben gegebenen Berechnung aus der Breite der Lawinenspur ermittelt werden: Die seitliche Ausdehnung der Lawine kommt durch Diffusion der zur Anode laufenden Elektronen zustande. Die Energie dieser der gerichteten Geschwindigkeit überlagerten ungeordneten Bewegung hängt mit der Lawinenbreite über folgende Näherungsformel zusammen[1]):

$$U_b = \frac{E/p \cdot b^2}{24 \cdot \alpha/p \cdot l^2}, \qquad (2)$$

b und l bedeuten Breite und Länge der Spur. In Tabelle 8 stehen in der letzten Spalte die berechneten U_b-Werte, wobei die Meßergebnisse der Tabelle 5 zugrunde gelegt wurden. Die Zahlen liegen zwischen $^1/_2$ und 1 Volt. Der Wasserstoffwert fällt merklich zu klein aus. Berücksichtigt man jedoch die auf S. 220 mitgeteilte Tatsache, daß α/p für H_2 sicher zu hoch berechnet wurde, so wird mit kleinerem α/p auch U_b größer, und zwar um folgenden Wert: Die αd-Werte bei den angegebenen Messungen der Tabelle 5 liegen im allgemeinen bei 5 bis 10, bei H_2 dagegen bei 25. Da bei H_2 sicher keine größere Verstärkung als bei den übrigen Gasen vorlag, ist der α/p-Wert vermutlich 2,5- bis 5mal zu groß; der U_b-Wert steigt also auf etwa 0,5 Volt.

Der Vergleich beider U-Werte ergibt eine größenordnungsmäßige Übereinstimmung. Er bestätigt andererseits für die übrigen Gase die schon früher in Luft und H_2 gefundene Tatsache, daß $U_u > U_b$ ist[2]). Die Gründe hierfür liegen vermutlich in unzulässigen Vereinfachungen bei ihrer Berechnung; vor allem ist die Benutzung der gaskinetischen Weglänge bei der Bestimmung von U_u fraglich, sowie die Annahme gleichmäßiger Verteilung der Streurichtungen der Elektronen nach dem Stoß mit den Gasmolekülen. Die vorliegenden Messungen[3]) zeigen,

[1]) H. Raether, a. a. O. — [2]) Die Berücksichtigung der Tatsache, daß die Breite der Nebelspur durch die „heißesten" Elektronen, die Geschwindigkeit durch die „kältesten" Elektronen bestimmt wird, müßte gerade zu dem umgekehrten Ergebnis führen. — [3]) Geiger-Scheel, Handbuch der Physik XXII/2, S. 288 u. f., Art. Ramsauer und Kollath.

daß letzteres keineswegs der Fall ist, sondern im allgemeinen die Vorwärtsstreuung überwiegt. Es besteht daher die Möglichkeit, daß hierdurch die Lawinenbreite kleiner herauskommt als sie nach der aus der Vorwachsgeschwindigkeit bestimmten, ungeordneten Energie sein sollte.

Eine andere Ursache für dieses Ergebnis kann in der Bildung einer geringeren Trägerzahl als berechnet vermutet werden: Durch Anlagerung von Elektronen auf ihrem Lauf zur Anode scheiden eine Anzahl von Elektronen für die weitere Stoßionisation aus, so daß die Zahl der gebildeten Träger kleiner als $e^{\alpha x}$ wird. In Formel (2) ist mithin ein kleineres α/p einzusetzen, so daß eine größere ungeordnete Energie berechnet wird. Über die Größe und Feldstärkeabhängigkeit dieser Anlagerung ist jedoch wenig bekannt, so daß eine Abschätzung dieses Einflusses nicht möglich ist. Dagegen spricht jedoch der Befund, daß die Einsatzspannung (vgl. S. 220) in Luft, O_2 und N_2 annähernd richtig berechnet wird.

c) Das Ergebnis, daß sich für die ungeordnete Energie in dem Gebiet einsetzender Stoßionisation ein Wert von wenigen Volt ergibt, soll zum Abschluß mit folgender Abschätzung der Stoßionisierungsausbeute bei Annahme Maxwellscher Geschwindigkeitsverteilung verglichen werden. Berechnet man die Zahl der in der Zeiteinheit von einem Elektron gebildeten Ionenpaare, indem die Stoßzahl für Energien größer und gleich der Ionisierungsenergie aus einer Maxwell-Verteilung ermittelt wird und die Ionisierungswahrscheinlichkeit nach den Gesetzen der differentialen Ionisierung durch Elektronen zugrunde gelegt wird, so erhält man[1]):

$$\alpha/p = \frac{1200 \cdot a \cdot U_{th} \cdot U_i}{\pi \cdot \lambda_1 \cdot E/p} e^{-\frac{U_i}{U_{th}}} = \frac{1200 \cdot a \cdot U_i}{E\sqrt{2\pi\varkappa}} e^{-\frac{U_i}{U_{th}}}.$$

a = Konstante der differentialen Ionisierung, U_i = Ionisierungsspannung, U_{th} = ungeordnete Energie.

Für N_2 mit $a = 0{,}3$ (1/Volt · cm), $\lambda_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ cm, $E/p = 38$ Volt pro cm · Torr, $V_i = 15{,}8$ Volt, werden folgende Werte berechnet:

Tabelle 9. α/p-Wert, berechnet mit verschiedenen Werten der ungeordneten Energie.

U_{th} (Volt)	α/p $\left(\frac{1}{\text{cm Torr}}\right)$	α/p (Sollwert)
6	1500	
2	2,2	$7 \cdot 10^{-3}$
1	$5 \cdot 10^{-4}$	
$^1/_2$	10^{-11}	

[1]) Engel-Steenbeck, Gasentladungen I, S. 192.

Mithin würde eine Energie von wenig mehr als 1 Volt die richtige Größenordnung von α/p geben in Übereinstimmung mit obigen U-Werten. Ebenso geben die übrigen Gase, Sauerstoff mit seiner etwas geringeren Ionisierungsspannung inbegriffen, Werte um 1 Volt herum als ungeordnete Energie für die α/p-Werte der Tabelle 8. Der Wert der obigen Formel für α/p ist jedoch fraglich, da er unter der Voraussetzung einer sicher nicht vorhandenen Maxwell-Verteilung abgeleitet wurde. Abgesehen davon, daß schlecht abzuschätzen ist, wie groß der hiermit gemachte Fehler ist, darf der Wert der obigen Übereinstimmung wegen der starken Veränderbarkeit (s. Tabelle 9) der e-Funktion nicht allzu hoch veranschlagt werden.

Zusammenfassend können wir sagen, daß die Bestimmung der ungeordneten Energie aus Lawinengeschwindigkeit einerseits und Elektronendiffusion andererseits die für die beobachtete Stoßionisation erwarteten Zahlenwerte von wenigen Volt ergibt, und damit in großen Zügen die Richtigkeit der zugrundegelegten Vorstellungen über die Elektronenbewegung angenommen werden kann.

Herrn Dr. H. Raether danke ich für die Anregung der vorliegenden Arbeit und für seine Ratschläge, desgleichen Herrn Prof. H. Kulenkampff für sein Interesse und die Bereitstellung der Institutsmittel.

Jena, Physikalisches Institut.

Das Periodische System der Elemente nach Quantenzahlen in flächenhafter Darstellung.

Von W. Finke in Bremen.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 19. Juni 1943.)

Für den praktischen Gebrauch werden zwei Entwürfe in flächenhafter Darstellung, insbesondere ein Entwurf in Form eines Termschemas geboten.

Angeregt durch G. Haenzel[1]) veröffentlichte W. Finke[2]) in dieser Zeitschrift kürzlich ein Periodisches System nach Quantenzahlen, bei dem als Musterbeispiel ein dreidimensionales Modell in karthesisch-polarer Darstellung im Schrägbild gezeigt wurde. Eine derartige Dar-

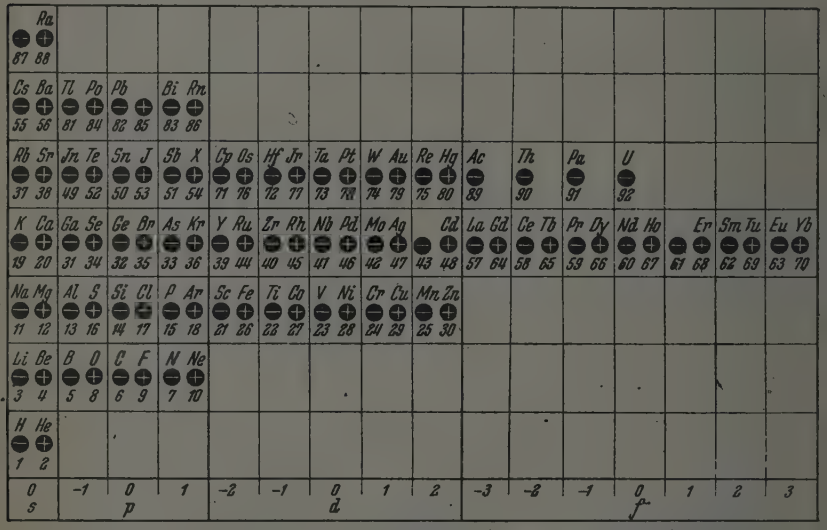


Fig. 1. Periodisches System nach Quantenzahlen, entsprechend der bisherigen langperiodischen Form.

stellung eignet sich wegen der zahlreichen Überschneidungen und fehlenden Namengebung weniger für den praktischen Gebrauch, z. B. im Hörsaal.

Als Ersatz dafür möge einmal die in Fig. 1 wiedergegebene flächenhafte Darstellung dienen, die etwa der bisherigen langperiodischen

[1]) G. Haenzel, ZS. f. Phys. 120, 283, 1943. — [2]) W. Finke, ebenda 121, 586, 1943.

Form nach Mendelejew und Lothar Meyer entsprechen dürfte. Ihr liegt die Vorstellung zugrunde, daß die 92 Elemente gleichsam einen Hochbau bewohnen, der sieben Stockwerke $K = 1$, $L = 2$, $M = 3$, $N = 4$, $O = 5$, $P = 6$ und $Q = 7$ (Hauptquantenzahl) besitzt. Jedes Stockwerk hat vier Flure $s = 0$, $p = 1$, $d = 2$ und $f = 3$ (Nebenquantenzahl) und in jedem Flur liegen sieben Zimmer -3, -2, -1, 0, $+1$, $+2$ und $+3$ (magnetische Bahnimpulsquantenzahl), die mit

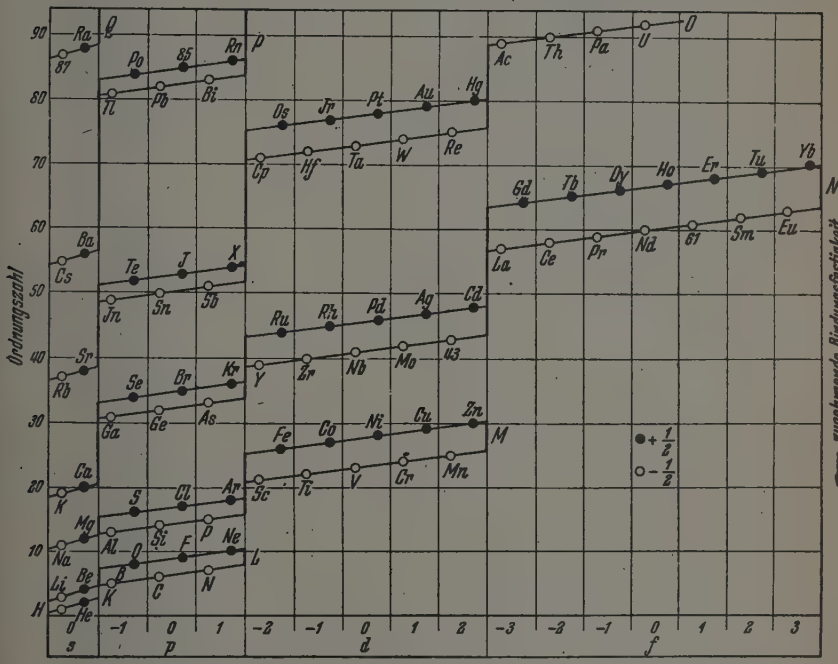


Fig. 2. Periodisches System nach Quantenzahlen in Anlehnung an ein Termschema.

je einem Elementenpaar der magnetischen Spinquantenzahl $\pm \frac{1}{2}$ belegt werden können. Von den somit verfügbaren 196 Zimmern sind nur 48 besetzt, so daß in unserer flächenhaften Darstellung mit nebeneinander gestellten Fluren seitlich Einsparungen vorgenommen werden konnten. Wenn auch dieser Entwurf 1 über die Gründe für die Sprünge im System, die die Periodizität bedingen, nichts aussagt, zeichnet er sich doch durch große Klarheit und Einfachheit aus.

In unserem zweiten Entwurf (Fig. 2) ist als Ordinate diesmal die Ordnungszahl Z von 1 bis 92 gewählt und dafür die Hauptquantenzahl gleichsam als Parameter geführt worden. Durch eine geeignete Linien-

führung konnten auch hier die einzelnen „Schalen" K bis Q kenntlich gemacht werden. Ein solcher Entwurf hat *energetische Vorzüge*. Er entspricht dem bekannten *Termschema*[3]), aus dem an der Staffelung der Terme zu ersehen ist, in welcher Reihenfolge die einzelnen Elektronen angelagert werden. Beim Kalium z. B. ist der tiefste Term ein 4 s-Term, so daß Kalium nicht in der M-Schale, sondern in dem tieferliegenden Teil der N-Schale einzugliedern ist. Das Scandium jedoch hat als Grundterm 3 d und setzt den weiteren Aufbau der M-Schale bis zum Zink fort. Dann liegt Gallium mit dem 4 p-Term am tiefsten usf. Da man die Ordnungszahlen bei der Beschriftung fortlassen kann, gewinnt dieser zweite Entwurf noch an Übersichtlichkeit; vielleicht gehört ihm die Zukunft gegenüber dem ersteren.

---

[1]) Handwörterbuch der Naturwissenschaften, 2. Aufl., VII, 786.

Koinzidenzmessungen an radioaktiven Natriumisotopen.

Von **H. Maier-Leibnitz** in Heidelberg.

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 4. August 1943.)

Die zeitliche Kopplung von β- und γ-Strahlen wurde bei Na^{22} und Na^{24} untersucht, wobei besonderer Wert auf quantitative Deutung der Messungen gelegt wurde. Bei Na^{22} sind alle Positronen mit der γ-Strahlung von 1,3 e-MV gekoppelt, die Häufigkeit beider ist innerhalb der Meßgenauigkeit gleich. Bei Na^{24} besteht dieselbe Kopplung zwischen β- und γ-Strahlen, doch werden außerdem bei jedem Zerfall mindestens zwei γ-Strahlen ausgesandt. Die Wärmetönung des Zerfalls muß danach bei etwa 5,4 e-MV liegen, in Übereinstimmung mit den Massenwerten des neuen Isotopenberichts von Flügge und Mattauch. Die Koinzidenzmessung ermöglicht bei beiden Strahlern eine einfache Bestimmung der Präparatstärke.

1. Einleitung. Bothe und v. Baeyer[1]) haben 1935 zum ersten Male die gleichzeitige Aussendung von verschiedenen Strahlenarten aus Atomkernen untersucht. Die seitdem ständig an Bedeutung gewinnende Koinzidenzmethode wurde von den meisten späteren Autoren auf die β- und γ-Strahlen angewandt, die beim radioaktiven Zerfall entstehen. Wenn beim β-Zerfall γ-Strahlung beobachtet wird, läßt sich die Energietönung des Übergangs meist nur durch Koinzidenzmessungen sicherstellen, wie das zuerst Bothe und Maier-Leibnitz[2]) beim RaC getan haben. Die Aufstellung eines Termschemas der Umwandlung ist bei β-Strahlern sehr erschwert durch die kontinuierliche Energieverteilung des β-Spektrums. Eine Aufteilung dieses Spektrums in Einzelspektren ist nur in Sonderfällen angenähert möglich und hat vielfach zu Fehlschlüssen Anlaß gegeben. Man ist daher auf Schlüsse aus den Energien und Intensitäten der γ-Strahlen angewiesen, die beide meist ungenau bekannt sind. Die Koinzidenzmethode ermöglicht dann eine unabhängige Prüfung eines Termschemas. Manchmal genügen qualitative Messungen über die Abhängigkeit der Koinzidenzhäufigkeit von der β-Energie oder über das Auftreten gleichzeitiger γ-Strahlen. Oft ist es aber auch notwendig, quantitative Beziehungen zu verwenden, wie das schon in den ersten Arbeiten[3]) mit Erfolg geschehen ist. Dabei spielt eine beherrschende Rolle die Kenntnis der Ansprechwahrschein-

---

[1]) W. Bothe u. H. J. v. Baeyer, Göttinger Nachr. II (N. F.). 1, 195, 1935; H. J. v. Baeyer, ZS. f. Phys. **95**, 417, 1935. — [2]) W. Bothe u. H. Maier-Leibnitz, ebenda **104**, 604, 1937. — [3]) H. J. v. Baeyer, l. c.; H. Maier-Leibnitz, ebenda **101**, 478, 1936.

lichkeit eines Zählrohrs für γ-Strahlen. Dieses Problem, das auch sonst von erheblicher Bedeutung ist, hat heute, vor allem durch Koinzidenzmessungen, eine gewisse Klärung gefunden [siehe die sorgfältige Diskussion bei Norling[1])]. Dabei hat sich der erste Ansatz von v. Baeyer und vor allem die von v. Droste[2]) aus seinen Messungen abgeleitete Formel gut bestätigt.

Die Zahl der radioaktiven Kerne, deren Umwandlungsschema gut bekannt ist, ist heute noch recht klein. Unter den künstlich aktiven Kernen, die mehrere γ-Linien besitzen, ist besonders gut Na^{24} untersucht. Neben Elektronen mit der maximalen Energie von 1,4 e-MV[3]) werden γ-Strahlen ausgesandt. Nach Messungen in der Wilsonkammer von Richardson und Kurie[4]) besteht die γ-Strahlung aus drei Linien mit den Energien 3,0; 2,04; 1,01 e-MV und den relativen Intensitäten 0,65; 0,95; 1,05. Es liegt nahe, die Energie der ersten Linie als die Summe der beiden anderen zu deuten. Es bestünden dann zwei angeregte Zustände von 3 e-MV und von 2 oder 1 e-MV. Unter Mitberücksichtigung der Intensitäten erhält man das in Fig. 1a gezeigte Umwandlungsschema. Es ist allerdings leicht möglich, kompliziertere Termschemata mit z. B. drei angeregten Termen aufzustellen, die innerhalb der Meßfehler mit den obigen Daten verträglich sind. In Fig. 1b ist ein solches Schema gezeigt, bei dem die Umwandlungsenergie um 1 e-MV erhöht ist. Es treten dann bei jedem Zerfall mindestens zwei Quanten auf. Der 4 e-MV-Übergang müßte dann mit einem Auswahlverbot behaftet sein, da eine solche γ-Linie nicht beobachtet wurde.

Gegen das einfache Schema wurden verschiedentlich experimentelle Gründe angeführt. Die Untersuchung der Form des β-Spektrums führte mehrere Autoren zu dem Schluß, daß es zwei oder drei Teilspektren geben sollte[5]), wogegen Feather und Dunworth[6]) aus Absorptions-

[1]) F. Norling, Ark. Mat. Astron. Fysik **27 A**, Nr. 27, 1941. — [2]) G. v. Droste, ZS. f. Phys. **100**, 529, 1936; **104**, 474, 1937. — [3]) Z. B. J. L. Lawson, Phys. Rev. **56**, 131, 1939; S. Kikuchi, Y. Watase, J. Itoh, E. Takeda u. S. Yamaguchi, Proc. Phys. Math. Soc. Japan (3) **21**, 381, 1939. — [4]) J. R. Richardson u. F. N. D. Kurie, Phys. Rev. **50**, 999, 1936; J. R. Richardson, ebenda **53**, 124, 1938. Damit in ungeklärtem Widerspruch steht eine Messung von Kikuchi und Mitarbeitern (l. c.), die γ-Energien von 2,97; 1,55; 0,8 e-MV angeben, sowie von S. C. Curran, P. J. Dee u. J. E. Strothers, Proc. Roy. Soc. London (A) **174**, 546, 1940, die 3,03; 2,0; 1,46 e-MV finden. Im Text soll wegen der Einfachheit des Ergebnisses von Richardson und Kurie formal an diesem festgehalten werden. Auf das Endergebnis hat diese Annahme, wie sich zeigen wird, kaum Einfluß. — [5]) A. Sugimoto, Nature **142**, 754, 1938; S. Kikuchi u. a., l. c. — [6]) N. Feather u. J. V. Dunworth, Proc. Cambr. Phil. Soc. **34**, 442, 1938.

messungen schlossen, daß es einheitlich sei. Koinzidenzmessungen von Langer, Mitchell und Mc Daniel[1]) erbrachten schließlich den Beweis für die Einfachheit des Spektrums. Dagegen führte die quantitative Auswertung von Koinzidenzhäufigkeiten[2]) [1]) zu Widersprüchen mit der Erwartung nach Fig. 1a, so daß die genannten Autoren ein Schema mit mehr als zwei angeregten Zuständen, etwa nach Fig. 1b, annehmen mußten. Feather und Dunworth glaubten außerdem gefunden zu haben, daß insgesamt mehr β- als γ-Übergänge stattfinden sollten.

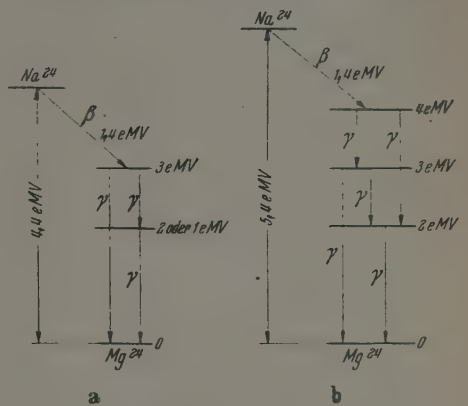


Fig. 1. Mögliche Umwandlungsschemata von Na^{24}.

Anläßlich anderer Untersuchungen bot sich die Gelegenheit, das Problem wiederaufzugreifen. Außerdem konnte noch Na^{22} (Halbwertszeit 3 Jahre) untersucht werden, das Positronen mit einer maximalen Energie von 0,6 e-MV[3]) und eine homogene γ-Strahlung von 1,3 e-MV aussendet[4]). Hier besteht die Frage, ob die γ-Strahlung zu dem Positronenübergang gehört, oder ob sie in Verbindung mit einem möglichen K-Einfang ausgesandt wird. Nach Berechnungen von Lamb[5]) sollte K-Einfang in erheblichem Umfang auftreten.

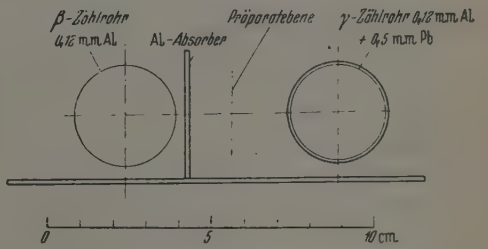


Fig. 2. Anordnung zur Messung von β-γ- und γ-γ-Koinzidenzen. Für letztere wird auch das β-Zählrohr mit 0,5 mm Blei umgeben. Zählrohrdurchmesser 28 mm, wirksame Länge 55 mm, Abstand der Achsen 65 mm.

2. Methodisches. Die Anordnung Fig. 2, die bei Na^{24} verwendet wurde, ist als Standardanordnung für solche Messungen gedacht. Das

[1]) L. M. Langer, A. C. G. Mitchell u. P. W. Mc Daniel, Phys. Rev. **56**, 962, 1939. — [2]) Siehe Anm. 6, S. 234. — [3]) L. J. Laslett, Phys. Rev. **52**, 529, 1937; C. Magnan, C. R. Séances Acad. Sci. Paris **205**, 1147, 1937. — [4]) F. Oppenheimer u. E. P. Tomlinson, Phys. Rev. **56**, 858, 1939. — [5]) W. E. Lamb, Phys. Rev. **50**, 388, 1936.

Präparat befindet sich in der Mitte zwischen zwei gleichen Zählrohren mit einer Wandstärke von 0,12 mm Aluminium. Zur γ-Zählung dienen zusätzliche Mäntel von 0,5 mm Blei.

Für die Koinzidenzmessung an den Positronen von Na^{22} wurde die Anordnung Fig. 3 gewählt, bei der das Entstehen falscher Koinzidenzen durch Vernichtungsstrahlung weitgehend vermieden ist. Die Zählrohre befinden sich in einem Magnetfeld von etwa 500 Gauss, so daß praktisch nur Positronen und ein kleiner Teil der γ-Strahlung das β-Zählrohr erreichen. Trotz des größeren Abstandes des Präparats ist die Ausschlagszahl im β-Zählrohr noch die Hälfte von der in der Standardanordnung. Die γ-Ausschlagszahl im γ-Zählrohr ist dagegen verdoppelt. Die Zählrohre waren dieselben wie in der Standardanordnung, so daß die Messungen leicht vergleichbar sind.

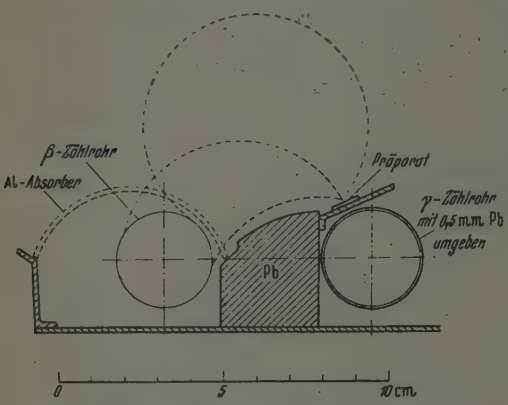


Fig. 3. Anordnung zur Messung von β-γ-Koinzidenzen im Magnetfeld. Das Magnetfeld steht senkrecht zur Zeichenebene.

Die Zählrohre sind mit Argon und Alkohol gefüllt, haben aber Hartgummistopfen und sind mit Pizein gekittet. Sie können also wohl nicht als Dampfzählrohre im Sinne von Trost[1]) angesehen werden. Auf die Verwendung in Glas eingeschmolzener Zählrohre wurde allgemein verzichtet, weil dadurch oft hinderliche Beschränkungen in bezug auf den erreichbaren Raumwinkel oder auf die Verwendbarkeit von Fenstern entstehen.

Beim Verstärker wurde zunächst die Schaltung von Neher und Harper[2]), später auch eine neue Schaltung verwendet, bei der die Einflußnahme vom Verstärker auf die Zählrohrentladung noch weiter getrieben ist. Diese Schaltung soll an anderer Stelle beschrieben werden. Zur Koinzidenzmischung diente die bekannte Schaltung von Rossi[3]). Zum Nachweis der Einzelausschläge konnte ein Untersetzer 1 : 16 eingeschaltet werden.

---

[1]) A. Trost, ZS. f. Phys. 105, 399, 1937. — [2]) H. V. Neher u. W. W. Harper, Phys. Rev. 49, 940, 1936. — [3]) B. Rossi, Nature 125, 636, 1930.

Zählrohre und Verstärker arbeiten einwandfrei bei einer Trennzeit für Einzelausschläge von 10^{-3} sec und für Koinzidenzen von 10^{-6} sec. Erst bei $2{,}5 \cdot 10^{-7}$ sec wird die Hälfte der zu erwartenden Koinzidenzen ausgelassen. Wird die Dauer der Einzelausschläge am Zählrohr wesentlich kürzer als 10^{-3} sec gewählt, so erhöht sich die Ausschlagszahl durch Nachentladungen, die durch den sehr schnell arbeitenden Untersetzer erkennbar sind. Mit der Anordnung Fig. 4 wurde in bekannter Weise gezeigt, daß der Nachweis der Koinzidenzen vollständig ist, keine falschen Einzelausschläge auftreten und daß die Zählrohre praktisch auf jedes β-Teilchen ansprechen. Bei einwandfreiem Arbeiten muß die Zahl der von dem β-Präparat herrührenden Ausschläge im zweiten Zählrohr gleich der Zahl der Koinzidenzen zwischen beiden Zählrohren sein. Dies war mit einer Genauigkeit von 5% der Fall.

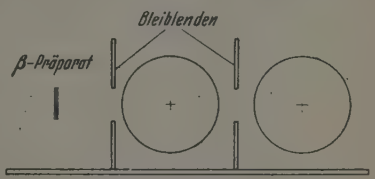


Fig. 4. Anordnung zur Prüfung des β-Nachweises in Zählrohren.

Die größten verwendeten Ausschlagshäufigkeiten lagen um 10000/min. Zählverluste entstanden nur durch die Länge der Ausschläge an den Zählrohren selbst. Sie wurden bei Einzelzählungen berücksichtigt. Für Koinzidenzzahlen je β-Ausschlag fallen die Verluste nicht ins Gewicht, da sich die Verluste an Koinzidenzen und an Einzelausschlägen fast völlig wegheben. Die Zufallskoinzidenzen wurden aus häufig durchgeführten Messungen der Auflösungszeit berechnet und ergaben nur kleine Korrektionen. Der Koinzidenznulleffekt durch Ultrastrahlung (etwa 0,1/min) hing etwas von der Absorberdicke zwischen den Zählrohren ab und wurde von Fall zu Fall bestimmt.

3. Messungen und Ergebnisse bei Na^{22}. Das Präparat, das ich der Freundlichkeit von Herrn Prof. Bothe verdanke, war ein Stück eines 2 Monate vorher mit Deuteronen bestrahlten Magnesiumblechs. Die Aktivität betrug etwa 0,5 Mikrocurie. Die β-γ-Koinzidenzen wurden in der Anordnung Fig. 3 bei verschiedenen Absorbern gemessen. Die Ergebnisse zeigt Fig. 5. Man sieht, daß die Positronen aller Energien gleichmäßig mit γ-Strahlen gekoppelt sind. Der geringe Koinzidenzeffekt, der nach Absorption der Positronen noch auftritt, ist dadurch zu erklären, daß die im Al-Absorber absorbierten Positronen noch zu einem kleinen Teil durch ihre Vernichtungsstrahlung, die im Absorber entsteht und im β-Zähler nachgewiesen wird, Koinzidenzen mit der Kern-γ-Strahlung erzeugen können.

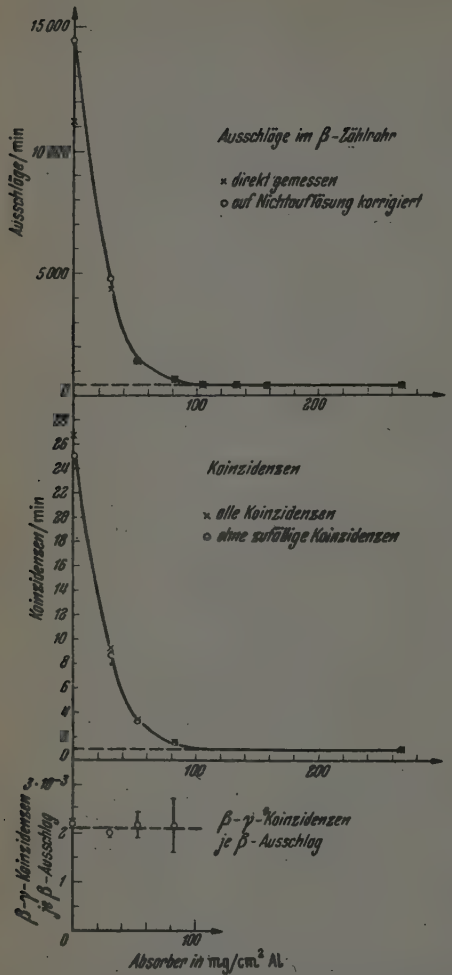


Fig. 5. Ergebnis der Messungen an Na^{22}. Oben: Ausschläge im β-Zählrohr. Mitte: Koinzidenzen zwischen den Ausschlägen des β- und des γ-Zählrohres. Unten: β-γ-Koinzidenzen je γ-Ausschlag.

Aus dem Ergebnis der Messung folgt für den Zerfall von Na^{22} das Schema, das in Fig. 6 gezeigt ist. Von einem möglichen K-Einfang ist dabei zunächst abgesehen. Die K-Strahlung könnte in unserer Anordnung nicht nachgewiesen werden. Die Energietönung der Umwandlung von Na^{22} in Ne^{22} beträgt danach $1{,}3 + 0{,}6 = 1{,}9$ e-MV. Durch dieses Ergebnis wird eine Korrektur der Massenwerte des Isotopenberichts von Flügge und Mattauch[1]) notwendig. Die Masse von Na^{22} ist dort aus der von Ne^{22} unter Berücksichtigung der Positronenenergie von 0,6 e-MV allein berechnet, sie muß nunmehr von 22,00032 auf 22,00172 erhöht werden.

Es besteht noch die Möglichkeit, daß außerdem bei einem K-Einfang zusätzliche γ-Strahlung ausgesandt wird. In diesem Fall würde mehr als ein γ-Strahl von 1,3 e-MV auf ein Positron kommen. Um dies zu entscheiden, ist eine quantitative Behandlung notwendig.

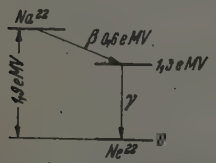


Fig. 6. Umwandlungsschema von Na^{22}.

Zunächst wurde durch einen Hilfsversuch der Anteil der Vernichtungsstrahlung an der Ausschlagszahl des γ-Zählers bestimmt.

Die γ-Ausschläge wurden in der Magnetfeldanordnung gemessen zu

$$Z_1 = 3979/\text{min}.$$

[1]) S. Flügge u. J. Mattauch, Phys. ZS. 44, 181, 1942.

Dann wurde das Präparat mit 1 mm Al abgedeckt, so daß die austretenden Positronen, deren Vernichtungsstrahlung bisher in größerer Entfernung entstand, nun zusätzliche Vernichtungsstrahlung am Ort des Präparats erzeugten. Die Ausschlagszahl erhöhte sich auf

$$Z_2 = 4639/\text{min}.$$

Schließlich wurde das γ-Zählrohr durch ein anderes ersetzt, das innen mit 0,1 mm Blei ausgekleidet war, also bei kleinen γ-Energien durch die Wirkung des Photoeffekts wesentlich empfindlicher sein sollte als das erste. Mit diesem Zählrohr wurde ebenfalls die Koinzidenzhäufigkeit bestimmt. Sie war um den Faktor 0,86 kleiner als beim Hauptversuch. Da die Vernichtungsstrahlung in der Magnetfeldanordnung nicht mit Positronen koinzidieren kann, ist also die Empfindlichkeit des zweiten Zählrohrs für Kerngammastrahlen um

$$m = 0{,}86$$

kleiner als die des ersten. Ferner wurden auch mit diesem Zählrohr die γ-Ausschläge ohne und mit Abdeckung des Präparats gemessen zu

$$Z_3 = 5513/\text{min}$$

und

$$Z_4 = 6913/\text{min}.$$

Die Zahlen sind auf Nichtauflösung korrigiert und vom Nulleffekt befreit. Zur Auswertung schreiben wir:

$$\begin{aligned} Z_1 &= y' + b\,x', \\ Z_2 &= y' + x', \\ Z_3 &= m\,y' + b\,l\,x', \\ Z_4 &= m\,y' + l\,x'. \end{aligned}$$

Dabei ist y' bzw. x' die Zahl der im ersten γ-Zählrohr von der Kerngammastrahlung bzw. von der gesamten Vernichtungsstrahlung erzeugten Ausschläge, b der Bruchteil der Positronen, der nicht aus dem Präparat austritt, und l das Empfindlichkeitsverhältnis des zweiten zum ersten Zählrohr für die Vernichtungsstrahlung. Durch Auflösen der Gleichungen ergeben sich die vier Unbekannten zu

$$\begin{aligned} y' &= 2326/\text{min}, \\ x' &= 2314/\text{min}, \\ b &= 0{,}71, \\ l &= 2{,}1. \end{aligned}$$

Die Genauigkeit dieser Zahlen dürfte etwa 15% betragen, wobei mögliche systematische Fehler mitberücksichtigt sind.

Das Ergebnis des Hilfsversuchs lautet: Die gesamte Vernichtungsstrahlung des Präparats erzeugt zufällig gerade ebensoviel γ-Ausschläge wie die Kerngammastrahlung. Ferner ist die Empfindlichkeit des innen mit 0,1 mm Blei ausgekleideten Zählrohrs für Vernichtungsstrahlung 2,1mal größer als die des normalen. Nach Norling ist die Empfindlichkeit eines reinen Bleizählrohres für Vernichtungsstrahlung etwa viermal größer als die eines Aluminiumzählrohrs, der beobachtete Wert ist also plausibel. Schließlich ergibt sich, daß etwa 30% aller Positronen, also 60% der in den äußeren Halbraum ausgesandten, aus dem Präparat austreten. Auch diese Zahl ist in vernünftiger Übereinstimmung mit einer rechnerischen Abschätzung aus der wirksamen Präparatdicke und dem Absorptionskoeffizienten der Positronen.

Zur weiteren Diskussion sind in Tabelle 1 die Meßergebnisse zusammengestellt. Die Zahlenwerte beziehen sich nicht mehr auf die Magnetfeldanordnung Fig. 3, sondern sind auf die Standardanordnung Fig. 2 umgerechnet, ohne Bleiauskleidung des γ-Zählrohrs.

Tabelle 1.

Ergebnis der Messung an Na^{22}, bezogen auf die Standardanordnung.

β-Ausschläge ohne Absorber	$z = 20300$/min
γ-Ausschläge von der Kerngammastrahlung	$y = 1086$/min
γ-Ausschläge von der gesamten Vernichtungsstrahlung (Präparat mit Al bedeckt)	$x = 1080$/min
Koinzidenzen ohne Absorber	$K = 19{,}9$/min
Koinzidenzen je gezählten β-Strahl	$K/z = 0{,}98 \cdot 10^{-3}$
Koinzidenzen je gezählten Kerngammastrahl	$K/y = 1{,}83 \cdot 10^{-2}$

Zur quantitativen Deutung machen wir Gebrauch von folgenden Annahmen, deren Richtigkeit in dieser Arbeit geprüft worden ist: 1. Die Ausschläge in den Zählrohren sollen nur von den β- oder γ-Strahlen erzeugt sein, frei von spontanen oder Nachentladungen. 2. Ausschläge zweier Zählrohre, die vom gleichen Elementarakt herrühren, sollen stets auch eine Koinzidenz erzeugen. 3. Es sollen keine Richtungsbeziehungen zwischen den verschiedenen Strahlenarten bestehen[1]).

Das Präparat möge in der Zeiteinheit N_k Kerngammastrahlen von 1,3 e-MV (allgemein ist N_k die Zahl der Zerfallsakte mit γ-Strahlung)

[1]) Siehe dazu die Messung bei Na^{24}.

und N_e Positronen aussenden. Dann ist die Zahl der von der Kerngammastrahlung erzeugten Ausschläge

$$y = p_k N_k$$

und die der β-Ausschläge

$$z = p_e N_e.$$

Dabei ist p_k bzw. p_e die Wahrscheinlichkeit, daß ein vom Präparat ausgehender Kerngamma- bzw. β-Strahl zu einem Ausschlag führt. Die Zahl der β-γ-Koinzidenzen wird

$$K = p_k p_e N_e$$

also die Koinzidenzzahl je β-Ausschlag

$$K/z = p_k.$$

Wir erhalten also als γ-Nachweiswahrscheinlichkeit unserer Anordnung für 1,3 e-MV den Wert $0{,}98 \cdot 10^{-3}$. Dieser Wert ist der Quotient zweier direkt gemessener Größen und ist daher recht zuverlässig. Ferner berechnet sich die Zahl der mit γ-Strahlung verbundenen Zerfallsakte (also einschließlich etwaiger K-Einfangprozesse mit γ-Strahlung) zu

$$N_k = y/p_k = 1{,}1 \cdot 10^6/\text{min}.$$

Bei β-Strahlern, die gleichmäßig mit γ-Strahlung gekoppelt sind, liefert die Koinzidenzmessung also die absolute Präparatstärke auf einem einfachen Weg[1]), der hier nur durch die notwendige Berücksichtigung der Vernichtungsstrahlung etwas komplizierter ist. Bei dieser Berechnung muß angenommen werden, daß alle Kerngammastrahlen, die von verschiedenen Stellen oder aus verschiedener Tiefe des Präparats ausgehen, die gleiche Chance haben, im γ-Zählrohr nachgewiesen zu werden. Dagegen ist eine solche Annahme nicht nötig für die β-Strahlen. Die verschiedene Absorption der β-Strahlen usw. braucht also nicht berücksichtigt zu werden, und es ist gleichgültig, ob β-Strahlen im Präparat stecken bleiben. Es ergibt sich umgekehrt die mittlere β-Nachweiswahrscheinlichkeit zu

$$p_e = (K/y)\,(N_k/N_e) = 1{,}83 \cdot 10^{-2}\, N_k/N_e.$$

Eine direkte Abschätzung der β-Nachweiswahrscheinlichkeit p_e aus dem Raumwinkel und der Absorption im Präparat und in der Zähl-

[1]) Das Prinzip, das diesem Verfahren zugrundeliegt, ist wohl zuerst von H. Geiger und A. Werner, ZS. f. Phys. 21, 187, 1924, bei Szintillationszählungen von α-Strahlen angewandt worden.

rohrwand ergab den Wert $2{,}4 \cdot 10^{-2}$ als obere Grenze. Der wirkliche Wert wird noch etwas darunter liegen. Dieses Ergebnis paßt gut zu der Annahme $N_k/N_e = 1$. Innerhalb der Meßgenauigkeit ist also die Zahl der γ-Strahlen gleich der der Positronen, es ist nicht notwendig, die Aussendung von γ-Strahlung bei einem eventuellen K-Einfang anzunehmen. Eine weitere Stütze dieses Ergebnisses liefert die Nachweiswahrscheinlichkeit für die Vernichtungsstrahlung, die sich ebenfalls aus den Messungen ergibt. Wenn gleich viele Positronen wie Kerngammastrahlen ausgesandt werden, so kommen auf jedes Kerngammaquant zwei Vernichtungsquanten. Da nun die Vernichtungsstrahlung gerade ebenso viele Ausschläge machte wie die Kerngammastrahlung (s. oben), erhält man als Nachweiswahrscheinlichkeit für ein Vernichtungsquant $p_v = \frac{1}{2} p_k$ oder

$$p_v = 0{,}49 \cdot 10^{-3}.$$

Für das innen mit 0,1 mm Blei ausgekleidete Zählrohr ergibt sich das 2,1fache dieses Wertes, also $1{,}03 \cdot 10^{-3}$. Diese Zahlen sind etwa gleich dem halben bzw. dem ganzen Wert der Nachweiswahrscheinlichkeit für 1,3 e-MV. Nach Norlings Kurven kann die Empfindlichkeit für 0,5 e-MV höchstens (nämlich für ein reines Bleizählrohr) gleich der für 1,3 e-MV sein. Wollte man annehmen, daß mehr Kerngammastrahlen als Positronen ausgesandt werden, so ergäben sich höhere Werte von p_v und damit ein Widerspruch zu der Empfindlichkeitskurve.

Oppenheimer und Tomlinson (l. c.) haben in ihrer kurzen Notiz aus dem Vergleich der Vernichtungs- und Kerngammastrahlung ebenfalls geschlossen, daß etwa ebenso viele Positronen wie Kerngammastrahlen ausgesandt werden.

4. Na^{24}. Die Präparate waren dünne Schichten von NaCl oder NaF, die an der Hochspannungsanlage des Instituts mit Deuteronen von etwa 900 kV bestrahlt waren[1]). Die Anfangsaktivität betrug bei den stärksten Präparaten etwa 1 Mikrocurie.

Die Messungen wurden in der Standardanordnung Fig. 2 ausgeführt. Zunächst wurden die β-Ausschläge und die Koinzidenzhäufigkeit bei verschiedenen Absorbern vor dem β-Zählrohr bestimmt; beide nahmen mit wachsender Absorberdicke ab, um nach Absorption aller β-Strahlen

[1]) Die Bestrahlung der Präparate haben Dr. Gentner und Dr. Gehlen freundlicherweise für mich vorgenommen, wofür ich ihnen herzlich danke.

fast konstant zu bleiben. Der absorbierbare Anteil entspricht Koinzidenzen zwischen β- und γ-Strahlen, während der praktisch konstante Untergrund γ-γ-Koinzidenzen zugeschrieben werden muß. Für zufällige und Ultrastrahlkoinzidenzen mußten nur kleine Korrekturen angebracht werden. Das Verhältnis der β-γ-Koinzidenzen zu den β-Ausschlägen ist für alle Absorberdicken konstant (Fig. 7). Es sind also alle Elektronen gleichmäßig mit γ-Strahlen gekoppelt in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Langer, Mitchell und McDaniel. Dieses Resultat wurde auch noch bei sehr kleinen Absorberdicken bestätigt, indem das β-Zählrohr durch einen Fensterzähler mit einem frei gespannten Glimmerfenster 16 · 60 mm von 2,3 cm Luftäquivalent ersetzt wurde.

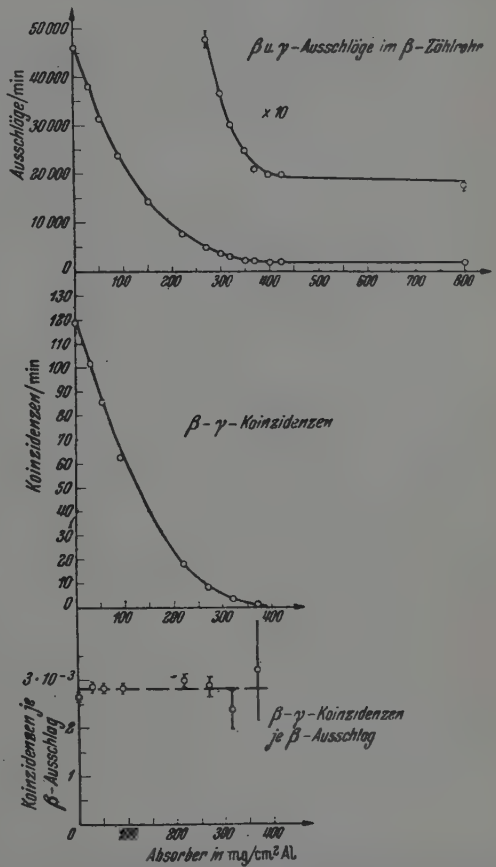


Fig. 7. Messungen an Na^{24}. Oben: Ausschläge im β-Zählrohr. Mitte: β-γ-Koinzidenzen (ohne γ-γ-Koinzidenzen). Unten: β-γ-Koinzidenzen je β-Ausschlag.

Die Koinzidenzen zwischen γ-Strahlen wurden außerdem noch gesondert gemessen, indem beide Zählrohre mit 0,5 mm Blei umgeben wurden. Dabei wurde der Nulleffekt einschließlich der zufälligen Koinzidenzen gesondert bestimmt, indem nach Entfernung der Strahlenquelle durch ein genügend entferntes Hilfspräparat die Einzelausschläge auf die alte Höhe gebracht wurden. Er betrug nur einen kleinen Bruchteil der wahren Koinzidenzen.

Die quantitativen Ergebnisse, bezogen auf gleiche Anfangsaktivität, sind in Tabelle 2 zusammengefaßt.

Tabelle 2. Ergebnis der Messung an Na^{24}, bezogen auf gleiche Anfangsaktivität der Präparate.

β-Ausschläge ohne Absorber	46000/min
γ-Ausschläge	1460/min
β-γ-Koinzidenzen	129/min
β-γ-Koinzidenzen je β-Ausschlag	$2{,}8 \cdot 10^{-3}$
β-γ-Koinzidenzen je γ-Ausschlag	0,088
γ-γ-Koinzidenzen	25/min
γ-γ-Koinzidenzen je γ-Ausschlag eines Zählrohrs	$1{,}71 \cdot 10^{-3}$

In einer besonderen Anordnung wurde, ähnlich wie bei Kikuchi und Mitarbeitern[1]), geprüft, ob eine Winkelabhängigkeit der γ-Strahlung besteht. Sowohl bei β-γ-Koinzidenzen wie bei γ-γ-Koinzidenzen ergab sich für einen Winkel zwischen den Zählern von 180 und von 90° innerhalb des Fehlers von etwa 5% dasselbe Resultat. Eine erhebliche Winkelabhängigkeit ist also sicher nicht vorhanden, zwischen β- und γ-Strahlen war sie auch nicht zu erwarten.

Wenn wir die bei Na^{22} gemessene γ-Empfindlichkeit für 1,3 e-MV als Bezugswert benutzen, um mit Hilfe der von Norling für Bleizähler gegebenen Empfindlichkeitskurve die Ansprechwahrscheinlichkeit der Standardanordnung für die verschiedenen γ-Strahlen von Na^{24} zu berechnen, so erhalten wir

$$1{,}0\text{ e-MV}: \; p_1 = 0{,}68 \cdot 10^{-3},$$
$$2{,}0\text{ e-MV}: \; p_2 = 1{,}42 \cdot 10^{-3},$$
$$3{,}0\text{ e-MV}: \; p_3 = 2{,}00 \cdot 10^{-3}.$$

Die Empfindlichkeit ändert sich in diesem Bereich fast linear mit der γ-Energie.

Wenn das einfache Schema Fig. 1a gilt, so läßt sich die Zahl der zu erwartenden Koinzidenzen berechnen (Formeln bei Maier-Leibnitz, l. c.). Man erhält für die β-γ-Koinzidenzhäufigkeit je β-Ausschlag $2{,}0 \cdot 10^{-3}$. Der gemessene Wert ($2{,}8 \cdot 10^{-3}$) ist etwas höher. Die Zahl der γ-γ-Koinzidenzen je γ-Ausschlag sollte, da praktisch $p_3 = p_1 + p_2$ ist, gleich $\alpha \cdot 0{,}93 \cdot 10^{-3}$ sein, wo α der Bruchteil der Übergänge ist, bei denen zwei γ-Quanten ausgestrahlt werden. Nach den Intensitäten der γ-Linien von Richardson und Kurie wäre $\alpha = 0{,}61$, damit die

[1]) S. Kikuchi, Y. Watase u. J. Itoh, ZS. f. Phys. **119**, 185, 1942.

Koinzidenzzahl $0{,}56 \cdot 10^{-3}$ statt der gemessenen $1{,}73 \cdot 10^{-3}$. Die Diskrepanz liegt weit außerhalb aller möglichen Fehler. Sie ist auch durch die Annahme eines anderen Verlaufs der γ-Empfindlichkeit mit der Energie nicht zu beseitigen. Damit könnte man wohl das Ergebnis der β-γ-Koinzidenzmessung erklären, nicht aber das Verhältnis der β-γ- und γ-γ-Koinzidenzhäufigkeiten, das experimentell gut gesichert ist. Selbst bei der extremen Annahme, daß die Empfindlichkeit für alle Energien gleich ist, ergibt sich die Häufigkeit der γ-γ-Koinzidenzen relativ zu der β-γ-Koinzidenzhäufigkeit kleiner als beobachtet.

Das Schema Fig. 1a ist also unvereinbar mit dem Ergebnis der Koinzidenzmessungen. Es müssen mehr γ-Aussendungen in zwei oder mehr Stufen vorkommen. Legt man das Schema Fig. 1b zugrunde und verteilt die Übergangswahrscheinlichkeiten entsprechend den gemessenen Intensitäten der γ-Linien, so ergibt die Rechnung

für die β-γ-Koinzidenzen je β-Ausschlag: $2{,}75 \cdot 10^{-3}$,
für die γ-γ-Koinzidenzen je γ-Ausschlag: $1{,}26 \cdot 10^{-3}$.

Diese Werte stimmen wesentlich besser mit den gemessenen überein. Eine ähnliche Übereinstimmung könnte man auch mit den von den anderen Autoren gemessenen γ-Energien erreichen. Man wird mit einem Termschema, bei dem die γ-Energie pro Zerfall etwa 4 e-MV beträgt, immer zu einer angenäherten Übereinstimmung kommen. Für Einzelheiten in der Verteilung der Terme ist die Koinzidenzmethode nicht empfindlich. Noch besser würde allerdings ein Schema zu unserem Ergebnis passen, bei dem die γ-Energie pro Zerfall noch etwas höher als 4 e-MV liegt; doch genügt wohl die Sicherheit der Methode nicht ganz, um dies zu fordern. Auf keinen Fall jedoch ist es möglich, mit irgendeinem Schema auszukommen, das diese Energie bei 3 e-MV beläßt.

Dies ist das wichtigste Ergebnis der Koinzidenzmessung. Die Energietönung des Zerfalls von Na^{24} in Mg^{24} kann nicht $3{,}0 + 1{,}4$ e-MV, sondern muß etwa $4{,}0 + 1{,}4 = 5{,}4$ e-MV betragen. Dies ist in voller Übereinstimmung mit dem Isotopenbericht von Flügge und Mattauch[1]), wo sich in diesem Jahr von ganz anderen Gesichtspunkten aus für die Wärmetönung der Wert 5,28 e-MV ergab.

Auch mit den Koinzidenzmessungen der anderen Autoren besteht in diesem Punkt Übereinstimmung. Langer, Mitchell und McDaniel haben die β-γ- und die γ-γ-Koinzidenzen gemessen und erhalten die Werte $3{,}0 \cdot 10^{-3}$ und $1{,}72 \cdot 10^{-3}$. Ihr Verhältnis stimmt mit dem

[1]) S. Flügge u. J. Mattauch, l. c.

unserer Werte $2{,}8 \cdot 10^{-3}$ und $1{,}7 \cdot 10^{-3}$ gut überein. Reduziert man ihre Ergebnisse auf die Geometrie unseres Versuchs, was allerdings nur angenähert möglich ist, da sie sehr ausgedehnte Quellen verwandt haben, und berücksichtigt man den geringen von Norling angegebenen Empfindlichkeitsunterschied zwischen Aluminium- und Bleizählrohren, so erhält man die Werte $2{,}4 \cdot 10^{-3}$ und $1{,}4 \cdot 10^{-3}$. Die Ergebnisse stimmen also auch in den Absolutwerten befriedigend überein. Allerdings haben Langer, Mitchell und McDaniel bei der weiteren Auswertung angenommen, daß die γ-Empfindlichkeit ihrer Zähler nicht von der γ-Energie abhängen soll.

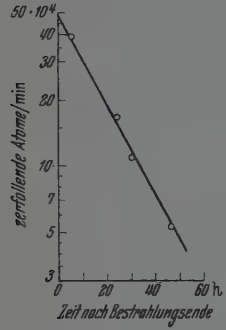


Fig. 8. Präparatstärke eines abfallenden Na^{24}-Präparats, gemessen mit Koinzidenzen. Die eingezeichnete Gerade entspricht der bekannten Halbwertzeit von 14,8 h.

Feather und Dunworth haben nur γ-γ-Koinzidenzen gemessen. Die Umrechnung ihres Wertes von $2{,}6 \cdot 10^{-3}$ auf unsere Anordnung ergibt $1{,}44 \cdot 10^{-3}$, also wieder einen Wert, der befriedigend mit unseren Messungen übereinstimmt. Die Empfindlichkeitskurve, die sie selbst verwandt haben, scheint allerdings zu stark von der Energie abzuhängen. Vielleicht hängt damit zusammen, daß sie bei weiteren kurz angedeuteten Messungen gefunden zu haben glauben, daß die Zahl der γ-Strahlen nicht zu der Zahl der β-Strahlen paßt, sondern daß von letzteren zu viele ausgesandt werden sollen. Aus unseren Messungen ergibt sich für die β-Nachweiswahrscheinlichkeit der Wert 0,089, wenn alle Elektronen mit γ-Strahlen gekoppelt sind. Davon wird der Faktor 0,1 vom Raumwinkel erklärt. Der restliche Unterschied gegen 1 erklärt sich zwanglos durch das Gegeneinanderwirken der Absorption in der Zählrohrwand und der Rückstreuung von der Präparatunterlage. Es ergibt sich also aus unseren Messungen, im Gegensatz zu Feather und Dunworth, kein Grund zu der Annahme, daß ein Teil der Elektronen nicht mit γ-Strahlen gekoppelt ist.

Die absolute Präparatstärke ergibt sich wieder aus den β- und γ-Ausschlägen und den β-γ-Koinzidenzen, ganz ähnlich wie bei Na^{22}. In Fig. 8 ist die Messung der Stärke eines Präparats während seiner Abklingung dargestellt. Bei jedem Punkt wurden die Einzelausschläge und die Koinzidenzen gemessen und daraus die Präparatstärke berechnet. Die Kurve gibt einen Eindruck von der Zuverlässigkeit der Methode.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

Zur Untersuchung von Koinzidenzen an β- und γ-Strahlen radioaktiver Körper werden zwei Anordnungen verwandt, davon eine mit Magnetfeld (Ziffer 2). Es wurden die Kerne Na^{22} und Na^{24} untersucht mit folgenden Ergebnissen:

1. Bei Na^{22} (Ziffer 3) sind alle β-Strahlen gleichmäßig mit γ-Strahlen gekoppelt. Das β-Spektrum ist also einfach.

2. Die Zahl der β-Strahlen ist merklich gleich der Zahl der γ-Strahlen.

3. Die Energietönung der Umwandlung von Na^{22} in Ne^{22} ergibt sich daraus zu 1,9 e-MV, die Masse von Na^{22} wird aus der von Ne^{22} neu berechnet.

4. Falls Na^{22} häufig K-Einfang zeigen sollte, ist dieser nicht merklich mit γ-Strahlung gekoppelt.

5. Bei Na^{24} (Ziffer 4) sind ebenfalls alle β-Strahlen gleichmäßig mit γ-Strahlen gekoppelt, und das β-Spektrum ist einfach.

6. Aus der großen Häufigkeit gleichzeitig ausgesandter γ-Strahlen ergibt sich, daß beim Zerfall von Na^{24} mindestens drei Anregungszustände des entstehenden Mg^{24} vorkommen, und daß bei jedem Zerfall mindestens zwei gleichzeitige γ-Quanten ausgesandt werden.

7. Die Energietönung der Umwandlung von Na^{24} muß danach mindestens etwa 5,4 e-MV betragen.

8. Bei diesen Messungen ergeben sich Aussagen über die absoluten Stärken der aktiven Präparate und über die Ansprechwahrscheinlichkeiten der verwandten β- und γ-Zählrohre.

Herrn Prof. Bothe danke ich herzlich für sein Interesse an dieser Untersuchung.

Heidelberg, Institut für Physik am Kaiser Wilhelm-Institut für medizinische Forschung. Juli 1943.

Untersuchung elektrolytisch polierter Metallflächen mittels Elektroneninterferenzen.

Von **W. Kranert, K. H. Leise** und **H. Raether** in Jena.

Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 15. September 1943.)

Mittels Elektroneninterferenzen werden „elektrolytisch polierte" Metallflächen (ein- und vielkristallines Material) untersucht. Wird eine Metallfläche als Anode in einen je nach Metall verschiedenen Elektrolyten getaucht, so findet bei bestimmten elektrischen Bedingungen eine bevorzugte elektrolytische Abtragung der höchsten Erhebungen (Spitzen, Zacken usw.) der Metallfläche statt (anodisches Polieren oder Glänzen, Verfahren von Jacquet), wodurch das hervorragende optische Reflexionsvermögen dieser Flächen erzeugt wird. Es tritt also eine Einebnung der Fläche ein, die im Gegensatz zur mechanischen Politur ohne Verformung der obersten Metallschichten (quasiflüssige Oberflächenschicht oder Beilby-Schicht) vor sich geht. Das Interferenzbild dieser Flächen zeigt im Falle polykristallinen Metalls ein in Punkte aufgelöstes Pulverdiagramm, im Falle eines Einkristalls ein Einkristalldiagramm, d. h. die durch die Bearbeitung (Herausschneiden der Metallflächen) entstandene verformte Schicht wird entfernt und das ungestörte Gefüge kommt zum Vorschein. Charakteristisch für das Interferenzbild einer elektrolytischen Politur ist jedoch, daß die Reflexe eine „Schwänzung" zeigen, d. h. eine strichartige Verlängerung, die von der Stelle normaler Braggscher Reflexion ausgehend sich nach kleineren Winkeln erstreckt. Diese Erscheinung ist auf eine Brechung des Elektronenstrahls beim Eintritt in die Kristalloberfläche zurückzuführen, die infolge der starken Einebnung der Metallfläche [kleiner Winkel zwischen Kristalloberfläche und reflektierender Netzebene (Dachwinkel)] merklich wird. Dabei deuten die zu Strichen auseinandergezogenen Reflexe auf eine Oberfläche mit sanft gewellten Kuppen hin. Eine genauere Berechnung des Zusammenhangs zwischen dem Dachwinkel und der Verschiebung der Reflexe nach kleineren Winkeln ergibt bei den untersuchten Flächen für den *mittleren* Dachwinkel einen Wert von wenigen Grad. Während also, wie das Interferenzbild zeigt, bei der elektrolytischen Politur die herausstehenden Oberflächenteile bevorzugt elektrolytisch abgetragen und dabei abgerundet werden, wird bei der mechanischen Politur die Fläche dadurch geglättet, daß die Spitzen und Zacken unter dem Druck der mechanischen Bearbeitung in die benachbarten Vertiefungen abgleiten, wodurch eine verformte Oberflächenschicht erzeugt wird. — Anhangweise wird über einige Versuche berichtet, in denen die Veränderung des Oberflächenprofils von Kupferflächen durch elektrolytische Anätzung untersucht wird, wofür sich elektrolytisch polierte Ausgangsflächen besonders eignen, da eine geringe Vergrößerung des Dachwinkels, d. h. eine Aufrauhung der Fläche, eine Schrumpfung der Reflexlänge zur Folge hat. Es zeigt sich, daß mit Salzsäure eine Abtragung bis zu etwa 100 Å, mit Orthophosphorsäure eine solche bis zu etwa 1000 Å ohne merkliche Veränderung des Interferenzbildes vor sich geht, d. h. nahezu gleichmäßig erfolgt, darüber hinaus ziehen sich die Reflexe allmählich zu Punkten zusammen, d. h. die Fläche wird merklich rauher.

Einleitung.

Von P. Jacquet[1]) wurde ein Verfahren angegeben, um auf elektrolytischem Wege Metallflächen zu „polieren", d. h. der Oberfläche einen hohen Glanz zu verleihen. Das zu polierende oder zu „glänzende" Metall wird hierzu, nachdem es durch feines Schmirgeln von Verschmutzungen und gröbsten Unebenheiten befreit worden ist, als Anode in einen geeigneten Elektrolyten gestellt und unter bestimmten elektrischen Bedingungen abgetragen. Es entsteht eine glänzende Fläche, deren optisches Reflexionsvermögen das einer mechanisch polierten sogar übertrifft[2]). Von Jacquet wurde angenommen, daß durch besondere Verhältnisse vor der Anode vorzugsweise ihre höchsten Erhebungen abgetragen werden und dadurch die Oberfläche eingeebnet wird[3]). Dieses Verfahren hat seine Bedeutung in der Metalluntersuchung (Bloßlegung des Gefügebildes) sowie in der Metallverarbeitung (Glänzen kleiner Gegenstände und schwer zugänglicher Stellen).

Von besonderem Interesse ist es nun, diese „anodisch polierten" Metallflächen mittels Elektroneninterferenzen auf ihre Mikrostruktur hin zu untersuchen, da bei diesem Verfahren eine Einebnung der Fläche stattfindet, ohne daß gleichzeitig eine mechanische Verformung des Gefüges eintritt, die die obersten Schichten in eine äußerst feinkristalline, „quasiflüssige" Schicht verwandelt[4]).

Herstellung der Polituren.

Es wurden Kupfer, Zink, Eisen, Aluminium und Blei untersucht, sowohl als Einkristall wie als Vielkristall. Die Herstellung der Polituren geschah nach den von Jacquet gegebenen Vorschriften, die nach unseren Erfahrungen und denen anderer Autoren als die günstigsten bestätigt wurden. Die Ausgangsflächen wurden jeweils sorgfältig, zuletzt mit 5/0 Papier, geschmirgelt und in den Elektrolyten getaucht. Z. B. diente im Falle von Kupfer Orthophosphorsäure vom spez. Gewicht 1,36 als Polierelektrolyt. Es wurde bei einer Stromdichte von 0,03 bis 0,08 A/cm² und einer von 0,4 bis 1,9 Volt wachsenden Spannung

[1]) P. Jacquet, C. R. **201**, 1473–1475, 1935; La Technique Moderne **31**, 561, 596, 1939; siehe auch P. Schafmeister u. K. E. Volk, Technische Mitteilungen, Krupp, **15**, 279, 1941 (Gute Zusammenfassung). — [2]) L. Capdecomme u. P. Jacquet, C. R. **204**, 1415, 1937. [3]) Hierzu auch W. Engelhardt, Metallwirtschaft **20**, 349, 1941. [4]) H. Raether, ZS. f. Phys. **86**, 82, 1933; R. C. French, Proc. Roy. Soc. London (A) **140**, 637, 1933; vgl. auch W. Kranert u. H. Raether, Ann. d. Phys. im Druck.

poliert. Die besten Polituren wurden in einer Apparatur ähnlich der von Engelhardt[1]) verwendeten erzielt, vor allem, wenn der Elektrolyt (H_3PO_4) bereits vom Gebrauch blau gefärbt war, also Kupfer gelöst enthielt. Bei Zink lagen die Verhältnisse für die Auswertung der Interferenzbilder insofern günstig, als der Ausgangskristall nach (001) spaltbar ist, mithin eine definierte Ausgangsfläche bietet. Leider ergab jedoch das Interferenzbild der mittels Kalilauge hergestellten, sehr gut gelungenen Polituren im allgemeinen das Pulverdiagramm nichtidentifizierbarer Verunreinigungen (Zinkhydroxyd ?). Trotz vieler Versuche, durch geeignete Nachbehandlung die Fläche zu säubern, gelang es nur in wenigen Fällen, geschwänzte Zinkreflexe zu erhalten, so daß wir uns mit diesem Befund begnügen mußten. Für Eisen und Aluminium wurde nach Jacquet als Elektrolyt eine Mischung von Überchlorsäure (spez. Gewicht 1,48) und Essigsäureanhydrid (1 : 4) verwendet, für Blei hingegen erwies sich eine gegenüber der Literaturangabe etwas abgeänderte Zusammensetzung des Elektrolyten als vorteilhaft (359 cm³ Überchlorsäure, 641 cm³ Essigsäureanhydrid; 3 cm Elektrodenabstand; Anfangsspannung 4 bis 6 Volt bei 600 bis 780 mA/cm²; nach Einschalten steigt die Spannung bei sinkendem Strom und erreicht nach 1 bis 2 min einen konstanten Wert. Der Politurvorgang ist mit dem Verschwinden der dunklen Schicht, die beim Einschalten vom Rande her den Stempel überzieht, in 15 bis 40 sec beendet[2]). Leider läuft die hochglänzende Bleifläche schnell an, in Luft rascher als unter Wasser und Alkohol. — Nach dem Abschalten der Spannung wurden die Proben sofort herausgenommen, mit Wasser und Alkohol gespült, im Preßgasstrom (Stickstoff oder Wasserstoff) getrocknet und untersucht.

Es zeigte sich im allgemeinen, daß an Einkristallflächen bessere Polituren erhalten wurden als an vielkristallinen Flächen.

Benutzt man als Ausgangsfläche bereits eine elektrolytisch polierte Fläche, so wird die Politur nicht verbessert, wie man meinen könnte, sondern verschlechtert. Am günstigsten ist die Verwendung einer sorgfältig mechanisch polierten Ausgangsfläche; gute Polituren werden aber auch erhalten, wenn man von fein geschmirgelten, also rauhen Flächen ausgeht.

---

[1]) W. Engelhardt, l. c. — [2]) Nach Versuchen von stud. J. Eggert und stud. H. Schäfer im hiesigen Institut.

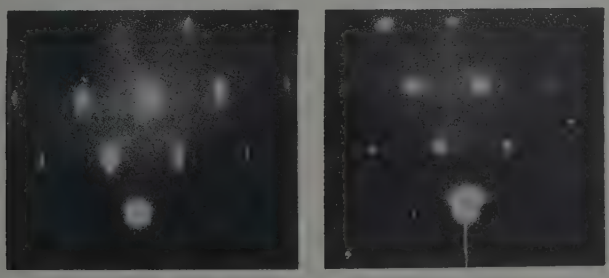
Ergebnisse.

Die Interferenzbilder an elektrolytisch polierten Flächen zeigen ein charakteristisches Aussehen: Die polykristallinen Flächen liefern ein in Punkte aufgelöstes Debye-Scherrer-Diagramm, die eine Verlängerung („Schwänzung") nach kleineren Winkeln senkrecht zur Oberfläche aufweisen. Das obere Ende des Reflexes liegt am Ort der normalen Pulverringe. Fig. 1a ist das Interferenzbild einer sehr gut

a b

Fig. 1. a) Elektroneninterferenzbild einer elektrolytisch polierten, vielkristallinen Kupferfläche. Charakteristisch ist die Auflösung der Pulverringe in einzelne „geschwänzte" Reflexe. b) Interferenzbild wie a), weniger gute Politur.

polierten, Fig. 1b dagegen einer weniger gut polierten Vielkristallfläche von Kupfer. Die mikroskopische Betrachtung der in Fig. 1b gegebenen Fläche zeigt Narben, die infolge Blasenbildung (Sauerstoffabscheidung) an der Anode entstanden sind, während eine gut polierte Fläche eine nahezu gleichmäßig helle, kontrastarme Oberfläche zeigt. Fig. 2a wurde an einer polierten Kupfer-Einkristallfläche hergestellt. Im Gegensatz hierzu steht Fig. 2b, die das Interferenzbild eines mit $(NH_4)_2S_2O_8$



a b

Fig. 2. a) *Elektrolytisch polierter* Kupfereinkristall. Schwänzung der Reflexe infolge Brechung der Elektronenwelle beim Eintritt in den Kristall. b) *Angeätzter* Kupfereinkristall. Die Reflexe sind rund, da dünne Einkristallzacken durchgestrahlt werden.

angeätzten Kupfereinkristalls zeigt und als Durchstrahlungsbild dünner Einkristallblöcke, die beim Ätzen stehengeblieben sind, zu deuten ist. Auch hier fällt die polierte Fläche durch die „Schwänzung" der Interferenzpunkte auf. Fig. 3, ebenfalls von einer Einkristallfläche stammend, zeigt obendrein Kikuchi-Linien. Ähnliche Interferenzbilder erhält man an elektrolytisch polierten Al-, Fe- und Pb-Einkristallen und Vielkristallen, so daß auf eine Wiedergabe der Bilder verzichtet werden kann.

An elektrolytisch polierten Kupferflächen ist die Beobachtung erwähnenswert, daß in einer Reihe von Fällen auf Grund des Interferenzbildes Kupferoxydul auf der (100)-Kupferfläche festgestellt wurde, und zwar gewöhnlich mit

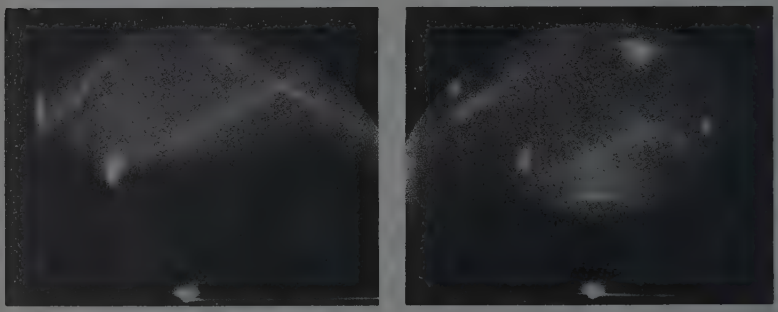


Fig. 3. Elektrolytisch polierter Kupfereinkristall. Neben den geschwänzten Reflexen treten Kikuchi-Linien auf.

ausgeprägter Faserstruktur nach (111), seltener nach (100) oder unorientiert. Die Versuchsbedingungen für das Auftreten von Oxydul konnten nicht erkannt werden[1]). Das Auftreten einer reinen Kupferfläche halten wir jedoch für die normale Folge einer elektrolytischen Politur und das Entstehen von Oxydul als Wirkung ungünstig gewählter Bedingungen. Im übrigen kann man die nur einige 10 Å dicke Oxydulschicht leicht durch kurzes Anätzen in Phosphorsäure beseitigen, ohne die Güte der darunterliegenden polierten Kupferfläche zu beeinträchtigen (vgl. S. 258 u. f.).

Das Ergebnis, welches wir aus den Aufnahmen unmittelbar ablesen, können wir folgendermaßen formulieren:

Die elektrolytische Politur beseitigt die durch die Zubereitung (Herausschneiden des Einkristalls aus dem Stab, Schmirgeln der Fläche)

[1]) K. H. Moore, Ann. d. Phys. **33**, 133, 1938, dessen Arbeit uns nach Abschluß unserer Versuche bekannt wurde, stellte fest, daß unter seinen Versuchsbedingungen elektrolytisch poliertes Kupfer *stets* mit einer Oxydulschicht überzogen war. Leider sind die Mooreschen Angaben zu wenig ausführlich, um seine Versuche zu reproduzieren, zumal die Herstellung einer Politur sehr abhängig von den Apparaturdaten ist und ihre Qualität gegen deren Änderungen (z. B. des Elektrodenabstandes) sehr empfindlich ist.

entstandene verformte Schicht und trägt das Material bis auf das ungestörte Gefüge ab, so daß beim Vielkristall ein grobkristallines Material (Auflösen der Debye-Scherrer-Ringe in Punkte) und beim Einkristall der ungestörte Einkristall (Auftreten der Kikuchi-Linien) hervortritt.

Diese Versuchsergebnisse würden wir im wesentlichen auch erhalten, wenn wir die Fläche anätzen. Wir erhalten dann jedoch matte Flächen, während durch anodisches Polieren hochglänzende Flächen entstehen. Dieser Unterschied macht sich im Elektroneninterferenzbild durch die typische Schwänzung der Reflexe bemerkbar, die auf eine Mitwirkung der Brechung der Elektronenwellen beim Eintritt in die Metalloberfläche und damit auf eine sehr starke Einebnung der Oberfläche schließen läßt.

Der Brechungseffekt und sein Einfluß auf das Interferenzbild.

Werden Elektronen an einer Kristallfläche reflektiert, so sind folgende drei Fälle zu unterscheiden:

1. „*Wahre Reflexion.*" Treten Elektronen in einen Kristall mit positivem Potential V_i, wie es alle Gitter bisher zeigten, so werden sie beschleunigt, d. h. die Elektronen-Wellenlänge wird verkürzt und der Strahl zum Einfallslot hin gebrochen. Liegt, wie bei einem Einkristall,

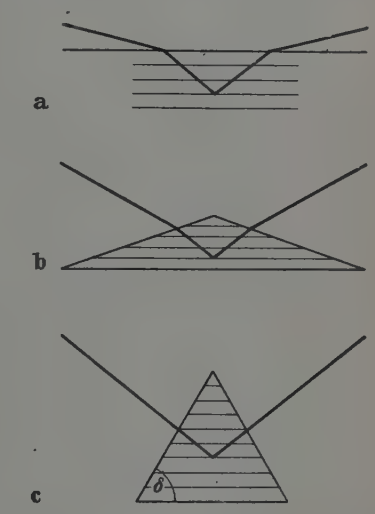


Fig. 4. Übergang der „Reflexion" in die „Durchstrahlung". In (*a*) ist die Kristallbegrenzung eine Netzebene. Der Elektronenstrahl erleidet eine Brechung [Fall der „Reflexion"]. In (*c*) bildet die Oberfläche einen größeren Winkel mit der Netzebene. Der Strahl durchtritt ohne merkliche Brechung die Kristallzacke [Fall der „Durchstrahlung"]. In (*b*) schließt die Oberfläche einen geringen Winkel mit den Netzebenen ein, weshalb der Strahl eine je nach der Größe des Winkels δ mehr oder weniger starke Brechung erleidet.

die Kristallbegrenzung parallel zur Netzebene ($\delta = 0^0$) (vgl. Fig. 4a), so ist das Braggsche Gesetz abzuändern in

$$\sin \vartheta = \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - \frac{V_i}{E \sin^2 \vartheta_0}}, \qquad (1)$$

wo E die kinetische Energie der Elektronen (in Volt) und ϑ_0 der Glanzwinkel für $V_i = 0$ bedeutet[1]). Die Reflexe sind also um so stärker, nach kleineren Winkeln verschoben, je kleiner der Reflexionswinkel ist. Wir können daher umgekehrt aus der Tatsache der Verschiebung schließen, daß die Oberfläche von einer Netzebene gebildet wird. Der im Vergleich zu Röntgenstrahlen erheblich größere Brechungseffekt verursacht eine entsprechend größere Reflexverlagerung und erlaubt daher eine bequeme Messung dieser Verschiebung[2]).

2. *„Wahre Durchstrahlung."* Anders liegen die Verhältnisse bei der Reflexion eines Elektronenstrahls an einer rauhen Fläche, z. B. einer angeätzten Einkristallfläche oder polykristallinen Fläche. Hier durchstrahlen die Elektronen die aus der Oberfläche stehenden Zacken. Da die Kristallbegrenzungen hierbei im allgemeinen große Winkel (δ) mit den Netzebenen einschließen (vgl. Fig. 4c), die zur Erfüllung der Reflexionsbedingung fast parallel zur Oberfläche liegen, ist die Verschiebung durch Brechung zu vernachlässigen.

Dies zeigt folgende Rechnung: Für das Kristallinnere gilt

$$\sin \vartheta' = \frac{n \lambda}{2 d \mu}, \tag{2}$$

worin μ der Brechungsindex ist ($= \sqrt{1 + V_i/E}$), E Energie des einfallenden Elektronenstrahls und ϑ' der Reflexionswinkel im Kristallinneren. Das Brechungsgesetz lautet:

$$\mu = \frac{\cos(\vartheta + \delta)}{\cos(\vartheta' + \delta)} = \frac{\sin \vartheta \operatorname{tg} \delta - \cos \vartheta}{\sin \vartheta' \operatorname{tg} \delta - \cos \vartheta'}, \tag{2'}$$

[1]) Vgl. z. B. Artikel E. Fues, Handb. d. Experimentalphysik, Ergänzungswerk, Bd. II, S. 69. — [2]) Schreibt man in (1) statt $\frac{V_i}{E \sin \vartheta_\delta^2} = \frac{4 d^2}{n^2} \frac{V_i}{150}$ (d Gitterkonstante, n Ordnungszahl und V_i inneres Potential), so lautet die abgeänderte Braggsche Formel für Elektronen

$$\sin \vartheta = \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - \frac{4 d^2}{n^2} \frac{V_i}{150}}, \text{ wo } \frac{V_i}{150} \sim 10^{-1},$$

für Röntgenstrahlen dagegen

$$\sin \vartheta = \sin \vartheta_0 \sqrt{1 + \frac{4 d^2}{n^2} \frac{\delta}{\lambda^2}}, \text{ wo } \frac{\delta}{\lambda^2} = \frac{e^2 N}{2 \pi m c^2} = 1{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot \varrho$$

ist. N Zahl der Elektronen pro cm³, ϱ Dichte, m Elektronenmasse, μ (Brechungsindex) $= 1 - \delta$. Z. B. ist für $d = 4$ Å, $\varrho = 10$ und $V_i = 10$ Volt

		$n = 2$	$n = 4$
$\left\lvert \frac{\sin \vartheta - \sin \vartheta_0}{\sin \vartheta_0} \right\rvert$ für	Elektronen	1	0,14
	Röntgenstrahlen	$10 \cdot 10^{-5}$	$2{,}5 \cdot 10^{-5}$,

wo ϑ der Reflexionswinkel außerhalb des Kristalls ist. Für $\delta \sim 90^0$ nimmt (2') die Form $\mu = \sin\vartheta/\sin\vartheta'$ an und (2) geht in die normale Bragg-Formel über.

3. Übergangsgebiet. Ist der Winkel δ zwischen Kristallbegrenzung und reflektierender Netzebene merklich kleiner als 90^0 (vgl. Fig. 4b), so wird, mit Benutzung von (2) und (2') und entwickeln nach $\operatorname{tg}\vartheta \operatorname{tg}\delta < 1$

$$\vartheta = \vartheta_0 \sqrt{1 - \frac{4\,d^2 V_i}{150\,n^2} \frac{1}{1+\operatorname{tg}\delta/\vartheta_0}}. \qquad (3)$$

Dies gilt mit $\vartheta = 0{,}05$ (3^0) bis δ nahezu 70^0 ($\operatorname{tg}\delta \sim 2$), wobei $\operatorname{tg}\vartheta \operatorname{tg}\delta \sim 0{,}1$ wird.

In Fig. 5 haben wir ϑ/ϑ_0 für $n = 2$ und 4 abhängig von δ aufgetragen, wobei wir $\lambda = 0{,}06$ Å (40 kV), $d = 3{,}6$ Å (Kupferebene 100) und $V_i = 10$ und 15 Volt gesetzt haben, da ein genauer Wert des inneren Potentials von Kupfer unbekannt ist. Für $\delta = 0$ ist eine starke Verschiebung ($\vartheta/\vartheta_0 = 0{,}3$) für $V_i = 10$ Volt zu erwarten, für $V_i = 15$ Volt kann sogar die Reflexionsbedingung für (200) nicht mehr erfüllt werden, so daß dieser Reflex nicht mehr auftritt. Mit zunehmendem Winkel δ geht ϑ/ϑ_0 rasch gegen 1, so daß bereits für 10^0 ($\operatorname{tg}\delta = 0{,}175$) $\vartheta/\vartheta_0 = 0{,}94$ wird. Eine Verschiebung von 6 % ist im allgemeinen noch meßbar, während eine solche von 3 %, die bei $\delta = 20^0$ auftritt, nicht mehr bemerkbar ist. Der Übergang zum normalen Reflexionswinkel ϑ_0 erfolgt also schon bei so kleinen Dachwinkeln δ, daß merkliche Verschiebungen auf sehr kleine Winkel δ schließen lassen.

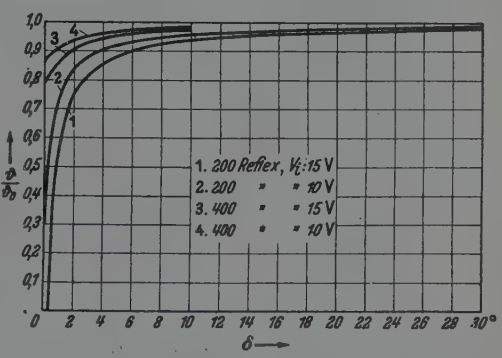


Fig. 5. Abhängigkeit des Reflexionswinkels (ϑ), bezogen auf den Reflexionswinkel für $V_i = 0$ (ϑ_0), vom Winkel zwischen Netzebene und äußerer Kristallbegrenzung (δ). Die Rechnung wurde für die zweite und vierte Ordnung der Würfelfläche und bei verschiedenem inneren Potential ($V_i = 10$ und 15 Volt) durchgeführt.

Diskussion der Ergebnisse.

Da die Interferenzpunkte nicht symmetrisch nach größeren und kleineren Winkeln um den normalen Braggschen Reflexionswinkel aus-

einandergezogen sind, sondern nach kleineren Winkeln, meist mit einem breiten Schwärzungsmaximum unterhalb des normalen Braggschen Winkels, verschoben sind, wird die naheliegende Erklärung ausgeschlossen, daß diese Verlängerung ihren Grund in zu geringem Auflösungsvermögen durchstrahlter Kristallblöcke hat. Wir führen daher die Verschiebung auf einen Brechungseffekt zurück, der dadurch zustande kommt, daß die Kristallbegrenzungen nur noch kleine Winkel (δ) mit den Netzebenen einschließen. Das strichartige Aussehen der Reflexe läßt auf eine gekrümmte Begrenzung, etwa eine sanft gewellte Kuppe, schließen,

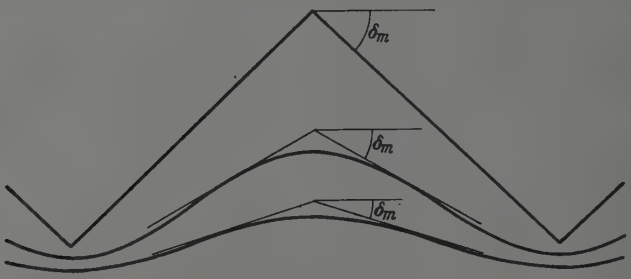


Fig. 6. Schematische Darstellung der Einebnung durch die elektrolytische Politur. δ_m mittlerer Dachwinkel.

die infolge der kontinuierlichen Folge von Winkeln δ den Reflex auseinanderzieht[1]). Der Einwand, die Schwänzung könnte dadurch entstehen, daß die Elektronen verschiedene Zacken von wechselndem Dachwinkel durchstrahlen, wird dadurch widerlegt, daß an polykristallinem Material jeder einzelne Reflex, der *einer* Kristallstellung, d. h. einer Zacke zugehört, geschwänzt ist. Aus der Verschiebung des Schwärzungsmaximums oder der Mitte des länglichen Reflexes von dem Ort der unverschobenen Interferenz (fast immer das obere Ende des Reflexes) können wir an Hand der Fig. 5 den mittleren Dachwinkel (s. Fig. 6) ermitteln.

Die Auswertung der Aufnahmen an vielkristallinem Kupfer (Fig. 1) ergibt, daß die Begrenzungsflächen bis zu wenigen Grad gegen

[1]) Mit der Einebnung geht der Übergang von der „Durchstrahlung" zur „Reflexion" parallel. Während im ersten Fall die Höhe und Breite des durchstrahlten Kristallblocks für die Schärfe der Interferenz maßgebend ist, wird im zweiten Fall der Reflexion die begrenzte Eindringtiefe die Ausdehnung des Reflexes senkrecht zur Oberfläche bestimmen. Diese nach größeren und kleineren Winkeln eintretende Verbreiterung durch die Verminderung der Zackenhöhe ist jedoch merklich kleiner als die hier beobachtete einseitige Verschiebung.

die Netzebene geneigt sind. Für die Interferenz (200) z. B. ergibt eine Verlagerung um 1,5 mm (Plattenabstand 300 mm, $\lambda = 0{,}06$ Å, $V_i = 15$ Volt) einen Dachwinkel von etwa 3^0. Aus den Einkristallaufnahmen, die im allgemeinen längere Schwänze zeigen, berechnet man Werte von im Mittel 2^0 ($V_i = 15$ Volt) bzw. 1^0 ($V_i = 10$ Volt). Die Unkenntnis des inneren Potentials bringt eine gewisse Unsicherheit in der Winkelbestimmung mit sich. Man könnte aus der gemessenen Verschiebung sogar auf den Winkel $\delta \simeq 0^0$ schließen, wenn das Potential kleiner gewählt würde. Folgende Beobachtung schließt jedoch dieses Ergebnis aus: Auf einigen Aufnahmen an geglänzten Kupfer-(100)-Flächen beobachteten wir eine Verschiebung der (400)-Interferenz, die bei $V_i = 15$ Volt zu $\delta = 0^0$ führt, bei größeren V_i-Werten zu $\delta > 0^0$. Andererseits tritt auf den gleichen Aufnahmen die (200)-Interferenz auf, die nach Fig. 5 bei 15 Volt und $\delta = 0^0$ nicht auftreten dürfte. Hieraus folgt, daß der Winkel $\delta > 0^0$ ist, bei $V_i > 15$ Volt. Die Tatsache der Schwänzung schließt im übrigen einen *mittleren* Winkel δ von 0^0 aus. Die Glätte einer Netzebene wird also durch die anodische Politur nicht erreicht, der Winkel, der zwischen Netzebene und Begrenzungsfläche liegt, bleibt vielmehr in der Größe von wenigen Grad.

Während die Schwänzung Auskunft über das Profil der Zacke in Strahlrichtung gibt, kann man aus der Tatsache, daß die Reflexverlängerung senkrecht zur polierten Fläche steht, auf das Profil senkrecht zum Strahl schließen: Liegt die reflektierende Netzebene parallel zur Begrenzung — eine glatte Kristallfläche vorausgesetzt —, so findet die Verlagerung des Reflexes nach kleineren Winkeln senkrecht zu beiden einander parallelen Flächen statt, vgl. die (h 00) Reflexe an der (100)-Fläche (h: 2, 4, 6 . . .). Liegen die Netzebenen schräg zur Begrenzung, wie z. B. bei Einstrahlung längs einer Würfelkante die Ebene (110), (120) usw., so werden die zugehörigen Reflexe (220), (240) usw. ebenfalls senkrecht zur *Begrenzung* verschoben und nicht zur reflektierenden Netzebene, da nur die zur Begrenzung senkrechte Impulskomponente des Elektrons beim Eintritt in den Kristall vergrößert wird. Dies zeigen eindeutig die Reflexionskreuzgitterdiagramme an Einkristallen, die, um ein Beispiel zu nennen, an Steinsalzspaltflächen bei Einstrahlung längs einer Würfelkante entstehen[1]). Auf die

[1]) H. Raether, ZS. f. Phys. **78**, 527, 1932.

vorliegenden Verhältnisse übertragen, bedeutet die zur polierten Fläche senkrechte Schwänzung, daß die Zackenwände, gleichgültig wie die reflektierenden Netzebenen im Innern angeordnet sind, nahezu parallel zur Oberfläche liegen. Wir können daher das in Fig. 6 gezeigte Profil auch senkrecht zur Strahlrichtung annehmen. Die geringen Schwankungen der Kuppenflanken um die Horizontale machen sich in einer Abweichung der Reflexverlängerung von der Vertikalen nicht bemerkbar. Im Einklang hiermit steht die Beobachtung, daß die Reflexlänge und -richtung vom Einstrahlungsazimut unabhängig ist.

Die elektrolytische Politur einer Oberfläche, die ein zackiges Ausgangsprofil hat, geht also in der Weise vor sich, daß die herausragenden Oberflächenteile abgetragen und gleichzeitig abgerundet werden, vgl. Fig. 6, so daß der mittlere Neigungswinkel der Oberflächenwelligkeit (δ_m) nur noch wenige Grad beträgt. Damit wird die Jacquetsche Vorstellung vom Poliervorgang bestätigt und erweitert.

Die Vorstellung, daß die Oberfläche aus sanft gewellten Kuppen besteht, wird durch elektronenmikroskopische Aufnahmen nach dem Abdruckverfahren[1]) gestützt. Während die Aufnahme des Abdruckfilms einer mechanisch polierten Kupferfläche noch eine Anzahl von Schrammen anzeigt, gibt eine elektrolytisch polierte Fläche ein nahezu kontrastloses Bild, da offenbar der Neigungswinkel der Oberflächenwelligkeit zu gering ist.

Die Aufrauhung von elektrolytisch polierten Metallflächen durch elektrolytische Abtragung.

Da die Verschiebung bzw. Verlängerung des Reflexes nach kleineren Winkeln stark vom Dachwinkel δ abhängig ist, bildet sie ein empfindliches Mittel, Änderungen des Dachwinkels und damit des Oberflächenprofils durch Abtragung anzuzeigen. Wird daher von einer anodisch polierten Metallfläche elektrolytisch eine gewisse Schichtdicke entfernt, so bleibt bei gleichmäßiger Abtragung das Interferenzbild mit den geschwänzten Reflexen erhalten. Rauht der Elektrolyt dagegen die Fläche an, so werden sich infolge der Vergrößerung des Dachwinkels die Reflexe zu runden Punkten zusammenziehen.

---

[1]) H. Mahl, Naturwissensch. 30, 207, 1942. Wir danken Herrn Dr. Mahl für die Anfertigung der Aufnahmen.

Die Versuche wurden an polykristallinem und einkristallinem Kupfer ausgeführt, und zwar mit Salzsäure wie mit Orthophosphorsäure. Die Metallspiegel hatten eine Fläche von etwa 1 cm².

1. Elektrolyt: Salzsäure (1%, Stromdichte 0,1 mA/cm²). Die abgetragene Schichtdicke wurde auf Grund einer Eichung durch Wägung interpoliert. An einer Einkristallfläche waren nach 100 Å Abtragung die Reflexe noch geschwänzt; eine teilweise Verringerung der Reflexlänge machte sich jedoch bemerkbar. Nach 150 bis 200 Å hingegen traten nur mehr runde Interferenzflecke auf (wahre Durchstrahlung). Bei Verwendung von vielkristallinem Kupfer (Elektrolytkupfer) hatten sich nach 150 bis 200 Å die Reflexe ebenfalls zu Punkten zusammengezogen.

2. Orthophosphorsäure (40%, Stromdichte 0,1 mA/cm²). Diese Säure dient in der angegebenen Konzentration als Polierelektrolyt für Kupfer. Die polierende Wirkung tritt jedoch frühestens bei etwa 20 mA/cm² auf; bei derart großen Stromdichten können aber die dünnen, hier interessierenden Schichten jedoch nicht genau genug abgetragen werden.

An Einkristallflächen wie polykristallinen Flächen trat noch nach mehreren 100 Å Abtragung unverändert das gleiche Interferenzbild wie nach 0 Å Abtragung auf. Erst bei 900 Å machte sich eine Schrumpfung bemerkbar, die nach insgesamt 1500 Å zu runden Interferenzflecken führt (vgl. Fig. 7 und 8). Wird die angerauhte Fläche von neuem elektrolytisch poliert, so liefert sie wieder längliche Reflexe, die sich bei erneutem Abtragen wieder zusammenziehen.

Das Ergebnis läßt sich dahin zusammenfassen:

Trägt man mit Salzsäure Schichtdicken von etwa 100 Å oder mit Orthophosphorsäure solche von etwa 1000 Å von einer elektrolytisch polierten Kupferfläche ab, so wird diese Schicht nahezu gleichmäßig abgetragen (vgl. Fig. 9). Nach Entfernen dickerer Schichten machen sich stärkere Unregelmäßigkeiten bemerkbar. Dies führt dazu, daß die Begrenzungsflächen der Kristalle im Mittel eine zunehmende Neigung gegen die Oberfläche bekommen, wodurch der Einfluß der Brechung zurücktritt. Die Aufrauhung ist hierbei unabhängig von der Korngröße des Materials, wie aus den übereinstimmenden Resultaten an ein- und vielkristallinen Flächen hervorgeht.

Eine Begründung für das verschiedenartige Verhalten der beiden verwendeten Säuren läßt sich nicht geben. Immerhin leuchtet es

ein, daß auf Grund obiger Ergebnisse die Phosphorsäure als Polierelektrolyt für Kupfer günstig ist.

Es erschien uns wichtig, mit diesen Versuchen zu zeigen, daß die Abtragung geringer Schichtdicken gleichmäßig erfolgt. (Bei größeren Dicken hat die Angabe der abgelösten Schicht meist nur größen-

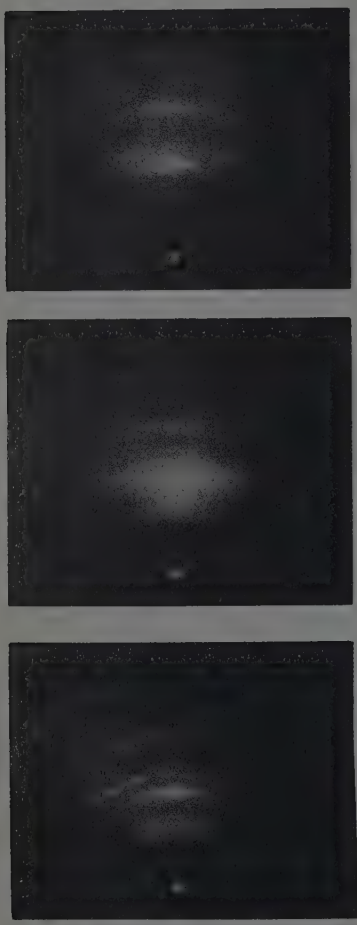


Fig. 7. Elektrolytisch polierter Vielkristall nach Abtragung von 150 Å (*a*), 500 Å (*b*) und 1500 Å (*c*) mit Phosphorsäure. Die Schwänzung der Reflexe läßt nach, da die Fläche angerauht wird, und damit der Einfluß des Brechungseffektes aufhört.

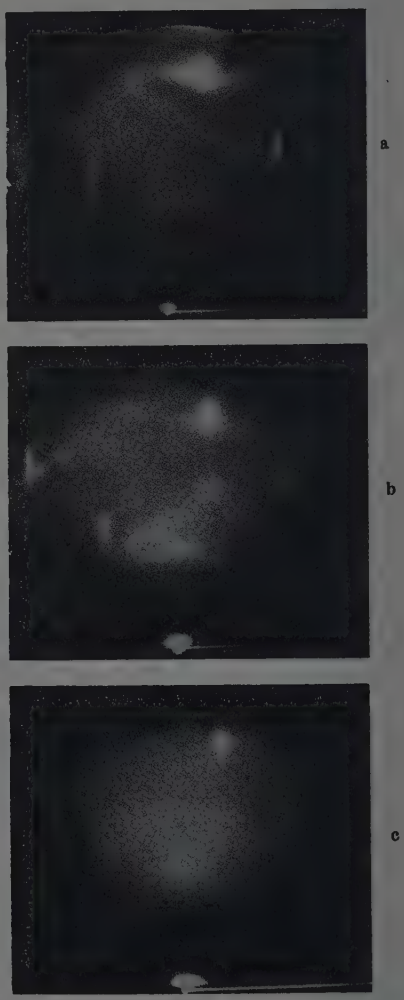


Fig. 8. Elektrolytisch polierter Kupfer-Einkristall nach Abtragen von 0 Å (*a*), 900 Å (*b*) und 1500 Å (*c*) mit Phosphorsäure.

ordnungsmäßiges Interesse.) Diese Tatsache ist für viele Schlüsse hinsichtlich der Struktur mechanisch bearbeiteter Metallflächen in

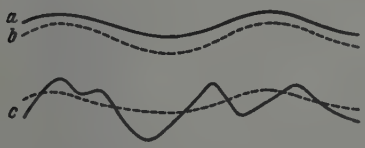


Fig. 9. Art der Abtragung bei elektrolytischer Ätzung: a) Struktur der Oberfläche nach elektrolytischer Politur; b) nach Abtragen einer dünnen Schicht (maximal 100 Å bei HCl, 1000 Å bei H_3PO_4 als Elektrolyt); c) nach Abtragen einer Schicht dicker als die oben angegebene maximale.

Abhängigkeit von der Tiefe nützlich, worüber an anderer Stelle berichtet werden wird, vgl. S. 249, Anm. 4.

Die Arbeit wurde, 1939 begonnen und mehrmals unterbrochen, im Physikalischen Institut der Universität Jena angefertigt. Wir danken Herrn Prof. Dr. H. Kulenkampff für sein Interesse und für die Bereitstellung der Institutsmittel.

Bemerkung zur Ionisierungsdichte einer Elektronenbahn.

Von W. Riemann in Jena.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 20. Juli 1943.)

In früheren Versuchen von Raether[1]), Elektronenlawinen nicht von der Kathode starten zu lassen, sondern im Gas in einem genügenden Abstand von den Elektroden der Nebelkammer, wurde der Gasraum mit Röntgenstrahlen bestrahlt, deren Photo- und Compton-Elektronen den Elektrodenraum durchsetzten. Die im Gas gebildeten Elektronen stellten die Primärelektronen für die Lawinen.

Dieser Versuch hatte, wie hier nebenbei bemerkt sei, deswegen ein besonderes Interesse, weil die Frage entstand, ob bei der Entwicklung der Lawine, deren Elektronen nach der Anode laufen, die Elektronennachlieferung von der Kathode her erfolgt. Das Ergebnis war, daß der *Kopf* der Lawine Ausgangspunkt einer Kanalentladung ist, die mit sehr großer Geschwindigkeit ($> 1{,}2 \cdot 10^8$ cm/sec) zur Kathode läuft und damit die Entladungsbahn mit einer plasmaartigen Schlauchentladung an die Kathode anschließt. Da bei diesem Versuch die Vorionisierung der Entladungsbahn durch die Lawine wegfiel, blieb nur die Deutung des Entwicklungsvorganges dieses kathodengerichteten Kanals mit Hilfe der Photoelektronen einer gasionisierenden Strahlung übrig, die im Lawinenkopf angeregt wird[1]). Dieses Resultat wurde allerdings nicht mit den durch Röntgenstrahlen ausgeworfenen Elektronen erhalten, sondern mit den Photoelektronen der gasionisierenden Strahlung eines Funkens, die im Gegensatz zu den Röntgenstrahlen die Ionisation in einem festen, reproduzierbaren Abstand von der Kathode ermöglicht.

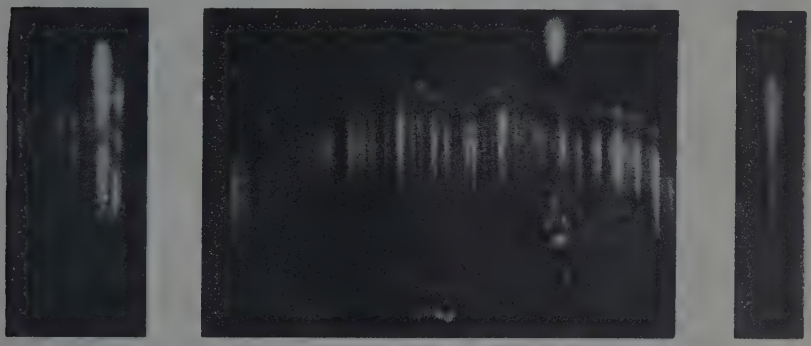
Die damaligen Aufnahmen der „Röntgenstrahllawinen" beanspruchten deswegen ein gewisses Interesse, weil in der von den Sekundärelektronen ausgehenden Lawinenwand noch gut die einzelnen Lawinen erkannt werden konnten, obgleich mindestens 100 Ionenpaare, d. h. Lawinen pro cm zu erwarten waren.

Aufnahmen solcher Lawinen, die ich gelegentlich mit der in der vorangehenden Arbeit beschriebenen verbesserten Apparatur wieder-

[1]) ZS. f. Phys. 112, 464, 1939, insbes. S. 484.

holte, bestätigten die damaligen Ergebnisse. Fig. 1 und 2 zeigen solche Lawinen von „nordlichtartigem" Aussehen.

Die Versuchsanordnung war die gleiche, früher benutzte[1]): An Stelle der Funkenstrecke, die zum Auslösen der Photoelektronen auf



a b c

Fig. 1. Ein Röntgenstrahlblitz wirft zwischen den Elektroden der Nebelkammer (auf dem Bild nicht sichtbar) Elektronen aus. Diese bilden Sekundärelektronen, die einen „Vorhang" von Lawinen erzeugen, da gleichzeitig mit dem Röntgenstrahlblitz ein Spannungsstoß an die Elektroden gelegt wird. In (*b*) durchquert ein Photoelektron die Kammer, während es in (*a*) innerhalb der Kammer umkehrt. Die kurzen Spuren (Compton-Elektronen) entstanden nach Abklingen des Spannungsstoßes, weshalb keine Lawinenbildung eintrat. In (*c*) wurde ein Compton-Elektron sehr geringer Energie erzeugt, so daß die wenigen entstandenen Sekundärelektronen praktisch *eine* Lawine bilden. Daß mehrere Primärelektronen an der Lawine beteiligt sind, erkennt man an dem stärkeren Lawinenbeginn.

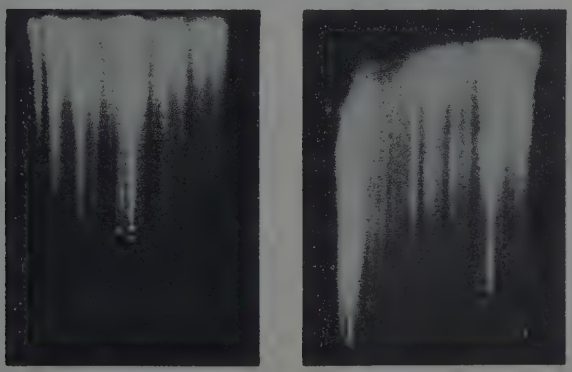


Fig. 2. Das durch Röntgenstrahlen ausgeworfene Elektron erzeugt ein schnelles Sekundärelektron (Verzweigung der Spur). Die auffallende Tropfengröße der Elektronenspur im Vergleich zu der des Lawinenanfangs ist darauf zurückzuführen, daß die Tropfen der Bahn des schnellen Elektrons im Gegensatz zu den Tropfen der Lawine mehrere nicht an einem Punkt entstandene Elektronen enthalten.

[1]) Siehe Anmerkung 1 der vorangehenden Seite.

der Kathode dient (vgl. meine vorangehende Arbeit Fig. 1), wurde ein Röntgenrohr mit Wo-Anode geschaltet, welches seitlich von der Kammer in etwa 30 cm Abstand angebracht wurde. In eine Entfernung von 2 und 15 cm vom Röntgenrohr wurden Bleiblenden von 3 mm Bohrung gestellt, die einen Röntgenstrahl senkrecht zur Aufnahmerichtung mitten durch die Kammer gehen ließen. Die Doppelleitung zum Röntgenrohr wurde über dieses hinaus um 15 m verlängert, so daß ein Spannungsstoß von $1 \cdot 10^{-7}$ sec Dauer an der Röhre lag. Die Leitung zur Nebelkammer war einige Meter kürzer als die zur Röntgenröhre, so daß der Röntgenblitz etwa 10^{-8} sec später erzeugt wurde als der die Lawinenbildung einleitende Spannungsstoß. Hierdurch wurde vermieden, daß die von den schnellen Elektronen, die der Röntgenstrahl ausgeworfen hatte, erzeugten Sekundärelektronen sich anlagern können. Die Spannung am Rohr betrug etwa 50 kV.

Für den verwendeten Nebelkammerdruck von etwa 350 Torr und eine Röntgenstrahlenergie von etwa 50 kV sind ungefähr 120 Ionenpaare pro cm zu erwarten[1]). Auf einer größeren Zahl von Aufnahmen von Bahnen entsprechender Reichweite wurden etwa 30 Tröpfchen pro cm Elektronenspur ausgezählt und 20 bis 30 Lawinen. Die Zahl der Lawinen kann auch größer sein, da zwei benachbarte Lawinen oft nicht mehr getrennt werden können. Im Mittel kommt also eine Lawine auf ein Tröpfchen. Wir müssen daher annehmen, daß ein Tröpfchen im Mittel etwa 4 Elektronen enthält, die eine Lawine starten. Daß eine Lawine von mehreren Primärelektronen gleichzeitig gezündet wird, sieht man auch an der wechselnden Stärke der Lawinenspuren. Es entstehen also die 120 Ionenpaare nicht in gleichmäßiger Folge, sondern das Photoelektron gibt beim Ionisierungsakt dem Sekundärelektron genügend Energie mit, um noch einige Ionenpaare (etwa 4) in unmittelbarer Nachbarschaft zu bilden. Diese Ionenpaare bilden dann ein Tröpfchen der Nebelspur. Ab und zu erhält das Sekundärelektron eine größere Energie, wie an der Verzweigung der Spuren in Fig. 2 zu sehen ist.

Ein ähnliches Ergebnis hatte bereits C. T. R. Wilson an Elektronenspuren von etwa 30 kV gefunden[2]). Durch besondere Wahl seiner Expansionsbedingungen entsprach jedem Tröpfchen ein Ion. Bei ihrer Auszählung bemerkte er eine Gruppenbildung und fand, daß in jeder

[1]) H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. **80**, 261, 1926. — [2]) C. T. R. Wilson, Proc. Roy. Soc. London (A) **104**, 192, 1923; vgl. auch Artikel Bothe in Geiger-Scheel, Handbuch der Physik XXII/2, S. 64.

Gruppe im Mittel 3 bis 4 Elektronen enthalten sind. Die Zahl der Gruppen ist gleich der Zahl der Sekundärelektronen, die also in den obigen Aufnahmen mit der Zahl der Tropfen (bzw. Lawinen) identisch ist, wie es zumeist unter den üblichen Expansionsbedingungen bei den Nebelspuren von Elektronenbahnen der Fall ist. Diese Verhältnisse zeigen die obigen Lawinenaufnahmen sehr anschaulich, weshalb sie hier mitgeteilt wurden.

Für die Anregung zu dieser Notiz danke ich Herrn Dr. H. Raether, für die Bereitstellung der Hilfsmittel des Instituts Herrn Prof. Dr. H. Kulenkampff. Die Röntgenröhre wurde uns dankenswerterweise von Herrn Dr. Th. Zimmer (Siemens-Reiniger, Rudolstadt) überlassen.

Jena, Physikalisches Institut.

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Köln.)

Über einen Nachwirkungseffekt an Zählrohren.

Von **K. H. Lauterjung** und **H. Neuert** in Köln.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 26. Mai 1943.)

Eine durch intensive Bestrahlung hervorgerufene hohe Stoßzahl in Zählrohren hat häufig eine beträchtliche Erhöhung der Dunkelstoßzahl zur Folge. Diese klingt allmählich wieder auf den Normalwert ab. Der Effekt ist stark abhängig vom Kathodenmaterial; er ist am größten bei Schichten mit hoher photoelektrischer Empfindlichkeit, z. B. bei Mg-Schichten.

Bei Untersuchungen an Zählrohren bei Bestrahlung mit UV-Licht oder γ-Strahlung wurde bei höheren Stoßzahlen folgender Nachwirkungseffekt beobachtet: Nach einer intensiven Bestrahlung von einigen Minuten war die Dunkelstoßzahl der Zähler auf ein Vielfaches des normalen Wertes angestiegen. Sie sank dann im Verlauf der folgenden Minuten allmählich wieder auf den normalen Wert ab. Da dieser Effekt bei der Messung zeitlich rasch wechselnder Strahlungsintensitäten Anlaß zu Fehlern geben kann, seien unsere Beobachtungen kurz mitgeteilt.

Der Effekt ist stark abhängig von der Beschaffenheit der Kathodenoberfläche und war am stärksten wahrnehmbar bei Zählern mit frisch aufgedampften Kathodenschichten, und zwar an Kathoden aus Cadmium, Zink, Magnesium, Beryllium, Quecksilber und Silber. Dagegen trat er nicht merklich auf bei den normalen Messingzählern (auch nicht an geschabten oder geätzten Oberflächen). Er verschwand nicht während der Beobachtungszeit von mehreren Wochen. Ältere Zähler der genannten Art standen nicht zur Verfügung, so daß keine Aussage gemacht werden kann, ob der Effekt bei längerem Lagern verschwindet. Er trat bei allen untersuchten Gasfüllungen (Alkohol + Argon, Methylal, Methylal + Wasserstoff) auf.

Der Effekt wurde je nach der Empfindlichkeit des Zählers auf die einfallende Strahlung merklich von Stoßzahlen von etwa 100/s an. Die Erhöhung der Dunkelstoßzahl unmittelbar nach der Bestrahlung war um so größer, je größer die Intensität und die Dauer der Bestrahlung war.

Es bestand eine ausgeprägte Abhängigkeit vom Kathodenmaterial. Ganz allgemein zeigten bei sonst gleichen Bestrahlungsverhältnissen

Schichten mit größerer Empfindlichkeit für die betreffende Strahlung (z. B. UV-Strahlung) einen größeren Effekt. Im gleichen Sinne waren die Halbwertszeiten des Abklingens von der Bestrahlung und vom Kathodenmaterial abhängig. Sie schwankten für verschiedene Kathodenschichten zwischen einigen Sekunden und mehreren Minuten, waren aber für jede Schicht reproduzierbar. So betrug z. B. bei einem Magnesiumzähler bei Bestrahlung von 1 Minute Dauer mit UV-Licht, die einige 100 St/s erzeugte, die Nachwirkung in den ersten Sekunden das 200fache des Nulleffekts; nach 7 Minuten war der Nulleffekt auf das Doppelte seines normalen Wertes von 20 St/Min abgesunken. Fig. 1 zeigt die Abklingungskurve, die mit einem Achtfach-Untersetzer und Zählwerk aufgenommen wurde. Sie läßt sich bei zweifach logarithmischer Auftragung zwanglos durch eine Gerade darstellen. Bei Cadmium, Zink, Beryllium war der Effekt wesentlich geringer, bei Silber und Quecksilber am schwächsten wahrnehmbar. Bei Zink betrug er bei ähnlichen Bestrahlungsverhältnissen wie bei Magnesium in den ersten Sekunden das Fünf- bis Zehnfache des normalen Nulleffekts; er war nach 1 bis 2 Minuten bereits abgeklungen. Eine Verkürzung der Abklingungszeit konnte in allen Fällen durch kurzzeitige Wegnahme der Zählspannung vom Zählrohr erzielt werden.

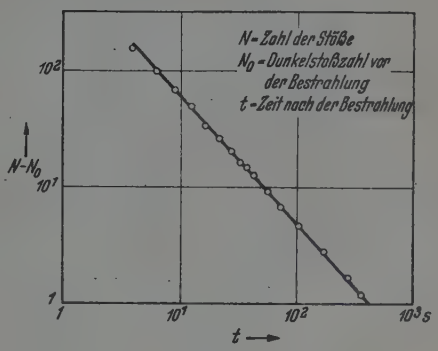


Fig. 1.

Ein Nachwirkungseffekt an Zählrohren wurde von Scherrer und Mitarbeiter[1]) bei Bestrahlung mit Röntgenstrahlen gefunden. Während jedoch der hier beobachtete Effekt sowohl bei Bestrahlung mit γ-Strahlung als auch mit UV-Strahlung auftrat, hatten Scherrer und Mitarbeiter einen solchen bei UV- und sichtbarem Licht nicht feststellen können. Der von uns untersuchte Effekt ist eindeutig eine Folge der Entladungsvorgänge im Zählrohr. Denn bei Bestrahlungen ohne Zählspannung am Zählrohr konnte bei keinem Zähler eine Nachwirkung beobachtet werden.

---

[1]) F. Roggen u. P. Scherrer, Helv. Phys. Acta 15, 497, 1942.

In engem Zusammenhang mit dem geschilderten Effekt scheinen frühere Beobachtungen an Lichtzählern von Christoph[1]) zu stehen. Bei Versuchen, die Lichtempfindlichkeit von Zählrohren durch Aktivieren mittels einer Glimmentladung zu steigern, stellte er fest, daß bei Zählern mit aufgedampften Schichten von Cadmium oder Kalium die Dunkelstoßzahl unmittelbar nach der Glimmentladung stark angestiegen war und erst allmählich auf ihren normalen Wert absank. Die von ihm veröffentlichte Abfallskurve ergibt bei zweifach logarithmischer Auftragung wie bei unseren Messungen eine Gerade. Einige hier durchgeführte Versuche deuten darauf hin, daß mit dem Nachwirkungseffekt nach intensiven Bestrahlungen und — im Gegensatz zur Auffassung von Christoph — auch mit dem zuerst von ihm gefundenen Nachwirkungseffekt nach Glimmentladungen eine in gleicher Weise zeitlich abfallende Steigerung der lichtelektrischen Ausbeute verbunden ist. Darüber soll an anderer Stelle berichtet werden.

[1]) W. Christoph, Ann. d. Phys. **23**, 747, 1935.

This material is restricted in use and cannot be quoted by title or abstract for propaganda purposes or in the popular press. Quotation of titles and abstracts in publications of purely technical or scientific nature is not prohibited.

Messungen des Gradienten der positiven Säule von Edelgasniederdruckentladungen. Positive Charakteristik.

Von **Heinz Schmellenmeier** in Berlin-Lankwitz.

Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 7. Juli 1943.)

Die positive Säule der Niederdruckentladung in Neon, Helium, Argon und Krypton zeigt unter gewissen Bedingungen in Abhängigkeit vom Druck und Röhrendurchmesser Gebiete, in denen die übliche negative Charakteristik positiv wird. Je kleiner der Rohrdurchmesser und je kleiner der Gasdruck, um so ausgeprägter ist das Gebiet der positiven Charakteristik. Übersteigt man eine bestimmte Stromstärke, dann wird die Charakteristik wieder negativ. Man kann Röhren in diesem Gebiet trotz des negativen Kathodenfalles am Netz ohne Vorschaltwiderstand betreiben. Zur Deutung der Ergebnisse wird der von anderer Seite schon früher gefundene Druckunterschied zwischen dem kathoden- und dem anodenseitigen Ende der langgestreckten Röhren herangezogen. Dieser Druckunterschied entsteht beim Betrieb der Entladung.

Messungen des Gradienten der positiven Säule von Edelgasentladungen sind in den letzten Jahren verschiedentlich durchgeführt worden. Insbesondere sind ausführliche Messungen von Lompe und Seeliger [1]) veröffentlicht worden. Über die Charakteristik von Wechselstromentladungen in Gasgemischen ist von Alterthum und Lompe [2]) eine eingehende Untersuchung durchgeführt worden.

Normalerweise hat die positive Säule einer Niederdruckentladung eine negative Charakteristik, d. h. einen Zusammenhang zwischen Strom I und Spannung V_g, bei dem $\mathrm{d}V_g/\mathrm{d}I < 0$ ist.

Technisch beschränkt die Tatsache der negativen Charakteristik der Entladung oft die Verwendbarkeit durch die Notwendigkeit eines stabilisierenden Gliedes mit stark positiver Charakteristik in der Entladungsstrecke, z. B. eines Ohmschen Widerstandes oder einer Drosselspule. Diese stellen aber für die wirtschaftliche Verwendung der Entladung, z. B. zur Lichterzeugung, einen unerwünschten Leistungsverlust dar, der der Entladung selbst verloren geht. Es wäre also zu begrüßen, wenn man die Entladung so leiten könnte, daß die Charakteristik positiv wird.

Es gibt einige Versuche, die Charakteristik der Entladung aus den Elementarprozessen zu erklären. Rompe und Schön [3]) haben ver-

[1]) A. Lompe u. R. Seeliger, Ann. Phys. (5) **15**, 300, 1932. — [2]) H. Alterthum u. A. Lompe, ebenda (5) **31**, 1, 1938. — [3]) R. Rompe u. M. Schön, ZS. f. Phys. **108**, 265, 1938.

Reproduced and Distributed in the Public Interest by THE ALIEN PROPERTY CUSTODIAN

sucht, aus Betrachtungen über die Wechselwirkung der Entladungspartner Schlüsse auf das Auftreten einer negativen oder positiven Charakteristik zu ziehen. An Wechselstromentladungen in Gasgemischen haben Alterthum und Lompe[1]) auch teilweise positive Äste der Charakteristik gefunden und auch eine Erklärung gegeben. Auf diese Untersuchungen wird noch eingegangen werden.

Es liegen auch eine Reihe experimenteller Befunde in der Literatur vor, die bei Gleichstromentladungen teilweise positive Äste der Charakteristik aufweisen. In den Messungen von Lompe und Seeliger[2]) zeigt sich, allerdings bei sehr niedrigen Stromstärken ein kleiner positiver Ast. Ebenso ist eine solche bei höheren Stromstärken von Rüttenauer[3]) gefunden worden.

An Entladungen, die in irgendeiner Weise behindert waren, sei es durch besondere Ausbildung des Entladungsrohres oder durch Behinderungen an der Kathode, konnte allerdings schon verschiedentlich ein Ansatz zu positiver Charakteristik in mehr oder weniger großem Umfang beobachtet werden. Diese Fälle bleiben für die nachfolgende Untersuchung außer Betracht.

Ebenso kommt für die Betrachtung der Niederdruckentladung nicht ein Befund in Frage, den Rompe und Thouret[4]) bei Hg-Entladungen mit mehreren Atmosphären Druck aufgezeigt haben. Bei diesen kommt die positive Charakteristik aus der Wechselwirkung der fast im thermischen Gleichgewicht stehenden Entladungspartner zustande. Bei unserem hier vorliegenden Fall der Niederdruckentladung sind wir aber vom thermischen Gleichgewicht sehr weit entfernt.

In den bisher bekannt gewordenen Untersuchungen an langgestreckten, in zylindrischen Rohren brennenden Niederdruckentladungen finden sich in bestimmten höheren Stromdichtebereichen der Entladungen eigenartige, systematisch wiederkehrende, aus dem üblichen Gang der Meßpunkte herausfallende Werte. Bei Rüttenauer[5]) findet man Angaben über Neon- und Argonentladungen, bei denen bei konstantem Füllgasdruck der Gradient mit steigendem Strom steigt, die Charakteristik also positiv ist. Ein Grund, warum diese aus dem üblichen herausfallenden Werte wenig beachtet wurden, mag darin zu suchen sein, daß sie oft für die verschiedenen Rohrdurchmesser und

[1]) H. Alterthum u. A. Lompe, a. a. O. — [2]) A. Lompe u. R. Seeliger, Ann. Phys. (5) 15, 300, 1932. — [3]) A. Rüttenauer, ZS. f. Phys. 10, 269, 1922. — [4]) R. Rompe u. W. Thouret, ZS. techn. Phys. 19, 352, 1938. — [5]) A. Rüttenauer, a. a. O.

Gase bei Stromstärkebereichen liegen, die für technische Zwecke im allgemeinen für die üblicherweise verwendeten Röhren aus Weichglas zu hoch lagen, da bei den auftretenden Leistungen zu leicht die Gefahr des Erweichens des Glases auftritt, die Entladungen wurden bei dieser Stromstärke selten gemessen.

Das fragliche Gebiet der Entladung wurde noch einmal systematisch untersucht, da auch aus anderen Gründen geschlossen werden mußte, daß der Gradient in gewissen Stromstärkegebieten nicht mit steigendem Strom fällt, sondern unter Umständen ansteigt, also die allgemein negative Charakteristik auch positiv werden kann.

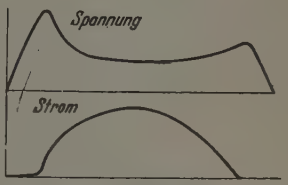


Fig 1. Verlauf von Spannung und Strom in einer üblichen Entladung (schematisch).

Die Beobachtung bei der Aufnahme von Oszillogrammen von Niederdruckentladungen in Edelgasen und anderen einatomigen Gasen zeigte, daß die Charakteristik nicht den allgemein angenommenen Verlauf zeigt[1]), sondern daß oft Gebiete vorhanden sind, in denen bei steigender Stromstärke ebenfalls die Spannung steigt (Fig. 1 und 2).

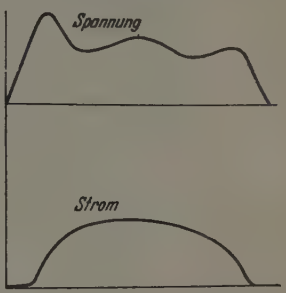


Fig. 2. Verlauf von Spannung und Strom in einer Entladung mit positivem Ast der Charakteristik.

Im nachstehenden soll über systematische Messungen des Gradienten der positiven Säule von Edelgas-Niederdruckentladungen berichtet werden.

Allgemeines über die Messungen.

Die Untersuchungen wurden am eingehendsten in Neon durchgeführt[2]). Die Entladungen wurden mit Gleichstrom betrieben. Bei Argon, Helium und Krypton wurden mehr orientierende Messungen durchgeführt, da sich zeigte, daß sie prinzipiell dasselbe Verhalten zeigten wie Neon.

Die Messungen erfolgten in langgestreckten Entladungsröhren mit kreisförmigem Querschnitt verschiedener Durchmesser. Der Gra-

[1]) H. Ewest, ZS. techn. Phys. **14**, 478, 1933. — [2]) Die Messungen wurden zum Teil vor mehreren Jahren während meiner Tätigkeit bei der Stud.-Ges. f. elektrische Beleuchtung m. b. H. (Osramkonzern) durchgeführt.

dient wurde leistungslos mit einem statischen Voltmeter oder Röhrenvoltmeter gemessen, an zwei in die Entladung eingeführten Drahtsonden, die bis in die Achse der Entladung eingeführt wurden und mit Glas isoliert waren. 2 mm der Sonden blieben frei und ragten in die Entladung. Die Sonden waren 100 mm voneinander entfernt, die Röhren

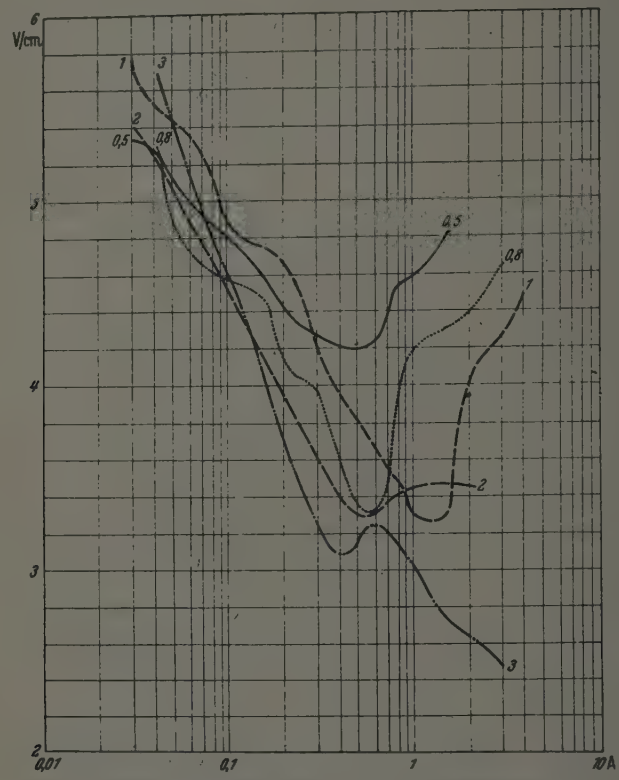


Fig. 3. Gradient der positiven Säule in Ne. Rohrdurchmesser 10 mm. Parameter: Ne-Druck in Torr.

waren etwa 600 mm lang, so daß mit Sicherheit dafür gesorgt war, daß die Sonden weit außerhalb der kathodischen und anodischen Entladungsteile lagen.

Da die beiden Sonden in vollkommen identischen Entladungsteilen der positiven Säule lagen, kann die elektrometrisch gemessene Spannungsdifferenz als wirkliche Spannungsdifferenz angesehen werden, da die durch die Einführung der metallischen Sonde auftretenden Störungen des Plasmas für beide Sonden gleich sein müssen.

Die Röhren wurden nach gründlichem Ausheizen unter Beobachtung aller Vorsichtsmaßregeln gepumpt. Sie enthielten eine Oxydkathode und einen einseitig geschlossenen Nickelzylinder bzw. eine Nickelplatte als Anode. Nach mehrfacher Gasfüllung und vollständiger Reinigung durch Entladungen, die bei etwa 20% höherer Stromstärke, als sie

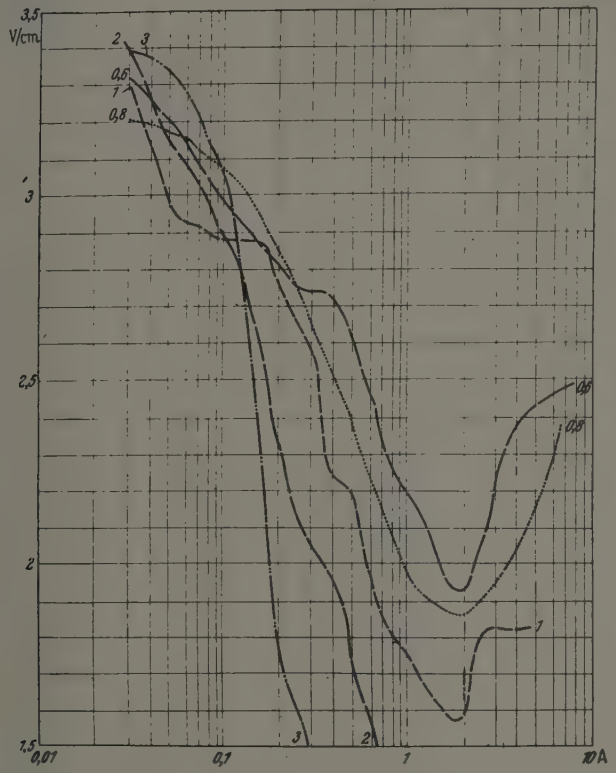


Fig. 4. Gradient der positiven Säule in Ne. Rohrdurchmesser 18 mm. Parameter: Ne-Druck in Torr.

zur Messung verwendet wurden, betrieben wurden, wurde der endgültige Gasdruck bei kalter Röhre eingefüllt und die Röhre abgezogen. Zur Einfüllung eines anderen Druckes wurde sie wieder an die Pumpe gesetzt und neu gepumpt. Diese Methode wurde gewählt, um möglichst alle Totvolumina der Pumpleitungen usw. zu vermeiden, um die Gasdichte im Rohr möglichst konstant zu halten. Durch das häufige Öffnen und Ansetzen der Röhre verschlechterte sich langsam die Emissionsfähigkeit der Oxydkathode. Durch erhöhte Heizung konnte diese Verschlech-

terung ausgeglichen werden. Ab und zu wurde eine neue Kathode eingeschmolzen. Auf die Messung des Gradienten hat die Verschlechterung der Emissionsfähigkeit keinen Einfluß.

Messungen an Neon.

Die Messungen an Neon sind in Fig. 3 bis 5 zusammengestellt. Aufgetragen ist der Gradient der positiven Säule in Abhängigkeit von der Stromstärke. Als Parameter ist der Gasdruck gewählt.

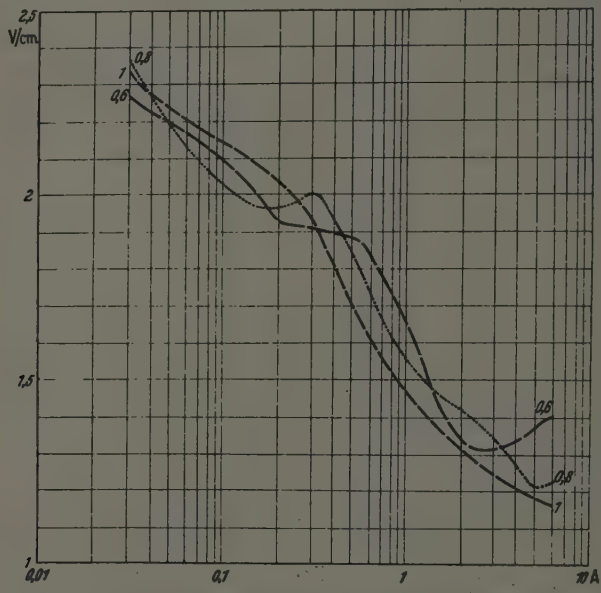


Fig. 5. Gradient der positiven Säule in Ne. Rohrdurchmesser 28 mm. Parameter: Ne-Druck in Torr.

Es handelt sich; um es noch einmal zu betonen, um die Messung des Gradienten der positiven Säule, ohne Berücksichtigung des Kathoden- und Anodenfalls. Wie sich die Ergebnisse bei Berücksichtigung von Kathoden- und Anodenfall auf die Gesamtcharakteristik der Röhre auswirken, wird noch zu erörtern sein.

Man sieht aus den aufgenommenen Kurven, daß es für die verschiedensten Rohrdurchmesser Gebiete der Stromstärke gibt, in denen die Charakteristik der positiven Säule positiv wird, es ist $dV_s/dI > 0$. Mit wachsendem Rohrdurchmesser und wachsendem Druck wird dieser Teil der positiven Charakteristik immer weiter zu höheren Stromstärken verschoben bzw. der Teil einer steilen und weit ausgedehnten positiven

Charakteristik ist am günstigsten zu finden bei niedrigem Druck und kleinem Rohrdurchmesser. Auch wird bei größerem Rohrdurchmesser die positive Charakteristik immer flacher. Eine Ausnahme scheint Helium bei 2 mm Druck zu machen, eine Deutung dieser Ausnahme kann nicht gegeben werden.

Nach Überschreitung eines bestimmten Stromstärkegebietes, in dem die Charakteristik positiv ist, biegt sie wieder in einen negativen Teil um. Der Verlauf danach ist der übliche der negativen Charak-

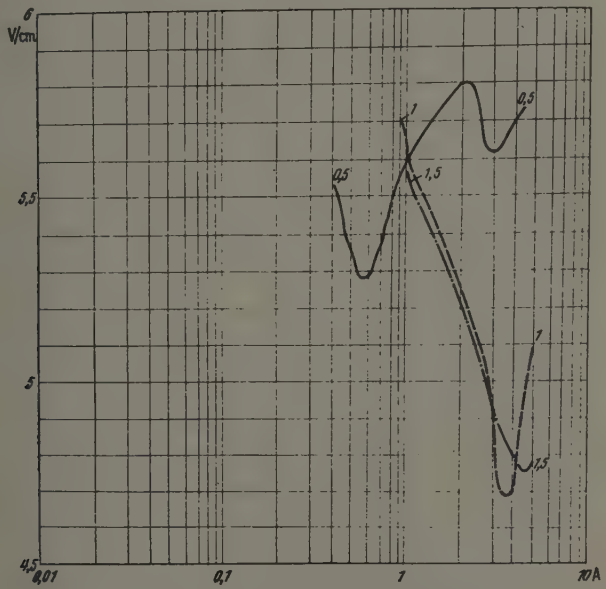


Fig. 6. Gradient der positiven Säule in He. Rohrdurchmesser 18 mm. Parameter: He-Druck in Torr.

teristik. Weit über dieses Gebiet hinauszugehen, ist bei Röhren mit Weichglas wegen der starken Erwärmung der Rohrwand nicht möglich, bei Röhren aus Hartglas kann man noch ein Weiterlaufen in dem negativen Ast beobachten.

Messungen an Helium, Argon und Krypton.

In Fig. 6 bis 11 sind die Meßresultate über den Zusammenhang zwischen Stromstärke und Gradient der positiven Säule in Helium, Argon und Krypton zusammengestellt. Man sieht, daß auch in diesen Edelgasen die Charakteristik einzelne positive Teile innerhalb des im allgemeinen negativen Verlaufs zeigt. Eine eigenartige Erscheinung, auf

die hier besonders hingewiesen sei, ist darin zu sehen, daß der Einsatz des positiven Teiles der Charakteristik bei allen Gasen bei denselben Drucken bei ungefähr derselben Stromstärke erfolgt. Über den Versuch zur Deutung dieser Erscheinung wird weiter unten zu sprechen sein.

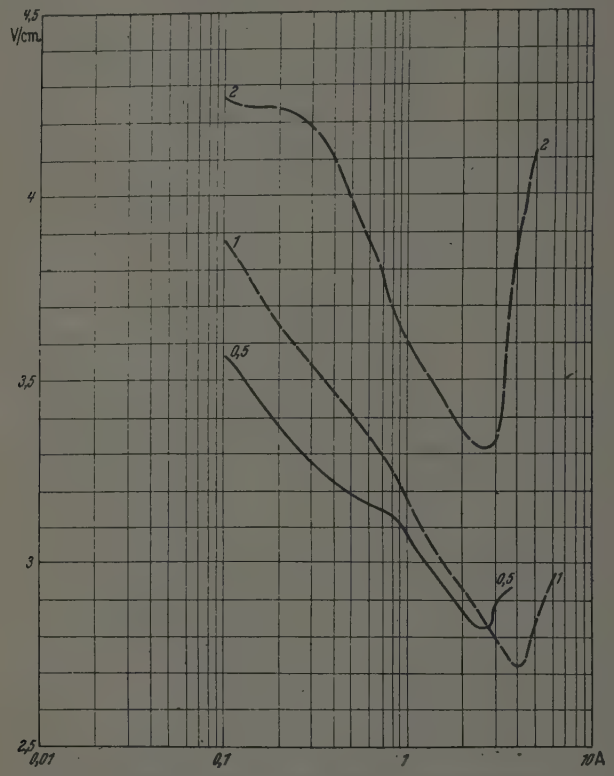


Fig. 7. Gradient der positiven Säule in He. Rohrdurchmesser 28 mm. Parameter: He-Druck in Torr.

Versuche zum Betrieb der Röhren mit positiver Charakteristik am Netz ohne Vorschaltwiderstand.

Die technische Auswertung und damit der Beweis für das reelle Vorhandensein des gefundenen Effektes der vorstehend beschriebenen Versuche ist der Betrieb derartiger Entladungen ohne Vorschaltwiderstand direkt am Netz. Dieser Versuch wurde mit Erfolg durchgeführt[1]). Dabei sind einige Punkte zu berücksichtigen.

[1]) DRP. 666510 der Patent-Treuhand-Ges. f. elektr. Glühlampen m. b. H.

Da es sich um Röhren handelt, die mit Oxydkathoden, bei denen die Bogenentladung punktförmig ansetzt, betrieben werden, und bei denen die Kathode in gewissen Grenzen als beliebig ergiebig betrachtet werden kann, muß man die Charakteristik des Kathodenfalls negativ

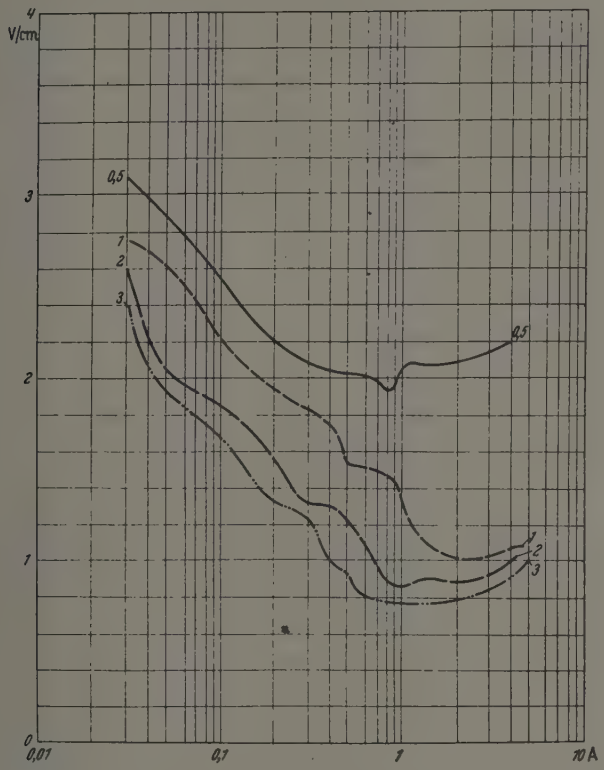


Fig. 8. Gradient der positiven Säule in Ar. Rohrdurchmesser 10 mm. Parameter: Ar-Druck in Torr.

annehmen, d. h. bei stärkerer Stromentnahme sinkt der Kathodenfall sehr stark ab. Da sich die vorher beschriebenen Messungen aber nur auf den Spannungsabfall längs der positiven Säule beziehen, ist über die an der gesamten Röhre liegende Spannung noch nichts ausgesagt. Man kann aber für den Betrieb derartiger Röhren mit positiver Charakteristik der ganzen Röhre die Bedingung vorschreiben:

$$l_1 \frac{dV_k}{dI} + l_2 \frac{dV_g}{dI} + l_3 \frac{dV_A}{dI} > 0. \qquad (1)$$

I = Entladungsstrom, V_k = Gradient des Kathodenfalles (Volt/cm), V_g = Gradient der positiven Säule (Volt/cm), V_A = Gradient des Anodenfalles (Volt/cm), l_1 = Ausdehnung des Kathodenfallgebietes in Richtung der Achse der Röhre in cm, l_2 = Länge der positiven Säule in cm, l_3 = Ausdehnung des Anodenfallgebietes in Richtung der Achse in cm.

Die Charakteristik des Anodenfalles kann im allgemeinen in den verwendeten Stromstärkebereichen in Edelgasen als schwach positiv

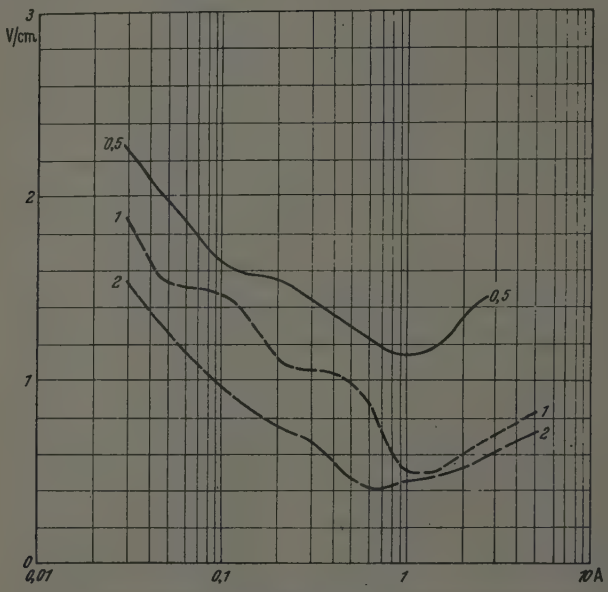


Fig. 9. Gradient der positiven Säule in Kr. Rohrdurchmesser 10 mm. Parameter: Kr-Druck in Torr.

angenommen werden. Es muß also für die Erreichung der positiven Charakteristik des gesamten Rohres

$$l_1 \frac{\mathrm{d}V_k}{\mathrm{d}I} \leqq l_2 \frac{\mathrm{d}V_g}{\mathrm{d}I} \tag{2}$$

sein.

Die räumlichen Abmessungen von Anodenfall- und Kathodenfallgebiet sind klein gegen die Länge der positiven Säule.

$$l_1 \ll l_2,$$
$$l_3 \ll l_2.$$

Aus (2) sieht man, daß die Charakteristik um so stärker positiv ist, je größer l_2 ist, d. h. technisch, an je höherer Netzspannung sie betrieben

werden. Andererseits kann man aus (1) bei Kenntnis des Gradienten der positiven Säule und Kenntnis der Gesamtspannung an einem Rohr mit gewünschtem Durchmesser und Druck und beliebiger Länge die Länge des Rohres errechnen, die notwendig ist, um die Röhre an einer vorgegebenen Netzspannung ohne stabilisierendes Glied, bei Gleichstrom also ohne Widerstand zu betreiben.

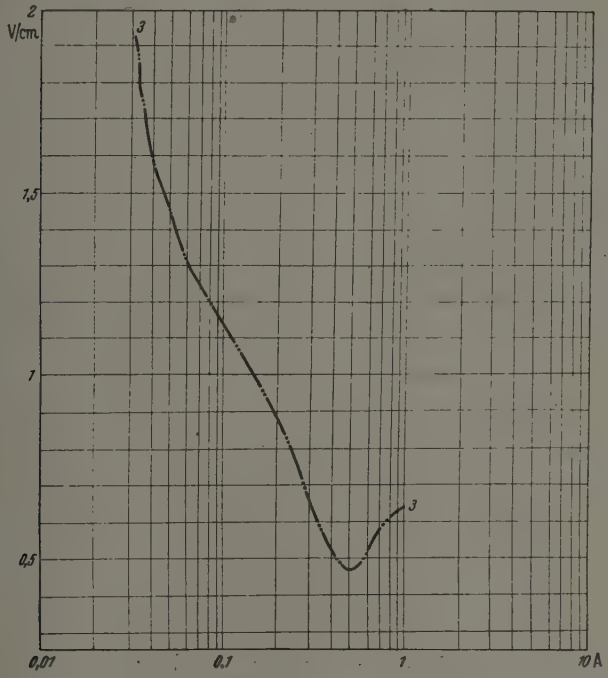


Fig. 10. Gradient der positiven Säule in Kr. Rohrdurchmesser 20 mm. Parameter: Kr-Druck in Torr.

Es ist günstig, die Steigerung des positiven Astes möglichst groß zu machen, um auch bei starken Netzschwankungen nicht über das Maximum der Charakteristik zu rutschen und damit in das Gebiet der fallenden Charakteristik zu gelangen bzw. ist es günstig, diesen „Arbeitspunkt" der Entladung möglichst in die Nähe des Minimums der Charakteristik zu legen. Direkt im Minimum kann die Entladung nicht betrieben werden, da sie dann bei einem geringen Abfallen der Netzspannung erlischt.

Derartige Röhren sind bereits mit guter Lebensdauer von mehreren hundert Stunden in Betrieb gewesen.

Messungen der Lichtausbeute.

Kurze orientierende Messungen der Lichtausbeute ergaben im Gebiet der positiven Charakteristik bei einem Rohr mit 18 mm Innendurchmesser etwa 20 Lumen/Watt.

Versuche zur Deutung des Befundes der positiven Charakteristik.

Die Erklärung einer positiven oder negativen Charakteristik des Plasmas einer nicht im thermischen Gleichgewicht befindlichen Ent-

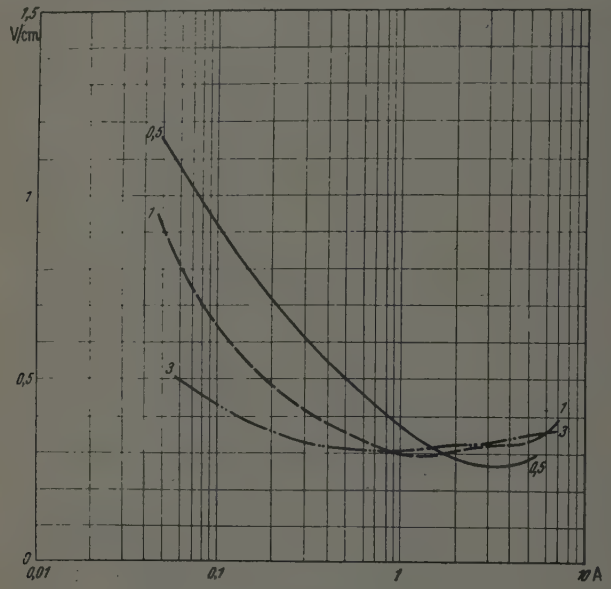


Fig. 11. Gradient der positiven Säule in Kr. Rohrdurchmesser 28 mm. Parameter: Kr-Druck in Torr.

ladung aus den Einzelprozessen ist von Rompe und Schön[1]) vorgenommen worden. Die positive Charakteristik ist hiernach dann zu erwarten, wenn die energieverzehrenden Prozesse in der Entladung, also

Rekombination an den Wänden,

Rekombination im Volumen unter Ausstrahlung,

Wärmeübertragung vom Gas an die Wände,

Ausstrahlung verschiedener Terme,

Diffusion angeregter Atome an die Wand,

[1]) R. Rompe u. M. Schön, a. a. O.

die „Blindprozesse", also solche, die Energie aufnehmen, sie aber durch inverse Prozesse der Entladung wieder zuführen, stark überwiegen.

Diese Wechselwirkung der Entladungspartner kann durchaus eine Erklärung geben für die angegebenen experimentellen Befunde. Wie weit sie zutrifft, läßt sich auf Grund der vorliegenden Meßresultate nicht sagen.

Andererseits wird für die Deutung der Befunde auch ein Mechanismus herangezogen werden müssen, der normalerweise bei der Betrachtung der positiven Säule der Gasentladung als vernachlässigbar angenommen wird. Im allgemeinen nimmt man bei Überlegungen über den Mechanismus des Plasmas aus den Elementarprozessen die Ionen des Gases als quasi-ruhend an; sie haben nur ihre thermische, kugelsymmetrisch verteilte Geschwindigkeit.

Eine Trift in Richtung der Achse der Entladung nimmt man höchstens für die Elektronen, nicht aber für die Ionen an. Für die Deutung des hier vorliegenden Effektes muß man jedoch berücksichtigen, daß die Ionen in der Entladung längs der Achse wandern, und zwar, wie Rüttenauer [1]) fand, in dem fraglichen Gebiet zur Anode. Dabei ist im Grunde gleichgültig, ob ein Ion innerhalb der Entladung eine kurze oder lange Lebensdauer hat. Es genügt zu wissen, daß zur Aufrechterhaltung der Entladung eine notwendige Zahl von Ionen vorhanden ist, die durch das Feld bewegt werden.

Durch die Ionenwanderung im elektrischen Feld entsteht eine Druckdifferenz zwischen dem der Anode und dem der Kathode zugekehrten Teil der Entladung. Rüttenauer hat diesen Druckeffekt an Edelgasen gemessen. Alterthum und Lompe [2]) haben eine deutlich sichtbare und sehr schnell eingestellte Entmischung von Gasen verschiedener Anregungs- und Ionisierungsspannung in der Entladung festgestellt. Seeliger [3]) beschreibt diesen Befund eingehender und geht auf die verschiedenen, möglichen Deutungsversuche näher ein.

Diese durch Ionenwanderung entstehende Druckdifferenz wird wieder rückgängig gemacht durch die thermische Rückdiffusion der ungeladenen Atome. Unter den üblichen Betriebsbedingungen der Entladung ergibt die Überlagerung der beiden Effekte die allgemein beobachtete negative Charakteristik, da die Druckdifferenz bei kleineren Stromdichten sich nicht besonders stark ausbilden kann und die thermische Rückdiffusion den Effekt immer wieder vernichtet.

[1]) A. Rüttenauer, a. a. O. — [2]) H. Alterthum u. A. Lompe, a. a. O. — [3]) R. Seeliger, Einf. in d. Gasentladung, S. 117ff., 433ff.

Wie Rüttenauer festgestellt hat, steigt die Druckdifferenz mit abnehmendem Gesamtdruck in der Röhre und außerdem mit zunehmendem Strom. Man kann nun schließen, daß durch die Druckerniedrigung mit steigendem Strom — das bedeutet aber eine verringerte Dichte — der Gradient steigt. Bei engen Röhren wird dieser Effekt besonders bemerkbar, da die Rückdiffusion nicht so stark in Erscheinung treten kann. Über das Zustandekommen der Druckdifferenz wird ein noch näher zu beschreibender Deutungsversuch Langmuirs herangezogen. Hier genügt vorerst die Feststellung des Vorhandenseins. Zum experimentellen Beweis für die Wirkung des Druckunterschiedes auf den

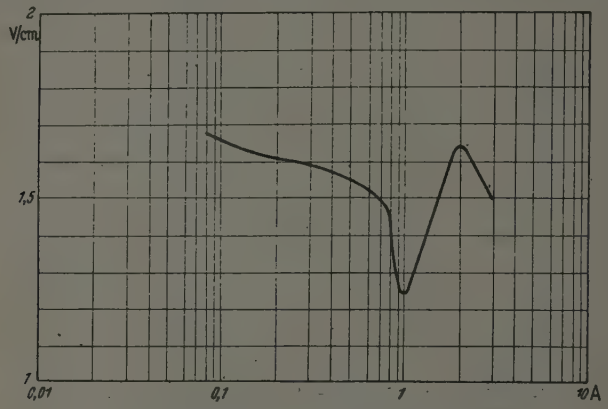


Fig. 12. Gradient der positiven Säule in Ne. Rohrdurchmesser 20 mm. (Großes Volumen des Kathodenraumes.)

Gradienten wurde eine Entladungsröhre verwendet, deren Kathode in einen größeren Kolben von 60 mm Durchmesser und 150 mm Länge eingeschmolzen war. Das Rohr selbst, in dem der Gradient gemessen wurde, hatte einen inneren Durchmesser von 18 mm. Der große Raum um die Kathode bildete ein Reservoir, aus dem genügend Gas nachgeliefert werden konnte, eine so starke Druckdifferenz sich also nicht ausbilden konnte. Es zeigt sich, wie in Fig. 12 dargestellt, daß die positive Charakteristik in den Bereichen, in denen sie vorher gut bemerkbar auftrat, nicht gemessen werden konnte.

Eine unter diesen Gesichtspunkten merkwürdige, experimentell beobachtete Tatsache ist das spätere Umbiegen des positiven Astes der Charakteristik in einen wieder fallenden Teil. Dieser läßt sich wohl erklären aus den Messungen, die Rüttenauer gemacht hat. Es hatte sich herausgestellt, daß bei niedrigen Drucken unter 0,5 Torr die Druck-

zunahme an der Anode nicht mehr aufrechterhalten wird. Man kann wohl annehmen, daß die Einstellung des Druckunterschiedes nur bis zu einer gewissen Höhe vor sich gehen kann und daß dann ein Optimum überschritten wird. Die an sich negative Charakteristik überwiegt wieder, die Gesamtcharakteristik wird negativ.

Langmuir[1]) gibt als Deutung des auftretenden Druckunterschiedes eine Ionenwanderung durch Aufladungserscheinungen der isolierenden Wände der Entladung. Durch die negative Aufladung der Wände wird auf die positiven Ionen ein Impuls in Richtung auf die Anode übertragen. Diese Erklärung erscheint plausibel, wenn man das in Fig. 2 gezeigte Oszillogramm betrachtet. Bei diesem mit einem Wechselstrom von 50 Perioden aufgenommenen Oszillogramm fällt der positive Teil der Charakteristik auf. Es ist an sich verwunderlich, daß die Einstellung des positiven Astes, der offensichtlich wie bei der Gleichstromentladung auf die Druckunterschiede zurückzuführen ist, so schnell erfolgt, wenn man dabei in Rechnung stellt, daß die Ionen natürlich relativ langsam im Längsfelde der positiven Säule wandern. Nimmt man aber den von Langmuir angegebenen Reaktionsdruck der Wandaufladung, der den Ionen einen zusätzlichen Impuls in Richtung auf die Anode erteilt, als Begründung des Druckunterschiedes an oder zum mindesten als einen Anteil dieser Wanderung, dann ist die schnelle Einstellung besser zu erklären, da die Einstellung der Wandaufladung viel schneller erfolgt, als das Feld beim Betrieb mit 50 Perioden wechselt.

Die Erklärung der positiven Charakteristik aus dem durch die Entladung selbst hervorgerufenen Druckunterschied zwischen Anode und Kathode findet noch eine Bekräftigung in der aus den Resultaten der Fig. 3 bis 11 resultierenden Tatsache, daß die positive Charakteristik bei allen Edelgasen bei ungefähr derselben Stromstärke, unter sonst gleichen Bedingungen, einsetzt. Die Begründung dieser Tatsache aus der Annahme des Druckunterschiedes läßt sich nach rein gaskinetischen Überlegungen finden. Wenn andere Faktoren, z. B. solche, die auf der Ionisierungsspannung, der Ionisierungsfunktion oder ähnlichem basierten, an dem Auftreten der positiven Charakteristik beteiligt wären, dann müßte sich diese Tatsache in den Charakteristiken der verschiedenen Gase verschieden auswirken. Der Druckeffekt kann aber bei den verschiedenen Gasen ungefähr in derselben Größenordnung liegen. Der gaskinetische Stoßquerschnitt der Atome und Ionen der

[1]) I. Langmuir, Journ. Frankl. Inst. 1923, S. 751.

Edelgase ist auf Grund ihres sehr ähnlichen Atomaufbaues ziemlich gleich, so daß man auch die Wirkung auf die Wanderung im Felde und die dieser entgegenwirkende Rückdiffusion als ähnlich annehmen kann. Der Wert des gaskinetischen Querschnittes von Helium fällt etwas stärker aus den Werten für die anderen Edelgase heraus, die Charakteristik von Helium weicht auch am meisten von den Werten der anderen Edelgase ab.

Die beschriebenen Versuche zeigen, daß der Effekt der positiven Charakteristik des Plasmas der Entladung mit Wahrscheinlichkeit auf den sich selbst ausbildenden Druckunterschied in der Säule zurückzuführen ist.

Wieweit diese Erscheinungen verstärkt oder kompensiert werden durch die bei Rompe und Schön angeführten sich überschneidenden Einzelprozesse des Plasmas, läßt sich auf Grund der Messungen nicht klären. Dazu bedarf es weitergehenderer Beobachtungen, in Verbindung mit spektroskopischen Untersuchungen über die Intensitätsverschiebung im Spektrum und ähnliche für die Entladung charakteristische Effekte. Daß auf Grund einer Ausmessung der Energieabgabe durch Strahlung vielleicht eine weitgehende Deutung der Befunde gegeben werden kann, erscheint auf Grund einer subjektiven qualitativen Beobachtung möglich. Es wurde nämlich bemerkt, daß die Entladung in Neon bei Stromstärken, bei denen die Charakteristik positiv war, gelber erscheint als bei niedrigeren Stromstärken. Der Effekt konnte aber aus äußeren Gründen nicht weiter untersucht werden. Bekannt ist, daß in der Neonentladung die starke Linie $\lambda = 6403$ Å zugunsten der gelben Linien verschwindet oder mindestens schwächer wird.

(Mitteilung der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung.)

Die kontinuierliche Strahlung der Quecksilberhochdruckentladung[1]).

Von Fritz Rössler in Berlin, z. Zt. Greifswald.

Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 15. Juli 1943.)

Wie in einer früheren Arbeit wird durch Rechnung noch einmal kurz gezeigt, daß im Falle von Temperaturanregung die Leuchtdichteverteilung von Linien- und Kontinuumsstrahlung senkrecht zum Lichtbogen einer Quecksilberhochdrucklampe einen gleichartigen Verlauf haben muß. Die Rechnungen werden diesmal auf den Fall der Rekombination erweitert. Das auf der gleichen Leuchtdichteverteilung aufbauende Verfahren, mittels der Anregungsspannung bekannter Linien die Meßanordnung zu eichen und dann unbekannte Anregungsspannungen von kontinuierlicher Strahlung zu bestimmen, wird kurz erläutert und die bei ultravioletter Strahlung und bei höheren Drucken auftretenden meßtechnischen Schwierigkeiten werden überwunden. Vergleichsmessungen mit verschiedenen Monochromatoren, Lampen sehr verschiedenen Druckes und bei Betrieb mit Gleich- bzw. Wechselstrom ergaben innerhalb der Fehlergrenzen stets die gleiche Anregungsspannung von rund 8,6 Volt für das Kontinuum. Auch Welligkeitsmessungen der Lichtemission bei Wechselstrombetrieb bestätigten die Werte. — Die gemessene Anregungsspannung und sämtliche anderen Eigenschaften der kontinuierlichen Strahlung wie Leistungs-, Druckabhängigkeit und Größe der Strahlungsausbeute, spektrale Energieverteilung und eine linienartige Struktur werden eingehend diskutiert. Dabei werden auch neue eigene Meßergebnisse verwendet. Die verschiedenen Möglichkeiten der Entstehung des Kontinuums werden besprochen. Es ergibt sich, daß das Kontinuum bei hohen und tiefen Drucken den gleichen Ursprung hat. Ganz entschieden werden kann die Frage nach der Entstehung des Kontinuums noch nicht. Jedoch erscheint die Annahme von Stoßmolekülen und damit ungeladenen Teilchen als wahrscheinlich. Auf den Stoßmechanismus wird im einzelnen eingegangen, die spektrale Verteilung und Struktur des Kontinuums begründet und auf ein zu erwartendes Kontinuum bei 1300 Å hingewiesen.

Problemstellung.

Von der Quecksilberhochdruckentladung wird besonders bei hohen Drucken in allen Spektralbereichen ein Kontinuum emittiert. Obwohl es im Schrifttum[2]) bereits häufige Erwähnung gefunden hat, sind nur mehr qualitative Angaben über seine Eigenschaften bekannt.

---

[1]) Greifswalder Habilitationsschrift. — [2]) Handb. d. Lichttechn. I, Berlin 1938; W. Uyterhoeven, Elektrische Gasentladungslampen, Berlin 1938; W. Finkelnburg, Kontinuierliche Spektren, Berlin 1938.

Noch recht ungeklärt ist die Art seiner Entstehung[1]). Bereits in einer früheren Arbeit[2]) wurden Anregungsspannungen mitgeteilt, die nach einem neuen Verfahren bestimmt worden waren. Diese bisher nur für das sichtbare Gebiet ausgeführten Messungen sollen in dieser Arbeit auf den ultravioletten Spektralbereich und höhere Drucke ausgedehnt werden. Da wegen Wehrmachtsdienstes des Verfassers es erst heute möglich ist, die Ergebnisse zu veröffentlichen[3]), sei es gestattet, noch einmal kurz auf die Grundlage des Verfahrens einzugehen, wobei zugleich die zugrunde liegenden Rechnungen erweitert werden sollen.

Zur Klärung der Entstehung des Kontinuums wird man zunächst seinen Träger feststellen, also entscheiden müssen, ob es sich um ein Atom- oder ein Molekülkontinuum handelt. Anders ausgedrückt muß entschieden werden, ob das Kontinuum durch Atomrekombination eines Ions mit einem Elektron (also durch geladene Teilchen) oder durch Strahlung eines Moleküls (also durch ungeladene Teilchen) entsteht. Es ist im allgemeinen schwierig, diese Entscheidung herbeizuführen. Im Falle der Hochdruckentladung wird sie aber dadurch erleichtert, daß man die Besetzung angeregter Niveaus angeben kann. Die Anregung der kontinuierlichen Strahlung in der Hochdruckentladung geschieht nämlich, von einer geringfügigen Ausnahme[4]) abgesehen, rein thermisch[5]), d. h. die Gastemperatur legt die Besetzung der einzelnen Niveaus und viele andere Eigenschaften der Entladung fest.

Zu diesen gehört die Einschnürung[6]) der Hochdruckentladung und die dadurch bedingte Leuchtdichteverteilung der Strahlung quer zum Entladungsbogen. Messungen in Arbeit I hatten nun ergeben, daß die Verteilung des Rotkontinuums dem der Linien in der Form entspricht. Dadurch wird zunächst die Vermutung nahegelegt, den Ursprung des Kontinuums einem Atom zuzuschreiben, d. h. also Atomrekombination anzunehmen. Ob diese Folgerung zu Recht besteht, kann aber erst die jetzt durchzuführende genauere Betrachtung zeigen.

---

[1]) A. Unsöld, Ann. Phys. **33**, 607, 1938; R. Rompe, P. Schulz u. W. Thouret, ZS. f. Phys. **112**, 369, 1939; W. Elenbaas, Physica **6**, 299, 1939. Weitere Arbeiten später. — [2]) F. Rössler, ZS. f. Phys. **112**, 667, 1939 (Arbeit II). — [3]) Ein Teil der Anregungsspannungen wurde auf der Tagung des Gaues Niedersachsen der physikalischen Gesellschaft in Göttingen am 1. Juli 1939 mitgeteilt. Die Veröffentlichung der Ergebnisse und ihre Deutung wurde durch die Zeitumstände bis jetzt verzögert. — [4]) F. Rössler, ZS. f. Phys. **110**, 352, 1938 (Arbeit I). — [5]) R. Mankopf, ebenda **86**, 161, 1933; H. Witte, ebenda **88**, 415, 1934; W. Elenbaas, Physica **1**, 673, 1934; H. Hörmann, ZS. f. Phys. **97**, 539, 1935. — [6]) R. Seeliger, Phys. ZS. **33**, 314, 1932; Physik der Gasentladungen, S. 255 u. 361, Leipzig 1934; E. Fischer u. H. König, Phys. ZS. **39**, 313, 1938; F. Rössler, Arbeit I.

Leuchtdichteverteilung und Anregungsspannungen.

Berechnung der Leuchtdichteverteilung. Wir berechnen zunächst die zu erwartende Strahlstärke für Linienstrahlung, ein Rekombinationskontinuum und für ein Molekülkontinuum. Dabei nehmen wir thermisches Gleichgewicht an, wie es für das Plasma der Quecksilberhochdruckentladung gilt[1]). Wir postulieren also, daß die für Ionisation Termanregung und Translation maßgebenden Temperaturen gleich sind. Dann ist die Zahl der angeregten Teilchen nach Boltzmann gegeben durch:

$$S_L = n\, e^{-\frac{eV}{kT}}, \tag{1}$$

wobei n die Teilchenzahl pro cm³, V die Anregungsspannung des angeregten Niveaus und T die Temperatur darstellen. Dieser Wert (1) ist bereits proportional der *Linienstrahlung* S_L [der Proportionalitätsfaktor enthält u. a. die Übergangswahrscheinlichkeiten und statistischen Gewichte[2])]. Bereits hier wie auch weiterhin werden unwesentliche Konstanten fortgelassen.

Die Strahlung eines *Moleküls* kommt dagegen erst dann zustande, wenn ein angeregtes und ein unangeregtes Atom zusammengestoßen sind und ein angeregtes Molekül gebildet haben[3]). Es muß also Ausdruck (1) noch mit der Stoßzahl (2) multipliziert werden, um die Kontinuumsstrahlung S_M der Gl. (3) wieder bis auf eine Proportionalitätskonstante zu ergeben:

$$n\, T^{1/2}, \tag{2}$$

$$S_M = n^2 T^{1/2}\, e^{-\frac{eV}{kT}}. \tag{3}$$

Betrachten wir schließlich noch die Strahlung von Kontinuum durch *Atomrekombination*. Dabei muß dem einfachsten Bilde nach, das man sich von dem Vorgange macht, ein Ion mit einem Elektron zusammenstoßen. Die kontinuierliche Strahlung S_R ist daher proportional dem Produkt aus Ionen- und Elektronenkonzentration multi-

[1]) R. Rompe u. M. Steenbeck, Ergebn. exakt. Nat. 18, 361, 1939; dort auch Hinweise auf frühere Arbeiten. — [2]) Die Berücksichtigung einer Zustandssumme im Nenner ist nicht notwendig, weil die Zahl der angeregten Teilchen so klein ist, daß keine nennenswerte Verringerung der Teilchen im Grundzustande auftritt. — [3]) Die Bildung eines angeregten Moleküls durch Anregung eines Moleküls im Grundzustand ist beim Quecksilber wegen der geringen Stabilität des unangeregten Moleküls (die Dissoziationsspannung beträgt nur 0,1 Volt) sehr unwahrscheinlich. Eine solche Anregung müßte nämlich im Dreierstoß von 2 Atomen mit einem Elektron erfolgen und kann daher außer Betracht bleiben [vgl. Fußnote [1]) auf S. 300].

pliziert mit $T^{1/2}$ entsprechend Gl. (2). Beide Konzentrationen sind gleich, da das Plasma der Bogenentladung nach außen hin neutral ist; jeder einzelne Wert ist gleich dem Produkt aus Ionisationsgrad α und n. Also:

$$S_R = n^2 \alpha^2 T^{1/2}. \tag{4}$$

Der Ionisationsgrad der Hochdruckentladung ist wegen des thermischen Gleichgewichts durch die Sahasche Gleichung gegeben:

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} p = A T^{5/2} e^{-\frac{eV_i}{kT}}. \tag{5}$$

Dabei bedeutet p den Gasdruck, V_i die Ionisationsspannung und A eine Konstante. Für die Gasentladung ist α sehr klein, daher kann der Nenner $1-\alpha^2$ durch 1 ersetzt werden. Es ergibt sich also die Gleichung:

$$S_R = p^{-1} n^2 T^3 e^{-\frac{eV_i}{kT}}. \tag{6}$$

Drücken wir noch n durch den Druck p aus und lassen wieder alle unwesentlichen Konstanten fort, so erhalten wir aus (1), (3) bzw. (6)

$$S_L = p T^{-1} e^{-\frac{eV}{kT}}, \tag{7}$$

$$S_M = p^2 T^{-3/2} e^{-\frac{eV}{kT}}, \tag{8}$$

$$S_R = p T e^{-\frac{eV_i}{kT}}. \tag{9}$$

Bemerkenswert ist an Gl. (9), daß die Rekombinationsstrahlung nicht der zweiten, sondern der ersten Potenz des Druckes proportional ist.

In den eben abgeleiteten Gleichungen stellen S_L, S_M, S_R die jeweilige Strahlung S pro Volumeneinheit dar. Um zu der experimentell zugänglichen Leuchtdichteverteilung zu kommen, muß also noch die Summation über das Volumen der Entladung vorgenommen werden. In Fig. 1 ist der Lampenquerschnitt durch einen Kreis, die Meßrichtung durch einen Pfeil dargestellt, der sich während der Messung entlang der x-Achse verschiebt. Was bei der Messung der Leuchtdichteverteilung, wobei der Lichtbogen auf den Monochromatorspalt abgebildet wird, wirklich zur Beobachtung kommt, ist die Summation der Strahlung über y bis zur Rohrwand und die Summation an der Stelle a über x für eine geringe Breite d je nach den gewählten Meßbedingungen (Spaltweite

des Monochromators und Abbildungsverhältnis). Die gemessene Strahlung nennen wir S^*, dann ist wegen der Symmetrie von S in y:

$$S^* = \int_a^{a-d} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} S \,\mathrm{d}y = 2 \int_a^{a-d} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} S \,\mathrm{d}y \sim 2d \int_{\sqrt{R^2-a^2}}^{0} S_{(x=a)} \,\mathrm{d}y. \qquad (10)$$

Da die S-Werte als Funktion der Temperatur gegeben sind, führen wir diese als unabhängige Variable ein. Wir könnten bereits jetzt an dieser Stelle die Rechnung als beendet ansehen und unsere weiteren Schlußfolgerungen ziehen. Der größeren Deutlichkeit halber sei aber für einen naheliegenden Temperaturverlauf die Rechnung weitergeführt und der Typus der Integrale bestimmt. Es sei jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Annahme dieses bestimmten Temperaturverlaufs für die weiteren Folgerungen [anschließend an Gl. (12)] ohne Belang und auf unser Endergebnis ohne Einfluß ist.

Nach Elenbass[1]) kann man den Temperaturverlauf in erster Näherung als parabelförmig ansehen, was unter Verwendung von Wandtemperatur T_w und maximaler Temperatur T_a in der Achse der Entladung zu Gl. (11) führt.

$$T = T_A - (T_A - T_w)\frac{r^2}{R^2} = T_A - \frac{T_A - T_w}{R^2}(a^2 + y^2), \qquad (11)$$

$$dT = -\frac{2(T_A - T_w)}{R^2} y \cdot \mathrm{d}y \quad \text{und mit} \quad \frac{a}{R} \equiv \gamma$$

$$S^* = \int_{T_w}^{T_A - (T_A - T_w)\gamma^2} \frac{S_{(x=a)}}{\sqrt{(T_A - T) - (T_A - T_w)\gamma^2}} \mathrm{d}t \qquad (12)$$

(unwesentliche Konstanten sind auch hier wieder fortgelassen).

Setzen wir nun die Werte für S aus Gl. (7), (8) bzw. (9) in (12) ein, so können wir p vor das Integral ziehen und als Konstante fortlassen, da wegen des Strömungsgleichgewichts der Druck über den gesamten Rohrquerschnitt konstant ist. Die Integrale für S^* sind explizit nicht angebbar. Betrachtet man aber die Funktionen unter dem Integral, so bestehen sie im wesentlichen aus einer e-Funktion, einer Potenz von T und einem Wurzelausdruck im Nenner. Die e-Funktion und der reziproke Wurzelausdruck im Nenner sind beides sehr steil von der Rohrmitte aus abfallende Funktionen[2]). Sie machen also den

[1]) W. Elenbaas, Physica 1, 211, 1934. — [2]) Diese Tatsache ist sofort aus der Bemerkung ersichtlich, daß die Wurzel für die Temperatur der oberen Grenze des Integrals unabhängig vom γ-Wert stets verschwindet.

Hauptwert des Integrals aus, während die Potenzen von T zum mindesten in der Rohrmitte (für kleine γ) weniger zur Geltung kommen. Auf irgendwelche Konstanten kommt es uns dabei nicht an, da wir den Maximalwert in der Rohrmitte stets gleich 1,0 setzen werden. Die verschieden hohen Potenzen der Temperatur spielen demnach keine unterscheidende Rolle, so daß S^* stets die gleiche, monoton verlaufende Funktion von V bzw. V_i und γ ist.

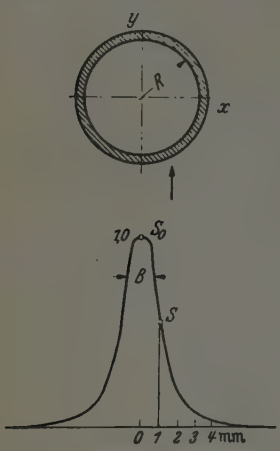


Fig. 1. Lampenquerschnitt und Leuchtdichteverteilung (schematisch). (Übernommen aus ZS. f. Phys. 112, 669, Fig. 2.)

$$S^* = f(V, \gamma) \text{ für } S_L, S_M \text{ und } S_R. \quad (13)$$

Damit ist aber gezeigt, daß der Typus der Leuchtdichteverteilung unabhängig von der Entstehung der kontinuierlichen Strahlung stets der gleiche wie der der Linienstrahlung ist. Eine Entscheidung über die beiden Entstehungsmöglichkeiten der Strahlung kann also aus der gleichartigen Leuchtdichteverteilung allein noch nicht gefolgert werden.

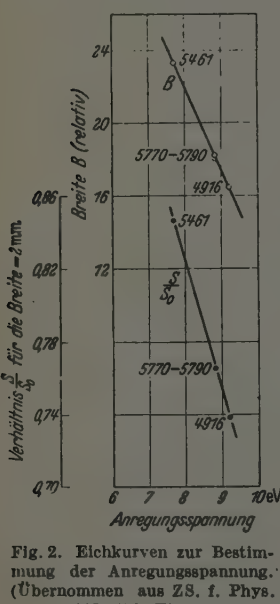


Fig. 2. Eichkurven zur Bestimmung der Anregungsspannung. (Übernommen aus ZS. f. Phys. 112, 672, Fig. 3.)

Methode zur Bestimmung von Anregungsspannungen. Es ist aber möglich, auf dem eben abgeleiteten Ergebnis eine gleich zu besprechende, neuartige Methode zur Bestimmung von unbekannten Anregungsspannungen aufzubauen. Man mißt den Leuchtdichteverlauf und charakterisiert ihn durch einige passende Bestimmungsstücke. Dazu wurde die Halbwertsbreite bzw. um möglichst in Achsennähe zu bleiben und Störungen durch die Wand (Arbeit I) zu vermeiden, die 0,8-Wertsbreite B der Fig. 1 gewählt. Zur Kontrolle wurde noch ein zweites Maß S/S_0 verwandt, das Verhältnis der Leuchtdichte in 1 mm Abstand von der Achse zum Maximalwert in derselben.

Ohne die Funktion f der Gl. (13) im einzelnen kennen zu müssen, kann man sie dann dadurch eliminieren, daß man für eine bestimmte

Entladung die Apparatur durch Strahlung bekannter Anregungsspannung erst einmal eicht und danach diese Eichung auf die unbekannte Strahlung anwendet. Die B- bzw. S/S_0-Werte werden also für mehrere Linien bekannter Anregungsspannung bestimmt, die entsprechenden Eichkurven (Fig. 2) aufgestellt, mit den B- bzw. S/S_0-Werten der unbekannten Anregungsspannungen in die Eichkurve eingegangen und die zugehörigen Voltwerte abgelesen. Dieses Verfahren ist in gleicher Weise für unbekannte Linien wie kontinuierliche Strahlung anwendbar.

Ausführung der Messungen. An der sichtbaren Strahlung des UV-Normals[1]) wurden bereits in Arbeit II Messungen ausgeführt und die Ergebnisse zusammengestellt. Dort wurde auch die verwendete Meßapparatur beschrieben[2]) und auf zu beachtende Vorsichtsmaßregeln eingegangen. Die Erweiterung der Messungen auf das ultraviolette Gebiet und auf Lampen mit höheren Drucken versprach weiteren Aufschluß über den Ursprung kontinuierlicher Strahlung zu geben. Eine schematische Übertragung der bei den früheren Messungen angewandten Methode auf das UV-Gebiet war aber nicht ohne weiteres möglich. Zunächst war die Untersuchung der Querverteilung der ultravioletten Strahlung des UV-Normals nicht geeignet, da wie in Arbeit I gezeigt werden konnte, die im ultravioletten Gebiet emittierte kontinuierliche Strahlung nicht durchweg durch Temperaturanregung, sondern zu einem beträchtlichen Teil durch Fluoreszenzanregung entsteht. Dadurch hatte sich dann ein völlig anderer Verlauf der Leuchtdichte über den Bogenquerschnitt ergeben, so daß die Voraussetzungen für die Anwendung des Verfahrens zur Bestimmung der Anregungsspannung nicht mehr gegeben waren. Bereits in der genannten Arbeit war aber festgestellt worden, daß bei größeren Drucken dieser Fluoreszenzanteil der kontinuierlichen Strahlung verschwindet. Es war also möglich, bei höheren Drucken die Messung nach dem bisherigen Verfahren auszuführen. Da sich nun im sichtbaren Gebiet, wie noch ausführlich erörtert wird, kein Unterschied der Anregungsspannung der kontinuierlichen Strahlung für kleine und große Drucke ergeben hat, kann man das gleiche Verhalten auch für die ultraviolette Strahlung annehmen. Es genügt daher, die Messung nur bei hohen Drucken auszuführen.

Die Verwendung einer Lampe von hohem Druck bringt jedoch gewisse Schwierigkeiten mit sich. Es war bereits früher erwähnt worden,

[1]) H. Krefft, F. Rössler u. A. Rüttenauer, ZS. techn. Phys. **18**, 20, 1937. Es handelt sich dabei um eine aus Quarzglas hergestellte Quecksilberhochdrucklampe mit einem Dampfdruck von etwa 1,5 Atm. — [2]) H. Krefft u. M. Pirani, ebenda **14**, 393, 1933.

daß es für die genaue Ausführbarkeit der Messungen wesentlich ist, daß der Bogen konstant steht, d. h. immer an der gleichen Stelle der Elektrode ansetzt. Die Versuche wurden zunächst mit einer kleinen kugelförmigen, von Kern[1]) hergestellten Lampe ausgeführt, die einen Hg-Dampfdruck von nahezu 50 at besaß; die Messungen waren aber nur verhältnismäßig ungenau ausführbar, weil der Bogen nicht ruhig genug stand. Soweit sich diese Messungen auswerten ließen, paßten sie gut zu den mit einer wassergekühlten Lampe[2]) HgF 700 erhaltenen. Diese Lampe besaß einen Hg-Dampfdruck von annähernd 85 at und erwies sich als sehr gut geeignet für die Messungen. Der Bogen war durch die enge Kapillare fest geführt und stand vollständig ruhig. Er wurde mit korrigiertem Quarz-Flußspatobjektiv zweifach vergrößert auf den Monochromatorspalt abgebildet, um ihn bequem ausmessen zu können. Die Selbstabsorption der Linie 2537 Å war wegen der geringen Schichtdicke und der großen Linienverbreiterung lange nicht so störend wie bei der vorigen Lampe.

Der hohe Druck bedingt bekanntlich einen starken kontinuierlichen Untergrund. Wird nun für die Eichung der Meßanordnung eine Messung an einer Linie vorgenommen, so muß sehr darauf geachtet werden, daß die kontinuierliche Strahlung die Eichkurven nicht beeinflußt. Je größer die Differenz der Anregungsspannung von Linie und Kontinuum ist, desto stärker wird die Eichung durch die kontinuierliche Strahlung gestört. Es scheiden daher zunächst alle schwachen Linien aus und für die Eichung bleiben lediglich die Linien 3650/63, 4358, 5461 bzw. 5770/90 Å. Je zwei hiervon haben ungefähr gleiche Anregungsspannung, so daß nur zwei Werte der Anregungsspannung für die Eichung übrigbleiben. Daher konnte die Eichkurve nur so festgelegt werden, daß beide Punkte durch eine Gerade verbunden wurden, wie sie sich in Fig. 3 der Arbeit II (hier als Fig. 2 wieder abgedruckt) ergeben hatte. Die möglicherweise dadurch bedingte Ungenauigkeit des Verlaufes der Eichkurve spielt aber für die Werte der Anregungsspannungen keine große Rolle, da diese alle nahe bei der Linie mit der höheren Anregungsspannung liegen. Trotz der so getroffenen Auswahl der Eichlinien wurden außerdem Versuche angestellt, um den Einfluß des

[1]) J. Kern, erscheint demnächst. — [2]) J. Kern, ZS. techn. Phys. 20, 250, 1939; 23, 108, 1942. Typenmäßig ist die Bezeichnung Hg F 700 nicht üblich. Der kurzen Ausdrucksweise halber sei sie aber in dieser Arbeit beibehalten. Die Lampe stellt eine Vorgängerin der heutigen HBF 1000 (nur mit 700 Watt Leistungsaufnahme) dar.

kontinuierlichen Untergrundes auf die Eichkurven zu beseitigen. Es wurde zunächst für jeden Meßpunkt das Verfahren zur Trennung von Linien- und Kontinuumsstrahlung durch schrittweise Erweiterung des Austrittsspaltes[1]) angewandt. Abgesehen von der äußerst mühsamen Messung zeigten jedoch dann die Kurvenpunkte der Leuchtdichteverteilung stärkere Streuungen. Es wurde daher davon abgesehen und einfach so verfahren, daß die Linien mit möglichst engen Ein- und Austrittsspalten (0,1 mm) gemessen wurden. Dann wird der Kontinuumsanteil der Strahlung zugunsten der Linienstrahlung sehr stark herabgesetzt[1]). Außerdem wurde noch ein übriges dadurch getan, daß stets die Linien 5461 und 5779/90 zur Eichung herangezogen wurden, die den schwächsten kontinuierlichen Untergrund von den oben genannten vier Linien besitzen.

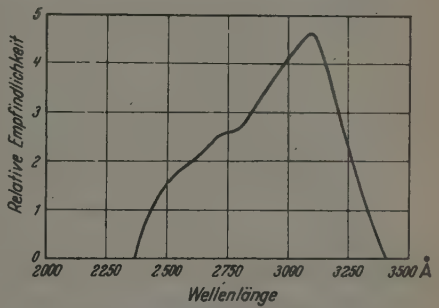


Fig. 3. Relative Empfindlichkeit von Quarzmonochromator und Na-Zelle bei Ausführung der Differenzmessung Quarz/V 712 h (Osram).

Die Messungen im sichtbaren Gebiet wurden ausgeführt mittels Monochromator und Cs-Zelle, die durch ein BG 23-Filter von Schott gegen ultrarotes Streulicht geschützt war. Für das ultraviolette Gebiet wurde eine Na-Zelle benutzt, die Meßanordnung wurde aber auch mittels der beiden genannten, sichtbaren Linien geeicht. Dabei wurde ein Zeiss-Monochromatfilter *A* bzw. *B* zur Abhaltung des Streulichtes direkt vor die Zelle geschaltet. Zur Vermeidung der starken Wirkung des Streulichtes[2]) auf die Messung unterhalb 2800 Å wurde eine Differenzmessung ausgeführt[3]), indem mit Filtern aus Quarz bzw. dem Glase V 712 h (Osram) gemessen wurde und dann die Differenz beider Ausschläge als Maß der Strahlstärke verwandt wurde. Auf diese Weise gelingt es, die Empfindlichkeit der Zelle so zu verändern, daß das Streulicht anderer Wellenlängen nicht mehr allzusehr stören kann. Multipliziert man nämlich die Empfindlichkeitskurve von Zelle und Monochromator [Fig. 3 der Arbeit[2])] mit der der Differenzmessung zuzuordnenden Durchlässigkeitskurve [Fig. 4 der Arbeit[3])], so ergibt sich die Empfindlichkeitskurve der Fig. 3.

---

[1]) F. Rössler, ZS. f. Phys. **110**, 495, 1938; ZS. techn. Phys. **21**, 18, 1940. — [2]) F. Rössler, Ann. Phys. **34**, 1, 1939. — [3]) F. Rössler, ZS. techn. Phys. **20**, 290, 1939; Das Licht **12**, 74, 1942.

Die Auswahl der Wellenlängen, die zur Messung gelangten, geschah allgemein so, daß keine der im ultraroten Gebiet zahlreich auftretenden Linien im untersuchten Bereich stören und möglichst keine Linienverbreiterung durch Nachbarlinien unsere Ergebnisse beeinflussen konnte. Nur für die Wellenlängen 2500, 3200, 4000 und 4200 Å besteht die Möglichkeit einer geringen Mitwirkung benachbarter Linienverbreiterungen.

Um vollständig sicher zu gehen, daß kein Einfluß der geometrischen Anordnung auf die Meßergebnisse vorhanden ist, wurde schließlich die Bestimmung der Anregungsspannungen des sichtbaren Gebietes nach dem gleichen Verfahren mit zwei völlig verschiedenen Monochromatoren[1]) durchgeführt.

Das UV-Normal in Arbeit II wurde mit Gleichstrom betrieben, während die Messungen an der wassergekühlten Höchstdrucklampe HgF 700 mit Wechselstrom durchgeführt wurden. Aus den späteren Ausführungen über die Welligkeit der Lichtemission ist zu entnehmen, daß möglicherweise ein Unterschied zwischen mit Gleich- und Wechselstrom betriebenen Lampen bestehen könnte. Es wurden daher ebenfalls an einer Gleichstromausführung der HgF 700 Bestimmungen der Anregungsspannungen ausgeführt und mit denen der Wechselstromausführung verglichen. In Tabelle 3 sind beide Ergebnisse einander gegenübergestellt.

Anregungsspannungen. Die auf diese Weise aus jeweils 200 bis 300 Meßpunkten (siehe Arbeit II) erhaltenen Anregungsspannungen

Tabelle 1. Anregungsspannungen von kontinuierlichen Gebieten. (Gemessen mit verschiedenen Monochromatoren an der HgF 700.)

λ in Å	Anregungsspannung in Volt bestimmt aus:				Differenz der Voltwerte	
	gemessen am Glasmonochromator		gemessen am Quarzmonochromator			
	S/S_0	B	S/S_0	B	S/S_0	B
9780	8,75	8,77	8,72	8,80	+ 0,03	— 0,03
7900	8,75	8,78	8,79	8,77	— 0,04	+ 0,01
7400	8,56	8,56	8,79	8,77	— 0,23	— 0,21
5100	8,75	8,75	8,61	8,71	+ 0,14	+ 0,04
4650	8,88	8,66	8,42	8,49	+ 0,46	+ 0,17
4200	8,75	8,84	8,42	8,49	+ 0,33	+ 0,35
			Mittlerer Fehler[2]):		0,23	

[1]) H. Krefft u. M. Pirani, ZS. techn. Phys. 14, 393, 1933. — [2]) F. Kohlrausch, Praktische Physik I, S. 15, Berlin 1943.

sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Tabelle 1 enthält die mit den beiden verschiedenen Monochromatoren erhaltenen Spannungen. Die Werte stimmen gut überein.

Tabelle 2. Anregungsspannungen von kontinuierlichen Gebieten. (Gemessen an dem UV-Normal und der HgF 700.)

λ in Å	Anregungsspannung in Volt bestimmt aus:				Differenz der Voltwerte	
	gemessen an N. L.		gemessen an HgF 700			
	S/S_0	B	S/S_0	B	S/S_0	B
9780	8,44	8,50	8,75	8,77	− 0,31	− 0,27
7900	8,47	8,44	8,75	8,78	− 0,28	− 0,34
7400	8,55	8,65	8,56	8,56	− 0,01	+ 0,09
6400	8,60	8,60	8,79	8,75	− 0,19	− 0,15
5100	8,75	8,75	8,75	8,75	0,00	0,00
4200	8,94	9,00	8,75	8,84	+ 0,19	+ 0,16
			Mittlerer Fehler:		0,21	

In Tabelle 2[1]) sind einander gegenübergestellt die Anregungsspannungen des sichtbaren und ultraroten Bereiches für das UV-Normal (Arbeit II) und die HgF 700. Der mittlere Fehler ist von der gleichen Größe wie in Tabelle 1. Es ist also trotz des sehr verschiedenen Druckes kein systematischer Unterschied zwischen den Anregungsspannungen des Kontinuums beider Lampen festzustellen.

Tabelle 3. Anregungsspannung von kontinuierlichen Gebieten. (Gemessen an der HgF 700.)

λ in Å	Anregungsspannung in Volt bestimmt aus:				Differenz der Voltwerte	
	Gleichstrombetrieb		Wechselstrombetrieb			
	S/S_0	B	S/S_0	B	S/S_0	B
7400	8,80	8,80	8,56	8,56	+ 0,24	+ 0,24
7900	8,70	8,80	8,75	8,78	− 0,05	+ 0,02
			Mittlerer Fehler:		0,20	

[1]) Die Werte für 4650 Å sind weggelassen, da sie bei der Messung des UV-Normals in Arbeit II offensichtlich fälschlicherweise zu tief bestimmt worden sind. Dies ist insofern verständlich, als die Leuchtdichte dieser Lampe gering ist und daher die Ausschläge für 4650 am Meßinstrument klein waren gegenüber denen der HgF 700. Die Messung für 4650 Å mußte daher mit breitem Spalt ausgeführt werden. Andererseits wurde damals der Einfluß des kontinuierlichen Untergrundes bei der Eichung mit den Linien noch nicht berücksichtigt, was eine gewisse Erhöhung der Voltwerte für diesen Kontinuumsbereich ergeben würde.

In Tabelle 3 sind die mit der Lampe HgF 700 bei Gleich- bzw. Wechselstrom erhaltenen Werte miteinander verglichen. Es ist zu ersehen, daß sich ebenfalls kein Unterschied ergibt.

In der folgenden Tabelle 4 sind die Anregungsspannungen für die kontinuierliche Strahlung des ultravioletten Gebietes angegeben. Es ist überraschend, daß auch hier die Werte bei rund 8,5 Volt liegen.

Tabelle 4. Anregungsspannungen von kontinuierlichen Gebieten im Ultraviolett. (Gemessen an der HgF 700.)

λ in Å	Anregungsspannung in Volt bestimmt aus:		Differenz der Voltwerte
	S/S_0	B	
4000	8,19	8,24	— 0,05
3400	8,28	8,35	— 0,07
3200	8,28	8,35	— 0,07
2700	8,57	8,77	— 0,20
2500	8,43	8,54	— 0,11
2400	8,47	8,54	— 0,07

Aus den angeführten Vergleichen geht also hervor, daß wir den Unterschied des Druckes und die Art des Betriebes in Zukunft nicht mehr besonders zu beachten brauchen. In Tabelle 5 sind daher die wahrscheinlichsten Werte der Anregungsspannungen sämtlicher kontinuierlicher Bereiche ohne Rücksicht auf ihre Herkunft zusammengestellt.

Tabelle 5. Anregungsspannungen von kontinuierlichen Gebieten.

λ in Å	Volt	λ in Å	Volt	λ in Å	Volt
9780	$8{,}6_5$	4650	$8{,}6_1$	3200	$8{,}3_3$
7900	$8{,}6_6$	4200	$8{,}6_3$	2700	$8{,}6_7$
7400	$8{,}6_5$	4000	$8{,}2_1$	2500	$8{,}4_8$
6400	$8{,}6_8$	3400	$8{,}3_2$	2400	$8{,}5_0$
5100	$8{,}7_2$				

Um uns über den möglichen Fehler dieser Werte Klarheit zu verschaffen, wurden für sämtliche Tabellen mit vergleichenden Messungen die mittleren Fehler bestimmt. Dabei wurden sämtliche aus den verschiedenen Bestimmungsstücken erhaltenen Werte als gleichwertig angesehen. Der mittlere Fehler sämtlicher Werte liegt bei ungefähr 0,2 Volt. Man kann daher mit einiger Sicherheit folgern, daß die Anregungsspannung auf keinen Fall den Wert von 9 Volt erreicht. Dies wird für spätere Betrachtungen wichtig sein.

Ehe wir nun die gefundenen Ergebnisse diskutieren und im Sinne einer Klärung der Entstehungsursache der Kontinuumsstrahlung auswerten, sei darauf hingewiesen, daß die Zahlenwerte gewonnen wurden, ohne irgendeine Annahme über Temperatur, Temperaturverlauf, elektrische Daten der Entladung usw. zu machen. Das war dadurch erreicht worden, daß stets mit der gleichen Entladung gearbeitet wurde. Dadurch konnte die Funktion f eliminiert werden. Durch diese Voraussetzungslosigkeit unterscheiden sich diese Ergebnisse von den meisten anderen an der Quecksilberentladung gewonnenen. Lediglich die Annahme der thermischen Anregung und der Gleichheit von Anregungs- und Ionisationstemperatur geht allerdings entscheidend in unser Ergebnis ein.

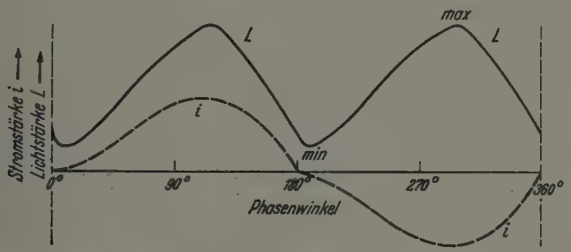


Fig. 4. Schematischer Verlauf von Strom- und Lichtstärke über die Periode eines Wechselstromes (nach Kern).

Welligkeitsmessungen. Um aber nun doch bei der Wichtigkeit der Entscheidung über die genaue Höhe der Anregungsspannung (s. nächsten Abschnitt) einen weiteren Beleg zu haben, wurden Messungen der Welligkeit für verschiedene Wellenlängen ausgeführt. Kern[1]) hat nämlich bei Untersuchungen des Verlaufes der Lichtstärke über die Periode von mit Wechselstrom betriebenen Quecksilber-Hochdruckentladungen (s. Fig. 4) (der sogenannten Welligkeit der Entladung) mittels eines Scheibenstroboskopes festgestellt, daß die Tiefe des sich während der stromlosen Pause ausbildenden Minimums der Lichtstärke von der Wellenlänge abhängig ist. Nimmt man nun nach Kern an, daß auch im Minimum noch Temperaturanregung herrscht, was durch die Arbeit von Witte[2]) nahegelegt wird, so muß die Höhe des Minimums eine eindeutige Funktion der Anregungsspannung sein. Es ist einfach so, daß wir bei der Untersuchung der Querverteilung einen räumlichen

[1]) J. Kern, ZS. f. Phys. **114**, 552, 1939; Das Licht **12**, 145, 181, 1942. — [2]) H. Witte, ZS. f. Phys. **88**, 415, 1934.

Abfall der Temperatur vor uns haben, während es sich bei der Welligkeit um einen zeitlichen Abfall der Temperatur handelt. In beiden Fällen ist die Ursache der Wellenlängenabhängigkeit die gleiche, der unterschiedliche Einfluß der Temperatur auf die Strahlungen verschieden hoher Anregungsspannung. Es können also die angestellten Überlegungen direkt übertragen werden. Wir bestimmen das Verhältnis von Minimum zu Maximum der Welligkeitskurve für 5461, 5770/90, zeichnen daraus die Eichgerade (auch hier mußte ein geradliniger Verlauf angenommen werden) und lesen mittels der entsprechenden Werte für die kontinuierliche Strahlung die zugehörige Anregungsspannung ab. Die Messung wurde mit der Lampe HgF 700 ausgeführt. Die einzelnen Bereiche wurden durch Filter ausgesondert und mit Sperrschichtzelle gemessen. Die Genauigkeit dieser Meßmethode ist bei der hier geübten Ausführung geringer als die der Querverteilung wegen der Benutzung von Filtern, also Erfassung eines größeren Bereiches, und dadurch, daß die jeweiligen Zahlen nur durch zwei Meßpunkte festgelegt werden. Als einziger kontinuierlicher konnte ein roter Bereich um 6500 Å mittels RG 1-Filters von Schott (2 mm) untersucht werden. Es ergab sich so ein Wert von 8,87 Volt als Anregungsspannung, der befriedigend mit dem Wert der Tabelle 5 übereinstimmt. Dieses Ergebnis bestätigt nicht nur die gemessenen Anregungsspannungen, sondern es zeigt wieder umgekehrt, wie es in Arbeit II (S. 671, Anm. 1) genauer ausgeführt ist, daß tatsächlich auch im Minimum der Lichtstärke noch Temperaturanregung herrscht.

Deutung des Kontinuums.

Atom- und Molekülkontinuum. Das Auftreten von kontinuierlicher Strahlung in der Quecksilberhochdruckentladung hat bereits zu verschiedenen Hypothesen über ihre Entstehung Veranlassung gegeben die jetzt einander gegenübergestellt werden sollen. So hat Finkelnburg[1]) seinerzeit die Vermutung geäußert, daß diese kontinuierliche Strahlung als Molekülrekombination von normalen mit angeregten Hg-Atomen als Strahlung dieser „Stoßmoleküle" zu deuten sei, ohne allerdings eine Begründung dafür nennen zu können. Diese wurde vielmehr erst durch die Bestimmung der Anregungsspannung[2]) nach der in dieser Arbeit erneut dargelegten Methode gegeben. Dabei

[1]) W. Finkelnburg, Kontinuierliche Spektren, S. 153, 154 (Emissionsall IV). Berlin 1938. — [2]) F. Rössler, ZS. f. Phys. 112, 667, 1939 (Arbeit II).

wurde anfangs die Strahlung echten Molekülen zugeschrieben, auf Grund der in allen Spektralbereichen gleich großen Anregungsspannung und einiger Rechnungen über die starke thermische Dissoziation von Molekülen in der Entladung aber die geringe Häufigkeit echter Moleküle festgestellt. Es wurde daher die Annahme echter Moleküle fallen gelassen, durch die von Stoßmolekülen ersetzt und dieser Arbeit zugrunde gelegt. In einer neueren Arbeit weist Schulz[1]) dann ebenfalls darauf hin, daß wegen der Dissoziation in der Entladung keine echten, sondern nur Stoßmoleküle vorkommen können. Die Bestimmung der Anregungsspannung aus der Querverteilung sieht er als widerspruchsfrei an. Für die bei solchen Stoßmolekülen allgemein zu erwartende kontinuierliche Strahlungsausbeute haben Rompe und Steenbeck[2]) eine Abschätzung angegeben.

Auf der anderen Seite hat bereits früher Unsöld[3]) die Theorie des stellaren wasserstoffähnlichen Absorptionskoeffizienten, der die Auffassung von Atomrekombination zugrunde liegt, auf die Quecksilberhochdruckentladung angewandt und gefunden, daß die Emission dann unabhängig von der Frequenz sein und in erster Potenz vom Druck abhängen muß. Elenbaas[3]) und Rompe, Schulz, Thouret[3]) haben sich dieser Auffassung angeschlossen und das empirische Material für hohe Drucke durch die Stromstärke- und Druckabhängigkeit des Kontinuums vermehrt. Schulz[1]) verbessert die Übereinstimmung von gemessener und nach Unsöld berechneter Strahlungsausbeute durch Verwendung genauerer Temperaturwerte des Bogens. Bei einem Vergleich mit der Vorstellung von Stoßmolekülen stellt er fest, daß die Frage nach der Natur des Kontinuums der Quecksilberhochdruckentladung noch nicht geklärt ist. Finkelnburg[4]) hält neuerdings die Atomrekombination für gesichert, wobei er allerdings Analogieschlüsse vom Hochstromkohlebogen aus zieht.

Zur Herbeiführung einer Entscheidung zwischen beiden Auffassungen muß zunächst für die weiteren Überlegungen die Vorstellung von Molekül- bzw. Atomstrahlung noch genauer präzisiert werden. Zunächst die Molekülstrahlung: Beim Zusammenstoß von normalen und unangeregten Atomen werden sich Stoßmoleküle bilden[5]), deren Energie wegen der nichtabgeführten kinetischen Energie oberhalb der Dissoziationsgrenze des angeregten Molekülzustandes liegt. Falls diese Stoß-

[1]) P. Schulz, ZS. f. Phys. 119, 167, 1942. — [2]) Erg. exakt. Nat. 18, 350, 1939. — [3]) Siehe Fußnote [1]) auf Seite 286. — [4]) W. Finkelnburg u. O. Th. Hahn, Nat. 30, 468, 1942. — [5]) Siehe Fußnote [1]) auf Seite 298.

moleküle nicht innerhalb der Stoßdauer unter Strahlung in einen anderen Elektronenzustand übergehen, zerfallen sie wieder sofort bei Beendigung des Stoßes. Stabile Moleküle, deren Lebensdauer wesentlich über die Stoßzeit hinausgeht, sind nur dann zu erwarten, wenn die überschüssige kinetische Energie in einem Dreierstoß an einen dritten Partner abgeführt werden kann, da reine Schwingungsübergänge zum gleichen Elektronenzustand nicht erlaubt sind. Die Häufigkeit solcher Dreierstöße ist aber um Größenordnungen[1]) geringer als die der Zweierstöße, woraus wir ja auch die Berechtigung hernahmen, unsere Rechnungen nur für diese Zweierstöße durchzuführen. In der Entladung werden wir also von beiden Möglichkeiten nur Stoßmoleküle antreffen.

Jetzt die entsprechende Verfeinerung für die Rekombination: Die Vorstellung der Rekombination als eines einfachen Stoßes zwischen Ion und Elektron ist sicher stark idealisiert. Man muß die Wechselwirkung mit den anderen Plasmapartnern, die Mikrofeldstärken des Plasmas berücksichtigen und kommt dann zu Erniedrigungen der Ionisierungsspannung von 10,4 auf 9,4 bis 9,2 Volt, wie sie Unsöld, Elenbaas sowie Rompe, Schulz und Thouret fordern[2]). Wie der Mechanismus der Rekombination im einzelnen aber auch immer geartet sein mag, so erhält unsere auf der vereinfachenden Vorstellung beruhende Ableitung der Gl. (9) doch dadurch eine Stütze, daß sie sowohl in der Temperatur- wie Druckabhängigkeit bis auf die für uns unwesentliche Potenz von T mit der Formel übereinstimmt, die Unsöld aus der quantenmechanischen Theorie des wasserstoffähnlichen, stellaren Absorptionskoeffizienten errechnet hat[2]). Die Gleichungen (7), (8) und (9) können also als Grundlage für die folgenden Abschätzungen dienen.

Diskussion der Meßergebnisse. Das geschilderte Nebeneinanderbestehen der beiden Auffassungen der Kontinuumsentstehung läßt es zur Herbeiführung einer Entscheidung als notwendig erscheinen, jetzt im folgenden unter Heranziehung nicht nur der Anregungsspannung, sondern aller Eigenschaften der kontinuierlichen Strahlung, systematisch beide Deutungen einander gegenüberzustellen. Zugleich wird auch gezeigt werden, daß ein Unterschied in der Entstehung des Kontinuums

[1]) Bereits in Arbeit II, Anm. 1, S. 669, wurde darauf hingewiesen, daß stabile Moleküle nur im Dreierstoß gebildet werden können. Eine Abschätzung der Häufigkeit von Dreierstößen in ihrem Verhältnis zu Zweierstößen durch den Quotienten von Moleküldurchmesser und freier Weglänge (K. F. Bonhoeffer u. P. Harteck, Grundlagen der Photochemie, S. 186, Dresden u. Leipzig 1933) führt zu dem Wert 10^{-4}. — [2]) Siehe Fußnote [1]) auf Seite 286.

bei hohem und tiefem Druck, wie er von Rompe, Schulz und Thouret [1]) behauptet worden ist, nicht besteht.

Anregungsspannung. Wir beginnen mit der Anregungsspannung. Die für die Rekombination mindestens notwendige Anregungsspannung von 9,2 Volt wird offenbar, selbst bei Berücksichtigung des Meßfehlers, nicht erreicht. Nimmt man eine noch stärkere Erniedrigung der Ionisierungsspannung als bisher an, so kommt man zunächst bei den Anregungsspannungen von 8,8 Volt zu den Linien 5770/90 und 3650/63 Å, die so stark von der Verschmierung der Niveaus betroffen werden müßten, daß sie als Linien gar nicht mehr in Erscheinung treten dürften. Aber erst bei noch weiterer Erniedrigung käme man dann zu den tatsächlich gemessenen Anregungsspannungen des Kontinuums. Außerdem müßte die Erniedrigung der Anregungsspannung mit dem Druck zunehmen, was jedoch gemäß Tabelle 2 nicht der Fall ist. Eher besteht hiernach eine Änderung in Richtung einer Erhöhung der Anregungsspannung mit steigendem Druck als in umgekehrter Richtung. Man kann aus dieser Unabhängigkeit der Anregungsspannung von den äußeren Bedingungen sogar schließen, daß es sich um feste Niveaus handelt, von denen die Strahlung ausgeht. In Arbeit II mußte noch die Möglichkeit offen gelassen werden, daß sich die Anregungsspannung aus dem Zusammenwirken von Strahlung ergibt, die von mehreren Niveaus ihren Ausgang nimmt. Da sich aber auch bei hohen Drucken die gleichen Spannungen ergeben haben, ist es sehr wahrscheinlich, daß es sich nur um ein einziges oder jedenfalls nur wenige eng beieinander liegende Niveaus handelt, von denen aus die Übergänge stattfinden.

Da das eingeschlagene Verfahren zur Bestimmung der Anregungsspannung nur Gültigkeit hat, wenn wirklich Temperaturgleichgewicht in der Entladung herrscht, kann der Einwand erhoben werden, daß für hohe Anregungsspannungen von 8 Volt und darüber möglicherweise keine Gleichheit der Anregungstemperaturen mit denen für tiefere Niveaus und mit der Ionisationstemperatur mehr besteht, weil der Energieverlust durch Abstrahlung zu groß ist. Diese Auffassung würde einer Annahme entsprechen, wie sie ten Bruggencate [2]) für die Sonnenatmosphäre macht. Wenn eine solche Annahme für die Hochdruckentladung auch recht unwahrscheinlich ist, wie Rompe und

[1]) Siehe Fußnote [1]) auf Seite 286. — [2]) P. ten Bruggencate, ZS. f. Astrophys. **18**, 340, 1939.

Steenbeck gezeigt haben[1]), so sei sie doch weiter verfolgt. Auf Grund der als Ursache herangezogenen zu starken Abstrahlung kommen nur die Fälle in Frage, daß die Ionisationstemperatur und die Strahlungstemperatur tieferer Terme einzeln oder beide höher sind als die Strahlungstemperatur höher angeregter Terme. Der erste Fall der höheren Ionisationstemperatur würde bedeuten, daß der wahre Wert der Ionisierungsspannung unter dem gemessenen liegt. Der andere Fall des Temperaturunterschiedes verschieden hoch angeregter Terme würde zu einer gefälschten Eichkurve führen, deren Abweichung so liegt, daß sich Ionisierungsspannungen oberhalb der wahren Werte ergeben würden. Übrigens wäre dann der geradlinige Verlauf der Eichkurve nicht recht verständlich. Molekülkontinua würden im Gegensatz dazu von der Temperaturabweichung nicht berührt, weil sie sich völlig gleichartig wie die ihnen zugeordneten Atomkontinua verhalten würden. Auch für den Fall, daß beide obengenannten Abweichungen zusammentreffen, liegt der wahre Wert der Ionisierungsspannung nur um so tiefer unter dem gemessenen, so daß dieses Argument der Abweichung vom thermischen Gleichgewicht also nicht geeignet ist, zugunsten der Rekombinationsauffassung zu sprechen.

Schulz[2]) will die tiefe Anregungsspannung durch Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht unter dem Einfluß der Ionendiffusion erklären. Diese Erklärung ist denkbar bei der Ermittlung der Anregungsspannung aus einer räumlichen, versagt aber bei der Bestimmung aus einer zeitlichen Temperaturänderung. Da aber sowohl Querverteilung wie Welligkeit die gleiche Anregungsspannung liefern, kann also die Ionendiffusion nicht für den tiefen Wert der Anregungsspannung verantwortlich gemacht werden. Hinzu kommt, daß die Ionendiffusion bisher lediglich durch eine rein formale Umformung der Elenbaasschen Gleichung[3]) und durch keinerlei sonstige experimentelle Beobachtung*) erwiesen ist.

---

[1]) Erg. exakt. Nat. 18, 361, 1939. — [2]) ZS. f. Phys. 119, 167, 1942. — [3]) W. Elenbaas, Physica 4, 413, 1937.

*) *Nachsatz bei der Korrektur.* In diesem Zusammenhang ist eine kürzlich erschienene sehr sorgfältige Arbeit von R. Mannkopff in ZS. f. Phys. 120, 301, 1943 von Bedeutung. Dort wird gezeigt, daß der Faktor f in der Elenbaasschen Gleichung für die Gesamtstrahlung [siehe Gl. (14)] tatsächlich durch Selbstabsorption bedingt ist in dem Sinne, daß der Wert $1 - f$ den selbstabsorbierenden Anteil der Strahlung darstellt. Das „Wärmeleitvermögen" für Strahlungsdiffusion wird nämlich dann von gleicher Größenordnung wie das Wärmeleitvermögen selbst, wenn man auch die Außenzonen und nicht nur die mittleren Bereiche der absorbierenden Linienbreite zur Rechnung heranzieht. Damit

Durch die Verwendung von Lampen so völlig verschiedener Bauart und Drucke, wie sie das UV-Normal und die Hg F 700 darstellen, wird sicher der Einfluß der Reabsorption von Strahlung, der unsere Ergebnisse fälschen könnte, in stärkstem Maße verändert. Spielt doch die Reabsorption bei höheren, im Gegensatz zu mittleren Drucken kaum mehr eine Rolle[1]). Da nach den Werten der Tabelle 2 für die beiden Lampen sich innerhalb der Meßgenauigkeit die gleichen Anregungsspannungen ergeben, ist zugleich gezeigt, daß Reabsorption die Ergebnisse sicher nicht gestört haben kann. Ebenso wäre es bei Vorhandensein von für die einzelnen Linien sehr unterschiedlicher Reabsorption unwahrscheinlich, daß die drei Eichpunkte in Fig. 1 für alle Linien auf einer Geraden liegen. Die entsprechenden Schlüsse lassen sich für die Konvektion anstellen, deren Nichtvorhandensein für die Konstanz von p wesentlich war, als es vor das Integral gezogen wurde. Auch die Konvektion beeinflußt also unser Meßergebnis nicht. Der Wert der Anregungsspannung spricht demnach eindeutig für die Molekülauffassung.

Leistungsabhängigkeit. Elenbaas[2]) hat gezeigt, daß aus dem Energiesatz eine einfache Gesetzmäßigkeit für die Gesamtstrahlung einer Quecksilberhochdruckentladung folgt, Kern und Schulz[3]) haben nachgewiesen, daß diese Gesetzmäßigkeit mit anderen Konstanten auch für einzelne Spektrallinien richtig bleibt. Die Gültigkeit der Gleichung konnte nun auf den Bereich kontinuierlicher Strahlung erweitert[4]) werden. Es gilt also:

$$S_\nu = f_\nu(L - A), \qquad (14)$$

wobei S_ν die Strahlungsleistung des Kontinuums im Frequenzbereich ν, f_ν die zugehörige Konstante, A eine durch die Wärmeleitungsverluste bedingte Konstante und L die aufgewandte elektrische Leistung darstellen. S_ν, L und A gibt man zweckmäßig auf 1 cm bezogen an. Statt der sonst allgemein üblichen Stromstärkeabhängigkeit wird es im vorliegenden Falle also zweckmäßig sein, die Leistungsabhängigkeit zu

verliert aber die rein formale Umformung der Elenbaas-Gleichung durch Rompe und Schulz in ZS. f. Phys. 113, 12, 1939 ihre physikalische Berechtigung und der einzige experimentelle Beweis für die Existenz der Ionendiffusion ist damit illusorisch geworden, ebenso wie ihre Heranziehung zur Erklärung der gefundenen Anregungsspannung des Hg-Kontinuums durch Schulz.

[1]) R. Rompe u. M. Steenbeck, Erg. exakt. Nat. 18, 361, 1937. — [2]) W. Elenbaas, Physica 4, 413, 1937. — [3]) J. Kern u. P. Schulz, ZS. f. Phys. 111, 454, 1939. — [4]) F. Rössler, nach bisher unveröffentlichten Messungen.

untersuchen. Es wurden daher die bei hohen Drucken ausgeführten Messungen von Rompe, Schulz und Thouret[1]) auf Leistungsabhängigkeit umgezeichnet und mit denen für tiefe Drucke[2]) verglichen. Je ein Beispiel für viele Kurven ist in den Fig. 5 und 6 dargestellt. Beide Geraden genügen der Gl. (14). Die Werte für f_v und A sind natürlich verschieden entsprechend der unterschiedlichen Lampenform. Aber für hohe und tiefe Drucke gilt das gleiche einfache Gesetz.

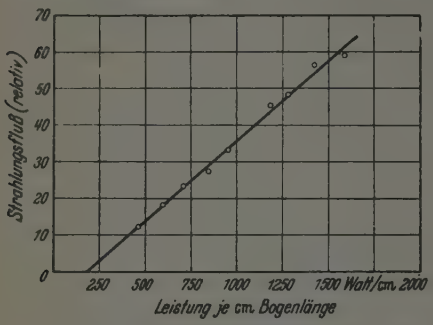


Fig. 5. Leistungsabhängigkeit des Strahlungsflusses der Hg B-Lampe Nr. 3 (15 Atm.) (umgezeichnet nach Rompe, Schulz u. Thouret) für 5100 Å.

Die dem Problem weniger angepaßte, aber häufig dargestellte Stromstärkeabhängigkeit der Strahlung ergibt sich natürlich aus Gl. (14) unter Berücksichtigung der Leistungsabhängigkeit des Gradienten. Im einfachsten Falle des nahezu konstanten Gradienten bei kleinen Drucken ergibt sich also eine lineare

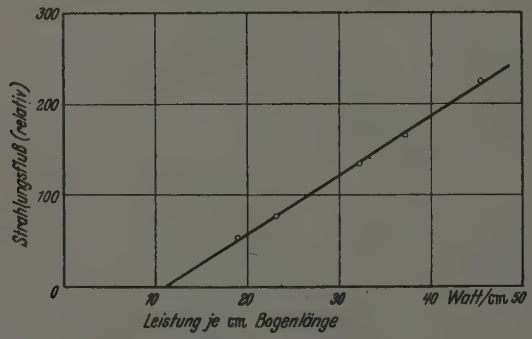


Fig. 6. Leistungsabhängigkeit des Strahlungsflusses des HgQ-Brenners Nr. 821 (3 Atm.) für 6470 Å.

Stromstärkeabhängigkeit, wie sie wohl mit Molekülstrahlung, aber nicht mit Atomrekombination verträglich ist, die quadratisch mit der Stromstärke gehen müßte. Das von Rompe, Schulz und Thouret gefundene $I^{3/2}$-Gesetz bei hohen Drucken ist bedingt durch die starke Leistungsabhängigkeit des Gradienten und stellt also erst ein sekundäres Gesetz

[1]) Siehe Fußnote [1]) auf Seite 286. — [2]) F. Rössler, nach bisher unveröffentlichten Messungen.

dar. Unter Annahme einer Ionisierungsspannung von 9,5 Volt und einer rohen Näherungsformel für den Gradienten wird das $I^{3/2}$-Gesetz abgeleitet und als positives Ergebnis für Atomrekombination ausgewertet[1]). In diesem Zusammenhange ist es vielleicht ganz reizvoll, unter Zuhilfenahme der gleichen Schlußweise nur mit weniger Voraussetzungen, aber unter Verwendung der neuen Gl. (14) zu zeigen, daß die Anregungsspannung sich zu rund 8 Volt ergibt. Unter alleiniger Berücksichtigung der kontinuierlichen Strahlung und Weglassung von A (für große L zulässig) lautet Gl. (14) kombiniert mit Gl. (8) und (9):

$$L \sim S_\nu \sim e^{-\frac{eV}{kT}}.$$

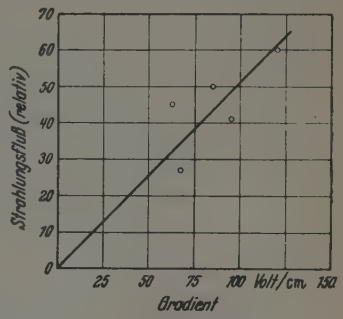


Fig. 7. Druckabhängigkeit des Strahlungsflusses von Hg B-Lampen (umgezeichnet nach Rompe, Schulz u. Thouret) für 1100 Watt pro cm und 6400 Å.

Elenbaas[2]) hat eine mittlere Anregungsspannung V_m durch $L \sim e^{-\frac{eV_m}{kT}}$ eingeführt und sie zu rund 8 Volt bestimmt. Der Vergleich beider

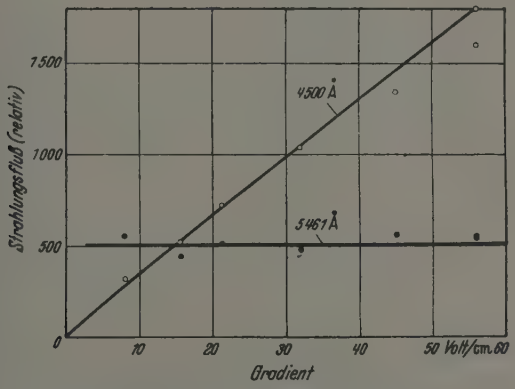


Fig. 8. Druckabhängigkeit des Strahlungsflusses von HgQ-Brennern für 50 Watt/cm und 4500 bzw. 5461 Å.

Ausdrücke für L ergibt $V = V_m = 8$ Volt. Bei den hohen Drucken ist der größte Teil der Strahlung ein kontinuierlicher. Diese leistet daher auch den größten Beitrag zur mittleren Anregungsspannung. Daß der Wert von V_m nicht genau der gemessenen Anregungsspannung

[1]) P. Schulz, ZS. f. Phys. 119, 167, 1942. — [2]) W. Elenbaas, Physica 2, 757, 1935.

entspricht, hängt damit zusammen, daß die bei tiefen Drucken ausgeführten Elenbaasschen Messungen nicht ohne weiteres auf hohe Drucke übertragen werden dürfen. Also spricht auch die Heranziehung der Leistungsabhängigkeit für die Molekülauffassung.

Druckabhängigkeit. Bei der Untersuchung der Druckabhängigkeit wurde so vorgegangen, daß der Wert f_ν in Gl. (14) in Abhängigkeit vom Druck oder, was auf das gleiche herauskommt, S_ν für eine festgehaltene Wattzahl in Abhängigkeit des Gradienten dargestellt wurde. Das ist für je ein Beispiel hohen und tiefen Druckes in den Fig. 7 und 8 geschehen. Die Werte von Rompe, Schulz und Thouret wurden wieder umgezeichnet. In Fig. 8 ist zusätzlich noch der Verlauf für die Linie 5461 Å dargestellt. Es ist deutlich zu ersehen, daß für diese Linie die Strahlung unabhängig vom Druck ist, was bereits Kern und Schulz [1]) feststellten. Für Kontinua erfolgt aber der Anstieg nahezu linear mit dem Drucke. Ein solches Ergebnis ist mit den Gl. (7), (8), (9) zunächst nicht verträglich. Man muß aber bedenken, daß erst die Integration dieser Gleichungen über den Querschnitt die gemessene Strahlung ergibt. Aus dem experimentellen Ergebnis für Linien muß man jedenfalls entnehmen, daß sich T in der e-Funktion gerade so mit p verändert, daß der Faktor p unter dem Integral in Gl. (7) ausgeglichen wird[1]). Das Entsprechende gilt dann in Gl. (8) und (9). Wir müssen also die Potenz von p in allen Fällen um 1 erniedrigen und können dann sofort feststellen, daß das Verhalten der kontinuierlichen Strahlung Gl. (8), also der Molekülstrahlung entspricht. Dies gilt ebenfalls für hohe und tiefe Drucke.

Versucht man unter Zugrundelegung der Atomrekombinationsauffassung die unterschiedliche Druckabhängigkeit von Linie und Kontinuum auf der verschiedenen Höhe der Anregungsspannung aufzubauen, so ergibt ein Vergleich von Gl. (7) mit (9), daß dann für Anregungsspannungen über derjenigen von 5641 (7,6 Volt) die Strahlung mit steigendem Drucke abnehmen müßte, was den Messungen widerspricht. Auch die Druckabhängigkeit weist also auf Moleküle hin.

Spektrale Eigenschaften. Weiter kann man die spektrale Energieverteilung heranziehen. Wie bereits ausgeführt, hat Unsöld [2]) eine auf die Frequenzeinheit bezogene spektrale Strahldichte des Rekom-

[1]) ZS. f. Phys. 111, 454, 1939. — [2]) A. Unsöld, Ann. d. Phys. 33, 607, 1938.

binationskontinuums errechnet, die für alle Spektralgebiete unabhängig von der Frequenz ist. Für ein Molekülkontinuum sollte man dagegen wegen der verschiedenen Übergänge eine so gleichmäßige spektrale Verteilung nicht erwarten; vielmehr sollte die kontinuierliche Strahlung Extremwerte besitzen. Stellt man die spektrale Energieverteilung[1]) des UV-Normals, der einzigen Lampe, wo bisher die Trennung von Linien und Kontinua sauber durchgeführt ist, als Funktion von ν dar (Fig. 9), so zeigt es sich, daß zwar im sichtbaren Bereich der Verlauf der Strahlstärke des Kontinuums etwas gleichförmiger ist als im ultra-

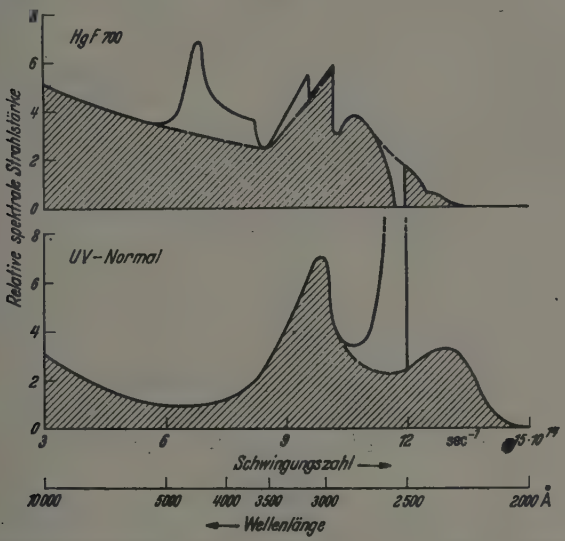


Fig. 9. Kontinuierliche Strahlung des UV-Normals und der Hg F 700 in relativem Maße.

violetten, daß aber von einer Konstanz nicht geredet werden kann. Das gleiche gilt von der spektralen Verteilung der kontinuierlichen Strahlung der Höchstdrucklampe Hg F 700[2]), die in ihrem Verlauf derjenigen des UV-Normals recht ähnlich ist (Fig. 9). Also wieder gleiches Verhalten bei hohem und tiefem Druck.

---

[1]) F. Rössler, Ann. Phys. 34, 1, 1939. — [2]) F. Rössler, nach unveröffentlichten Messungen. Die Linienverbreiterungen und ein wahrscheinlich ebenfalls durch Verbreiterungen vorgetäuschtes Kontinuum bei 4300 Å sind durch Strichelung abgetrennt worden. — Strahldichte und Strahlstärke sind einander proportional, weil wegen der gleichen Anregungsspannung für alle Wellenlängen nach unseren Ausführungen die gleiche Leuchtdichteverteilung und damit gleiche Summation über den Querschnitt sich ergibt.

Diese spektrale Verteilung unterscheidet sich recht wesentlich von dem Spektrum der Quecksilberrekombinationsstrahlung, das ja durch die Aufnahmen von Kessel[1]) bekannt ist. Besonders bemerkenswert an dieser Arbeit ist die experimentelle Schwierigkeit, mit der sich das Rekombinationsspektrum nur erzeugen läßt, eine Tatsache, auf die ganz allgemein ja schon Seeliger[2]) hingewiesen hat.

Aber ein anderer Punkt deutet noch schärfer auf molekularen Ursprung der Strahlung hin. Es war bereits früher[3]) darauf aufmerksam gemacht worden, daß sich bei den Quecksilberhochdruckentladungen aller Druckbereiche im sichtbaren Gebiete eine Struktur zeigt, deren genauere Ausmessung äquidistante Linien mit einem konstanten Wellenzahlenabstand von 50 bzw. 100 cm^{-1} ergeben hat. Eine solche Struktur kann nur von Schwingungsübergängen herrühren. Alle Punkte dieses Abschnittes sprechen also ebenfalls für Molekülstrahlung.

Strahlungsausbeute. Die zu erwartende Strahlungsausbeute bei Atomrekombination hat Unsöld quantitativ mit seiner Formel[4]) angegeben. Bei Verwendung der aus der Elektronenstoßverbreiterung von Linien bestimmten, zur Zeit genauesten Temperaturwerte[5]) ergibt sich eine gute Übereinstimmung[6]) von Rechnung und Messung. Auf der anderen Seite haben Rompe und Steenbeck[7]) eine Abschätzung der Strahlungsausbeute allgemein für Stoßmoleküle angegeben. Das Verhältnis H von Kontinuums- zu Linienstrahlung errechnen sie zu $2 \cdot n \cdot \pi \cdot r^3$, wo n die Teilchendichte und r den Radius des Stoßmoleküls darstellen. Mit dem gaskinetischen Wert für r von $3 \cdot 10^{-8}$ cm und $n = 2 \cdot 10^{18}$ für den Fall des UV-Normals[8]) ergibt sich $H = 3 \cdot 10^{-4}$, während die Messung[9]) $H = 1/3$ ergeben hat. Nun wird in der Entladung der wirksame Radius für die Bildung von Stoßmolekülen sicher größer als der gaskinetische sein, aber der Faktor 1000 läßt sich wohl kaum überbrücken. Die Strahlungsausbeute läßt also auf Atomrekombination schließen.

Einheitliches Niveau. Und noch ein zweiter Punkt spricht für die Atomrekombinationsauffassung. Die gemessenen Anregungsspannungen haben sich im gesamten Spektralbereich gleichbleibend zu ungefähr

---

[1]) H. Kessel, ZS. f. Phys. 70, 614, 1931 (Fig. 5a). — [2]) R. Seeliger, Phys. ZS. 30, 329, 1929. — [3]) Arbeit II, S. 674, Fig. 5a und Anm. 4. — [4]) Ann. Phys. 33, 607, 1938. — [5]) P. Schulz, ZS. f. Phys. 114, 435, 1939; R. Rompe u. P. Schulz, ebenda 118, 269, 1941. — [6]) P. Schulz, ebenda 119, 167, 1942. — [7]) Erg. exakt. Nat. 18, 361, 1939. — [8]) Siehe Fußnote [1]) auf Seite 291. — [9]) F. Rössler, Ann. Phys. 34, 1, 1939.

8,5 Volt ergeben und legen dadurch die Existenz eines ganz bestimmten Ausgangsniveaus nahe. Bei Stoßmolekülen ist ein solches von vornherein nicht recht verständlich, während Rekombination es direkt fordert.

Zusammenfassend unter Überblickung aller Eigenschaften des Kontinuums der Quecksilberhochdruckentladung ist also die Frage nach seinem Ursprung noch nicht eindeutig entschieden. Zwar sprechen eine große Zahl von Tatsachen für Molekülstrahlung, aber zwei recht gewichtige Argumente stehen dagegen und bekräftigen die Atomrekombinationsauffassung. Eines aber ist wohl mit Sicherheit erwiesen. Bei hohen und tiefen Drucken ist der Ursprung des Kontinuums der gleiche.

Stoßmoleküle. Als Ausweg von freilich zunächst mehr hypothetischem Charakter aus den genannten Schwierigkeiten bietet sich die folgende Möglichkeit dar. Hält man an der Auffassung der Stoßmoleküle fest, so muß unter allen möglichen solchen Molekülen eine Gruppe herausgehoben werden, die sich dann durch ein festes Ausgangsniveau auszeichnen müßte.

Der Stoßvorgang wird allgemein am einfachsten durch Potentialkurven beschrieben. Im Potentialkurvenschema entspricht eine Kurve mit Potentialmulde einem stabilen Molekül, das wir ja ausschließen mußten. Wir brauchen daher nur die Abstoßungskurven zu betrachten, die den Stoß von Teilchen beschreiben, die keine Bindung miteinander eingehen können. Den normalen Fall stellt die in Richtung wachsender Entfernung vom Kern monoton fallende Potentialkurve dar. Zu diesen normalen mit r^{-6} gehenden van der Waalsschen Dipolkräften treten aber bei gleichen Partnern und solchen Zuständen, die ein großes Übergangsmoment zum Grundzustand haben, quantenmechanische Resonanzkräfte, die mit r^{-3} gehen. Diese können eine Abstoßungskurve so deformieren[1]), daß ein Potentialminimum und damit ein stabiler Zustand oberhalb der Dissoziationsgrenze entsteht. Nehmen wir nun eine solche deformierte Potentialkurve mit Potentialminimum als Ausgangsniveau der kontinuierlichen Strahlung an (siehe Fig. 10), so wäre damit die Sonderstellung einer bestimmten Abstoßungskurve erklärt. Denn die Stoßdauer wird natürlich durch Einschaltung eines Potentialminimums[2]) in die Abstoßungskurve verlängert. Ganz be-

[1]) W. Finkelnburg, Kontinuierliche Spektren, S. 126, Berlin 1938; G. W. King, I. H. van Vleck, Phys. Rev. **55**, 1165, 1939. — [2]) Teilchen, deren kinetische Energie nicht zum Überschreiten des Potentialberges ausreicht, können mittels des quantenmechanischen Tunneleffektes doch in das Innere der Mulde gelangen.

sonders trifft dies für Teilchen mit einer kinetischen Relativenergie zu, die gerade dem Werte entspricht, um den die Potentialmulde sich über die Dissoziationsenergie erhebt. In Fig. 10 sind schematisch die Häufigkeitsverteilung der kinetischen Relativenergie (A) und die zum Potentialverlauf gehörige Stoßdauer (B) (ausgezogene Kurven) mit angegeben. Der Flächeninhalt des Produktes beider Kurven ist

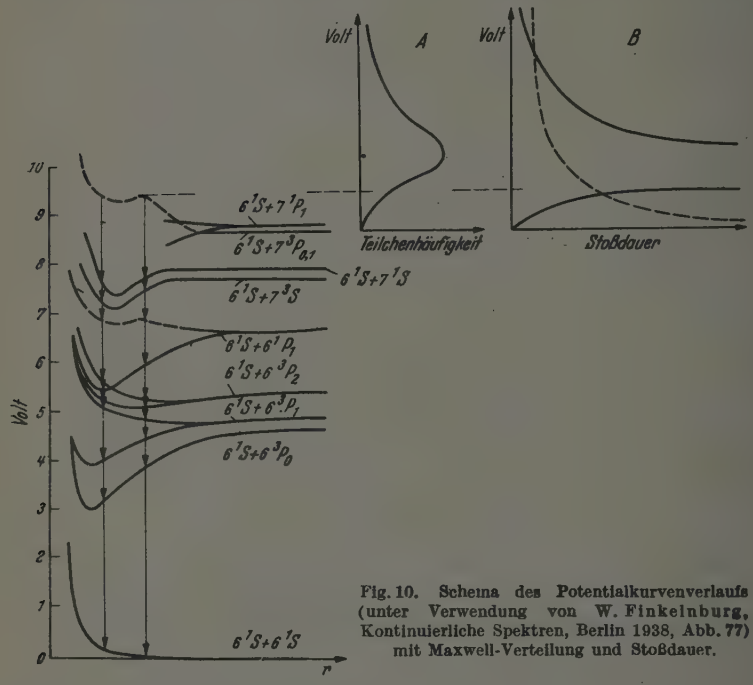


Fig. 10. Schema des Potentialkurvenverlaufs (unter Verwendung von W. Finkelnburg, Kontinuierliche Spektren, Berlin 1938, Abb. 77) mit Maxwell-Verteilung und Stoßdauer.

ein Maß für die mittlere Stoßzeit. Damit diese möglichst groß wird, müssen die Maxima der Kurven A und B nach Möglichkeit bei vergleichbaren Energiewerten liegen. Auf diese Weise läßt sich eine angenäherte Aussage über die Erhebung der Potentialmulde über die Dissoziationsgrenze machen. Auf jeden Fall wird die Stoßdauer wesentlich über den von Rompe und Steenbeck angenommenen Wert[1]) vergrößert und damit die Strahlungsausbeute erhöht werden. Je nach dem Kurvenverlauf von B an der singulären Stelle ist eine Vergrößerung der Stoßzeit um mehrere Größenordnungen und damit

[1]) Der Rompe-Steenbeckschen Abschätzung müßte die gestrichelte Kurve zugrunde gelegt werden.

eine Beseitigung der Diskrepanz zwischen der Abschätzung und den experimentellen Werten denkbar.

Die vorgeschlagene Deutung würde es auch erklären, warum dieses Kontinuum in der Niederdruckentladung auch nicht spurenweise[1]) in Erscheinung tritt. Es muß eben erst eine Art Aktivierungsenergie[2]) vorhanden sein, für die das Gas eine Temperatur von größenordnungsmäßig einigen zehntel Volt besitzen muß. Für den geforderten Mechanismus würde bereits eine ganz flache, fast ebene Mulde genügen. Es wird dadurch ein bestimmtes ausgezeichnetes Ausgangsniveau geschaffen, von dem aus die Übergänge stattfinden, die zur Emission des Kontinuums und der linienartigen Struktur Veranlassung geben. Das Kontinuum kann in Absorption deswegen nicht auftreten, weil die Absorption von angeregten Niveaus ausgehen müßte, deren Häufigkeit aber zu gering ist. Wir wollen nun versuchen, das Ausgangsniveau genauer anzugeben.

Durch die Anregungsspannung wird die Dissoziationsenergie festgelegt[3]). Läßt man bei einer Mittelbildung der Anregungsspannung die auf S. 294 genannten und möglicherweise durch Linienverbreiterungen beeinflußten Wellenlängen fort, so erhält man als Anregungsspannung 8,6 mit einem mittleren Fehler von 0,1 Volt. Dieser Wert kommt der Anregungsspannung 8,64 Volt des $7\,^3P_0$- bzw. $7\,^3P_1$-Niveaus am nahesten. Eine Entscheidung zwischen diesen beiden Niveaus ist nicht mehr möglich.

Die Lage der Mulde oberhalb der Dissoziationsenergie haben wir dann ganz roh in einem energetischen Abstand zu erwarten, der der mittleren kinetischen Relativenergie der Stoßpartner entspricht. Auf Grund der Boltzmann-Verteilung beträgt der Bruchteil $\mathrm{d}N$ der Teilchen mit einer Relativenergie zwischen E und $E + \mathrm{d}E$:

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = -\frac{1}{(kT)^2} e^{-\frac{E}{kT}} E \cdot \mathrm{d}E^4). \qquad (15)$$

[1]) F. Rössler, ZS. f. Phys. 112, 667, 1939 (Arbeit II). — [2]) An dieser Stelle sei die Vermutung geäußert, daß die chemische Aktivierungsenergie auch einem ähnlichen Verlauf der Potentialkurven zuzuordnen ist. — [3]) Man könnte zunächst daran denken, daß die kinetische Energie auch in die Höhe der Anregungsspannung in Gl. (8) eingeht. Das ist aber nicht der Fall, wie sich sofort aus folgender für die Stoßmoleküle charakteristischer Bemerkung ergibt. Für die Strahlstärke ist Gl. (8) und damit allein die Dissoziationsspannung, für die ausgestrahlte Wellenlänge dagegen die um die kinetische Energie vermehrte Dissoziationsspannung maßgebend. — [4]) H. Fowler, Statistische Mechanik, S. 420, Leipzig 1931.

Die mittlere Energie E_m, die wir hier benötigen, errechnet sich dann zu:

$$E_m \cdot N = \int_0^\infty \mathrm{d}N \cdot E = -\frac{N}{(kT)^2} \int_0^\infty E^2 e^{-\frac{E}{kT}} \mathrm{d}E.$$

Zweimalige partielle Integration ergibt:

$$E_m = 2kT. \tag{16}$$

Legen wir den beiden verwendeten Entladungen Achsentemperaturen von 6000 bzw. 8000° abs. zugrunde, so müssen wir die gemessene Anregungsspannung um größenordnungsmäßig 1 Volt erhöhen, um zu dem mittleren Ausgangsniveau zu kommen. Wegen der eigentlich notwendigen Mittelung über den Querschnitt erniedrigt sich noch dieser Wert.

Von dort aus finden dann Übergänge zu den anderen Molekülzuständen unter Aussendung von kontinuierlicher Strahlung statt. Dabei muß aber die Auswahlregel beachtet werden, daß nur gerade mit ungeraden Termen kombinieren können und umgekehrt. Da bisher in der Literatur nur Übergänge zum Grundzustand des Quecksilbermoleküls betrachtet worden sind, ist die Gesamtheit der Potentialkurven angeregter Zustände mit geraden Termen noch nicht durchgerechnet[1]). Ob das Ausgangsniveau zum geraden oder ungeraden Typ gehört, ist unbekannt. Es kommt hinzu, daß der Kernabstand des Potentialminimums nicht genauer festgelegt werden kann. Alle diese Gründe haben zur Folge, daß sich ins einzelne gehende Angaben noch nicht machen lassen. Fig. 10 zeigt nur schematisch die das Kontinuum bedingenden Übergänge.

Qualitativ erkennt man, daß Maxima der spektralen Energieverteilung bei denjenigen Wellenlängen auftreten müssen, wo die Übergänge zu einer der Potentialkurven sich häufen. Das ist bei 3000 und 2400 Å der Fall. Der andere Fall, des Fehlens von Kurven, führt zu einer Lücke zwischen 4000 und 5000 Å. Beide Folgerungen stimmen mit den Messungen in Fig. 9 überein. Das verhältnismäßig steile Abfallen des Spektrums bei 2000 Å ist als energiereichster Übergang zum $6\,^1S_0 + 6\,^3P_0$-Zustand zu verstehen. Weitere Strahlung ist erst beim Übergang zum Grundzustand wieder möglich. Sie muß zu einem noch wesentlich kurzwelligeren engen Kontinuumsbereich um 1300 Å führen.

[1]) Nach einer persönlichen Mitteilung hat S. Mrozowski solche Rechnungen ausgeführt.

Eine Struktur sollte man nun in allen den Fällen erwarten, wo Übergänge zu stabilen Molekülzuständen und damit einzelnen Schwingungsniveaus erlaubt sind. Zu dieser Vorstellung paßt die Tatsache, daß die beobachteten Wellenzahldifferenzen von 50 bzw. 100 cm^{-1} mit dem Verlauf der Potentialkurven der höher angeregten Niveaus vereinbar sind. Die Struktur tritt in diesem Gebiet deswegen besonders deutlich hervor, weil dort die allgemeine kontinuierliche Strahlung ihren Minimalwert hat.

Damit ist also wahrscheinlich gemacht, daß selbst unter den Bedingungen einer Gasentladung von mittleren Drucken Stoßmoleküle, wenn auch besonderer Art, auftreten, die bei wachsendem Druck nur noch erheblich an Zahl zunehmen. Wegen der engen Verknüpfung der Theorien von Plasma und Sternatmosphären wird man hieraus schließen müssen, daß Stoßmoleküle auch in der Astrophysik eine Rolle spielen und dann gerade wegen der dort herrschenden hohen Drucke werden Berücksichtigung finden müssen.

Den Herren Prof. Dr. R. Seeliger und Prof. Dr. P. Jordan danke ich vielmals für wertvolle Diskussionen, den Herren Dr. Friederich und Dr. Krefft der Studiengesellschaft dafür, daß sie die Durchführung der Arbeit ermöglichten. Schließlich schulde ich Herrn Referendar Gudian Dank für seine Hilfe bei den Messungen.

Berlin, Greifswald, Januar 1943.

Über eine neue Methode zur Messung relativer Häufigkeiten von Isotopen.

Die Isotopenverteilung und das Atomgewicht von Hafnium.

Von **J. Mattauch** und **H. Ewald** in Berlin-Dahlem.

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 31. August 1943.)

Eine Durchsicht der bisherigen Arbeiten über Messungen relativer Häufigkeiten von Isotopen zeigt, daß die elektrometrische Methode, obwohl aus apparativen Gründen meist nur bei kleinem Auflösungsvermögen angewendet, die verläßlichsten Resultate ergibt, da sie nur die leicht zu überprüfende Konstanz der Ionenquelle zur Voraussetzung hat. Der photometrischen Methode liegt darüber hinaus die nicht immer erfüllte Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes zugrunde; sie hat aber viele Vorteile, wie leichtere Handhabung und größere Empfindlichkeit, und wird bei Apparaten großen Auflösungsvermögens stets verwendet. Die in der vorliegenden Arbeit durchgeführte photometrische Methode sucht die Vorteile beider Methoden zu verbinden, ohne ihre Nachteile in Kauf nehmen zu müssen. Das wird dadurch erreicht, daß zugleich mit dem zu untersuchenden Element (hier das Hafnium) auf der gleichen Platte ein zweites, geeignet ausgewähltes Eichelement aufgenommen wird, dessen Isotopenhäufigkeiten von anderer Seite zuverlässig elektrometrisch gemessen worden sind. Dieses liefert die Schwärzungskurve, der graphisch die Intensitätsverhältnisse der gesuchten Isotopenlinien entnommen werden, ohne daß eine der beiden genannten Voraussetzungen gemacht werden muß. Zur Erzeugung des Hf-Spektrums, das hintereinander mit Os, Kr, Xe, Zn und Hg als Eichelement aufgenommen wird, konnte daher der Dempstersche Hochfrequenzfunke verwendet werden, der bei kleinem Substanzverbrauch eine ergiebige und bequeme, wenn auch nicht sehr konstante Ionenquelle darstellt. Für das seltene Hf-Isotop erwies sich dafür Hf-Metallpulver, zu Pillen gepreßt, als geeignetste Elektrode. Eine ausführliche Diskussion der Ergebnisse zeigt, daß der Methode keine systematischen Fehler anhaften, die eventuell durch verschiedene Eindringtiefe der Ionen in die photographische Schicht oder verschieden große Entfernung der zu vergleichenden Liniengruppen auf der Platte entstehen könnten. Die Resultate bei Hf sind:

Massenzahl	174	176	177	178	179	180
Prozentuelle Häufigkeit	0,18	5,30	18,47	27,10	13,84	35,11

Der wahrscheinliche Fehler beträgt beim ersten Wert etwa 5%, beim zweiten 2% und bei den letzten vier durchschnittlich 0,5%. Demnach ist die Methode, mit der verhältnismäßig rasch gearbeitet werden kann, den besten elektrometrischen Methoden an Genauigkeit ebenbürtig. Für die mittlere Massenzahl von Hf ergibt sich 178,543 $\pm$ 0,004 und für das chemische Atomgewicht (bei einem geschätzten Packungsanteil von + 0,2) 178,50 $\pm$ 0,01 (int. Wert 178,6), wobei der Fehler in der Hauptsache durch die Unsicherheit des Packungsanteils gegeben ist. Ein Versuch, die Anreicherung des Folgeprodukts des β-aktiven Cp-Isotops in Hf aus Thortveitit nachzuweisen, schlägt fehl, da sich auch bei diesem seltenen, an Cp verhältnismäßig reichen Mineral wegen zu großer Beimengung von natürlichem Hf die gleichen Linienverhältnisse ergeben, wie bei gewöhnlichem Hafnium.

I. Einleitung.

Die bisherigen Methoden zur massenspektroskopischen Messung von Isotopenhäufigkeiten lassen sich in zwei Gruppen, die elektrometrischen und die photometrischen, einteilen.

1. Die elektrometrischen Methoden. Die Anfänge der ersten Methode, die in der elektrometrischen Messung der einzelnen Ionenströme besteht, sind fast so alt wie die Kanalstrahlanalyse selbst. Schon J. J. Thomson [1]) hat die durch die verschiedenen Massen erzeugten Parabeln durch Änderung der Stärke des Magnetfeldes nacheinander auf einen parabolischen Schlitz gebracht, hinter dem die Ionen in einem Faraday-Zylinder zur Messung der abgegebenen Ladung gesammelt wurden.

a) Dempster [2]) im Ryerson-Laboratorium Chicago, der als erster Messungen der relativen Häufigkeit von Isotopen machte, ist bei seiner alten Apparatur ganz analog vorgegangen. Später [3]) wurde die elektrometrische Messung zur schnelleren Ablesung dahin verfeinert, daß der Aufladung des (Wilson-) Elektrometers das Gleichgewicht gehalten wurde durch einen variablen negativen Ionenstrom einer Kammer, der durch die β-Teilchen eines radioaktiven Präparates erzeugt wurde. Der Betrag an diesen wurde in exakt meßbarer und reproduzierbarer Weise durch einen mit Mikrometerschraube veränderlichen Schlitz variiert.

Die Dempstersche Methode, die bis heute im wesentlichen amerikanisches Monopol geblieben ist, wurde nach einigen älteren Arbeiten [4]) in neuerer Zeit vor allem in Minneapolis [5]), Princeton [6]), Washington [7]),

---

[1]) J. J. Thomson, Phil. Mag. (6) **24**, 209, 1912 (*E* const, *H* variabel). — [2]) A. J. Dempster, Phys. Rev. **11**, 316, 1918. — [3]) A. J. Dempster, ebenda **18**, 415, 1921 (Li, Mg); **20**, 631, 1922 (K, Ca, Zn). — [4]) M. Morand, Ann. d. Phys. **7**, 164, 1927 (Li); T. R. Hogness u. H. M. Kvalnes, Nature **122**, 441, 1928 (Ne); K. T. Bainbridge, Journ. Franklin Inst. **212**, 317, 1931 (Li, Na, K); Phys. Rev. **36**, 1668, 1930 (Cs). — [5]) J. T. Tate u. P. T. Smith, Phys. Rev. **43**, 672, 1933 (He); **46**, 773, 1934; A. L. Vaughan, J. H. Williams u. J. T. Tate, Bull. Amer. Phys. Soc. **9**, Nr. 3, Abs. 23, 1934 (C, N, Ne, A); A. O. Nier, Rev. Sci. Instr. **6**, 254, 1935; Phys. Rev. **50**, 1041, 1936 (A, K, Rb, Zn, Cd); **55**, 1143, Abs. 163, 1939 (Fe, Cr); **60**, 112, 1941 (radiogenes und gewöhnliches Pb). — [6]) W. Bleakney, Phys. Rev. **40**, 496, 1932; **41**, 32, 1932 (H); W. Bleakney u. A. J. Gould, Phys. Rev. **44**, 265, 1933 (H); S. H. Manuel, H. C. Urey u. W. Bleakney, J. Amer. Chem. Soc. **56**, 2601, 1934 (O); W. Bleakney u. J. A. Hipple, Phys. Rev. **47**, 800, Abs. 78, 1935 (O); M. B. Sampson u. W. Bleakney, ebenda **50**, 456, 1936 (Ba, Sr, In, Ga, Li, Na); **50**, 732, 1936 (Mn, Nb, Pd, Pt, Ir, Rh, Co); J. P. Blewett, ebenda **49**, 900, 1936 (Br); W. Bleakney, J. P. Blewett, R. Sherr u. R. Smoluchowski, Phys. Rev. **50**, 545, 1936 (Be). — [7]) A. K. Brewer u. P. D. Kueck, Phys. Rev. **46**, 894, 1934 (Li, K, Rb); A. K. Brewer, J. Amer. Chem. Soc. **58**, 365, 370, 1936 (K verschiedener Herkunft); Journ. Chem. Phys. **4**, 350, 1936 (Li, K, Rb).

Cambridge (Mass.)[1]) und Baltimore[2]) weitergepflegt und ausgebildet. Stets werden dabei energiehomogene Strahlen verwendet und durch 180° Ablenkung in einem Magnetfeld (Solenoid, Elektromagnet oder permanente Magnete) analysiert, wobei gleichzeitig Richtungsfokussierung eintritt; die Herstellung der Strahlen erfolgt, indem die Ionen durch Elektronenstoß mit Gas- oder Dampfatomen oder -molekülen an definierter Stelle erzeugt und alle durch die gleiche Spannung von etwa 1000 bis 2000 Volt beschleunigt werden. Nach dem Vorgang von Dempster wird in der Regel das Massenspektrum bei konstantem Magnetfeld durch langsame Veränderung der Beschleunigungsspannung am Austrittsschlitz vorbeigeführt. Die Messung der Ionenströme erfolgt meist mit dem Compton-Elektrometer oder einer Elektrometerröhre mit Verstärkeranordnung (Röhrengalvanometer) [3]) mit Spannungsempfindlichkeiten bis zu 10^5 mm/Volt und Stromempfindlichkeiten bis zu etwa $2 \cdot 10^{-17}$ Amp./mm. In einigen neueren Arbeiten von Nier und seinen Mitarbeitern[4]) wird unter Beibehaltung der Richtungsfokussierung auch 60° Ablenkung im Magnetfeld verwendet[5]).

In Wien[6]) wurden ferner einige Versuche mit einem nach einem Vorschlag von Bartky und Dempster[7]) gebauten doppelfokussierenden Instrument, das als eine Abänderung des Dempsterschen Typs aufgefaßt werden kann, mit elektrometrischer Messung (Lindemann-Elektrometer) durchgeführt.

---

[1]) A. O. Nier, Phys. Rev. **52**, 885, 1937 (Os); **52**, 933, 1937 (Hg, Xe, Kr, Be, J, As, Cs); **53**, 282, 1938 (Ca, Ti, S, A); **54**, 275, 1938 (Sr, Ba, Bi, Tl, Hg); Journ. Amer. Chem. Soc. **60**, 1571, 1938 (Pb verschiedener Herkunft); A. O. Nier u. E. A. Gulbransen, J. Amer. Chem. Soc. **61**, 697, 1939 (C verschiedener Herkunft); A. O. Nier, Phys. Rev. **55**, 150, 1939 (U); **55**, 153, 1939 (radiogenes Pb); G. E. Valley, ebenda **57**, 1058, Abs. 22, 1940 (Mo); **59**, 836, 1941 (Ni); G. E. Valley u. H. H. Anderson, ebenda **59**, 113, Abs. 41, 1941 (terrestrisches und meteorisches Fe). — [2]) H. Brown, J. J. Mitchell u. R. D. Fowler, Rev. Sci. Instr. **12**, 435, 1941; J. J. Mitchell, H. S. Brown u. R. D. Fowler, Phys. Rev. **60**, 359, 1941 (Co). — [3]) Siehe z. B. L. Du Bridge u. H. Brown, Rev. Sci. Instr. **4**, 532, 1933; D. B. Penick, ebenda **6**, 115, 1935; J. Schintlmeister, Die Elektronenröhre als physikalisches Meßgerät. Wien, Springer, 1943. — [4]) A. O. Nier, Rev. Sci. Instr. **11**, 212, 1940 (C, gewöhnliches und angereichertes Ne); B. F. Murphy, Phys. Rev. **59**, 320, 1941 (O); B. F. Murphy u. A. O. Nier, ebenda **59**, 771, 1941 (C verschiedener Herkunft); A. O. Nier, R. W. Thomson u. B. F. Murphy, ebenda **60**, 112, 1941 (radiogenes und gewöhnliches Pb). — [5]) *Nachtrag bei der Korrektur:* Ein ähnliches Massenspektrometer wurde kürzlich auch in Göttingen aufgestellt; s. W. Paul, Naturw. **31**, 419, 1943 (Ag). — [6]) H. Bondy u. K. Popper, Ann. d. Phys. **17**, 425, 1933 (Na); H. Bondy, G. Johannsen u. K. Popper, ZS. f. Phys. **95**, 46, 1935 (K, Rb). — [7]) W. Bartky u. A. J. Dempster, Phys. Rev. **33**, 1019, 1929.

Mit anderen Apparaten als denen vom Dempsterschen Typ wurde die elektrometrische Messung nur selten angewendet. Nur Smythe[1]) (Pasadena) hat in Verbindung mit seinem Geschwindigkeitsfilter an Sauerstoffkanalstrahlen von über 10 kV Energie den noch heute gültigen Umrechnungsfaktor der Atomgewichte von der physikalischen auf die chemische Skala elektrometrisch (Hoffmann-Elektrometer) bestimmt.

Bei all diesen Versuchen wird der Ionenstrom über das zu untersuchende Massenspektrum hinweg punktweise aufgenommen, und der Vorteil der Methode besteht darin, daß die relativen Häufigkeiten der Isotope direkt durch das Verhältnis der Spitzenhöhen der Maxima gegeben sind; diese werden öfters zur besseren Definierung der Messung durch verschiedene Wahl der Größe von Eintritts- und Austrittsschlitz mit Absicht flach gehalten. Die wesentliche Voraussetzung ist dabei die Konstanz der Ionenemission des zu untersuchenden Elements während der in der Regel recht beträchtlichen Versuchsdauer. Durch Wiederholung der Messung überzeugt man sich von der Gültigkeit dieser Voraussetzung; bei einigen neueren Apparaten dieser Art, die meist für Routinemessungen mit kleinem Auflösungsvermögen gebaut wurden, geschieht das, indem man die beiden Maxima, deren Verhältnis gesucht wird, durch Wechsel der Einstellung wiederholt und rasch hintereinander auf den Ausgangsschlitz bringt.

b) Von der Voraussetzung der Konstanz des Ionenstromes kann man sich durch Verwendung einer schon von Aston[2]) vorgeschlagenen Nullmethode frei machen, die kürzlich von Straus[3]) ausgeführt wurde, und zwar in Verbindung mit einem auf Grund der allgemeinen Herzogschen[4]) Theorie gebauten, doppelfokussierenden Apparat nach Art des neuen Dempsterschen Massenspektrographen[5]). Zur Erzeugung der durch etwa 20 kV beschleunigten Ionen wurde die elegante Dempstersche Methode[5]) des Hochfrequenzfunkens benutzt, von der im allgemeinen keineswegs Konstanz der Ionenemission vorausgesetzt werden kann. Indem Straus die beiden Isotope, deren Häufigkeitsverhältnis gemessen werden soll, gleichzeitig zwei getrennten, mit je einem Elektrometer verbundenen Auffängern zuführt, kann er die grundlegende Schwierigkeit der Konstanz der Ionenquelle gänzlich vermeiden; die

[1]) W. R. Smythe u. J. Mattauch, Phys. Rev. 40, 429, 1932 (O); W. R. Smythe, ebenda 45, 299, 1934 (O). — [2]) F. W. Aston, Proc. Roy. Soc. London (A) 126, 511, 1930. — [3]) H. A. Straus, Phys. Rev. 59, 430, 1941 (Ni). — [4]) R. Herzog, ZS. f. Phys. 89, 447, 1934; 97, 596, 1935. — [5]) A. J. Dempster, Proc. Amer. Phil. Soc. 75, 755, 1935; Rev. Sci. Instr. 7, 46, 1936.

Elektrometerausschläge werden durch eine geeignete Kompensationsschaltung auf Null gehalten, und das gesuchte Ladungsverhältnis ergibt sich als das Verhältnis zweier dazu jeweils einzustellender Widerstände. Gegenwärtig arbeitet Straus zwar noch — wohl zur Erreichung größerer Intensität — mit einer für Doppelfokussierung recht geringen Auflösung und muß daher nicht unbeträchtliche Korrekturen wegen des Untergrundes benachbarter Linien anbringen; nach Überwindung der experimentellen Schwierigkeiten verspricht diese Methode jedoch die voraussetzungsloseste für die Messung von Isotopenverhältnissen zu werden.

2. Die photometrischen Methoden. Als qualitatives Nachweisinstrument für positive Ionenstrahlen besitzt die photographische Platte nicht zu unterschätzende Vorteile, wie leichtere Handhabung und schnelleres Arbeiten, gleichzeitige Aufnahme des gesamten zu untersuchenden Massenspektrums und dauernder Beleg der Messung, sowie größere Empfindlichkeit[1]) vor allem bei schnellen Ionenstrahlen (15 bis 40 kV) usw. Als quantitatives Meßinstrument ist die Platte aber dem Elektrometer oder den Röhrenanordnungen zweifellos unterlegen. Denn die Schwärzung oder Dichte S ist eine nur empirisch bestimmbare Funktion der Intensität I des Ionenstromes, die nicht nur für verschiedene Plattensorten, sondern auch für verschiedene Emulsionsnummern des gleichen Erzeugnisses in der Regel verschieden ist. Beim Vergleich verschiedener Aufnahmen auf der gleichen Platte ist ferner zu berücksichtigen, daß als zweite Variable die Belichtungszeit t hinzukommt: $S = f(I, t)$. Die Abhängigkeit der Schwärzung von zwei weiteren Veränderlichen, der Masse und der Geschwindigkeit, umgeht man in der Weise, daß man stets nur Ionen gleicher Energie miteinander vergleicht. Auch wird es vorteilhaft sein, nur Schwärzungen miteinander zu vergleichen, die von Strahlen gleichen Einfalls-

[1]) Die kleinste, mit Elektrometerröhre und Verstärkeranordnung praktisch gerade noch nachweisbare Stromstärke liegt bei etwa $2 \cdot 10^{-17}$ Amp. oder 125 Ionen/sec. Jedoch wird man wegen der dann notwendigerweise langen Einstelldauer diese Empfindlichkeit kaum ausnützen können, wenn es sich darum handelt, ein Isotopenspektrum in, sagen wir, 1 Stunde durchzumessen. Auf der photographischen Platte sind bei einer einigermaßen scharfen Linie etwa 2000 entwickelte Körner zu ihrer Erkennung notwendig. Das ergibt bei einstündiger Belichtung eine Empfindlichkeit von 0,56 Ionen/sec, die mehr als 200mal größer ist als bei den elektrometrischen Anordnungen. (Wir verdanken diese Bemerkung einer brieflichen Mitteilung von H. Lichtblau, derzeit im Felde.)

winkels herrühren. Dann ist noch die im allgemeinen gültige Annahme zu machen, daß die photographische Wirkung isotoper Ionen, die ja auch gleiche Ladung besitzen, auf die Silberhalogenidkörner, die bei den modernen Platten in dünner Schicht auf der Gelatine liegen, die gleiche ist. Nur bei den Isotopen ganz leichter Elemente wäre für eine eventuell verschiedene Eindringtiefe eine Korrektur anzubringen, deren Sinn jedoch nicht feststeht.

a) Aston hat als erster die photometrische Methode zur Messung von Isotopenhäufigkeiten ausgearbeitet und in einer glänzenden Reihe von Arbeiten fast alle Elemente des Periodischen Systems durchgemessen[1]). Dazu mußte für Kanalstrahlen von 20 bis 50 kV Energie die Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes vorausgesetzt werden, welches besagt, daß S nur eine Funktion des Produktes $I \cdot t$ sein soll.

Im Idealfalle benötigt man dann für die Messung eines Häufigkeitsverhältnisses nur zwei Aufnahmen, bei denen die Linien der beiden zu vergleichenden Isotope mit den Ionenströmen I_1 und I_2 durch geeignete Wahl der Belichtungszeiten t_1 und t_2 auf gleiche Schwärzung gebracht worden sind. Das gesuchte Verhältnis ist dann durch $I_1/I_2 = t_2/t_1$ gegeben. Tatsächlich verschafft man sich — für jede Platte getrennt — die Schwärzungskurve $S = f(I \cdot t)$ oder ein Stück derselben durch eine Reihe von Aufnahmen verschiedener Exposition, z. B. für das zweite Isotop, und sucht durch graphische Interpolation den $I \cdot t$-Betrag auf, der der Schwärzung des ersten Isotops entspricht. Als Funktion von $\log(I \cdot t)$ aufgetragen, ergibt die Schwärzung eine S-förmige Kurve, die gewöhnlich in der Nähe des Wendepunktes ein genügend langes und geradliniges Stück für die graphische Interpolation aufweist. Statt der Schwärzung S wird in der Regel irgendeine reproduzierbar zu messende Größe — z. B. das Maximum des Photometerausschlages — benutzt, die selbst wieder eine eindeutige Funktion der Schwärzung ist. Im Gegensatz zur elektrometrischen Methode wird hier nicht der ganze Ionenstrom erfaßt; daher muß noch beim Vergleich verschiedener Linien auf gleiche Linienbreite korrigiert werden, da sich diese in einer für den benutzten Massenspektrographen bekannten

[1]) F. W. Aston, Proc. Roy. Soc. London (A) **126**, 511, 1930 (Kr, Xe, Hg); **130**, 302, 1931 (Zn, Sn, Cr, Mo); **132**, 487, 1931 (Se, Br, B, *W*, Sb, *Os*, Ru, Te, Ge, *Re*, Cl); **134**, 571, 1932 (Cs, Sr, Li, Rb, Ba, Sc, *Tl*); **140**, 535, 1933 (gewöhnliches und radiogenes Pb); **146**, 46, 1934 (Ce, Nd, Sm, Eu, Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Yb, Cp); **149**, 396, 1935 (Hf, Th, Rh, Ti, Zr, Ca, Ga, Ag, C, Ni, Cd, Fe, In).

oder zu ermittelnden Weise mit der Lage der Linie auf der Platte ändert.

Die photometrische Methode ist nach Aston vor allem auf dem Kontinent gepflegt worden. Bei der in diesem Abschnitt geschilderten und am meisten verwendeten Variante hat sie außer der Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes auch die Konstanz der Ionenquelle zur Voraussetzung. Besonders mit Parabelapparaturen wurde sie in München[1]), Amsterdam[2]), Berlin[3]) und neuerdings auch Wien[4]), mit dem doppelfokussierenden Instrument in Wien[5]) zur Messung von relativen Häufigkeiten verwendet.

b) Um die Voraussetzung der Konstanz der Ionenquelle zu vermeiden, hat Aston ferner die Methode der intermittierenden Belichtungen entwickelt. Die beiden zu vergleichenden Linien werden in rasch aufeinanderfolgenden Expositionen nebeneinander auf die Platte gebracht, indem die Ablenkspannung am elektrischen Feld durch eine passend gewählte kleine Zusatzspannung abwechselnd erhöht oder vermindert wird. Das gewünschte Expositionsverhältnis t_2/t_1 wird auf einer geteilten, rotierenden Kreisscheibe mit Hilfe zweier radialer Arme eingestellt, die den Umschalter der Zusatzspannung betätigen. Zwei sonst längere Zeit in Anspruch nehmende Expositionen werden dadurch in eine große Anzahl kurzer mit dem gleichen Verhältnis zerhackt. Der Einfluß von Schwankungen im Entladungsrohr wird dadurch stark heruntergedrückt.

Die mit dieser Methode gemessenen Elemente sind in der Literaturangabe fett gedruckt. Das schwerste unter ihnen ist Molybdän, von dem Aston bemerkt, daß es gerade noch auf diese Weise meßbar war. Da die

---

[1]) H. Muckenthaler, Phys. ZS. **35**, 851, 1934 (O, H). — [2]) P. Zeemann u. J. de Gier, Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam **37**, 127, 1934 (A); J. de Gier u. P. Zeemann, ebenda **38**, 810, 1935 (Ni); **38**, 959, 1935 (Fe); **39**, 327, 1936 (Mo); W. Lub, ebenda **42**, 253, 1939 (Ni, Cr). — [3]) W. Schütze, Wiss. Veröff. d. Siemens-Werke **16**, 87, 1937 (gewöhnliches A und solches, bei dem die Isotopenhäufigkeiten künstlich verändert waren). — [4]) K. Clusius u. G. Dickel, Naturwiss. **28**, 711, 1940; **29**, 560, 1941 (massensp. Untersuchung von R. Herzog u. A. Bönisch, gewöhnliches Kr und solches mit künstlich geänderter Isotopenverteilung). — [5]) J. Mattauch, Sitzungsber. d. Wien. Akad. IIa, **145**, 461, 1936 (^{84}Sr); Naturwiss. **25**, 189, 1937 (radiogenes Sr); J. Mattauch u. V. Hauk, ebenda **25**, 763, 1937 (gewöhnliches und radiogenes Pb); ebenda **25**, 780, 1937 (Nd); J. Mattauch u. H. Lichtblau, ZS. f. Phys. **111**, 514, 1939 (Cp); J. Mattauch u. H. Lichtblau, ZS. f. physik. Chem. (B) **42**, 288, 1939; H. Lichtblau u. J. Mattauch, ZS. f. Phys. **117**, 502, 1941 (Mo); H. Lichtblau, Naturwiss. **27**, 260, 1939 (Eu).

Linien der einen Aufnahme zwischen die der anderen gesetzt werden müssen, verlangt diese Methode mindestens das doppelte Auflösungsvermögen, wie zur Trennung der Isotope notwendig wäre. Für ^{100}Mo muß daher das Auflösungsvermögen des Massenspektrographen auf gut über 1:200 eingestellt werden.

c) Eine dritte Variante, die ebenso wie die vorige die Voraussetzung der Konstanz der Ionenquelle umgeht und die sich mit der von uns zu beschreibenden Methode am nächsten berührt, wurde von Aston, ohne von ihm besonders durchgebildet zu werden, für einige schwere Elemente benutzt. Die recht zahlreichen Isotope des Quecksilbers, dessen Massenspektrum wegen der verwendeten Hg-Pumpen fast auf jeder Platte vorhanden ist, liefern mit ihren recht gleichmäßig verteilten relativen Häufigkeiten die Gradationskurve der Platte. Mit ihrer Hilfe werden die relativen Häufigkeiten der Isotope derjenigen von Aston untersuchten Elemente ermittelt, die in der Nähe von $_{80}$Hg liegen, da von diesen angenommen werden kann, daß ihre photographische Wirkung die gleiche ist. Im Literaturverzeichnis sind sie durch kursiven Druck gekennzeichnet. Da das Massenspektrum des zu untersuchenden Elementes meist lange Expositionszeiten erfordert, die Hg-Linien dagegen sehr leicht erscheinen, werden sie meist durch eine Reihe geeigneter kürzerer Expositionen auf die gleiche Platte gesetzt.

In Abwandlung dieser Methode geht Wahl[1]), Helsingfors, bei der genauen Bestimmung der Isotopenhäufigkeiten einiger seltenen Erden in einem doppelfokussierenden Massenspektrographen nach Mattauch-Herzog so vor, daß er auf jeder Platte mit Röntgenstrahlung und einem rotierenden Sektor eine Schwärzungsskala in 10 Stufen aufnimmt, woraus er die Gradationskurve der Platte erhält. Vorausgesetzt ist dabei, daß die photographische Wirkung von Ionenstrahlen die gleiche ist wie die von Röntgenstrahlen; m. a. W. es wird die Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes, die für Röntgenstrahlen stets erfüllt ist, auch für Ionenstrahlen angenommen. Die gleiche Voraussetzung gilt auch für die Astonsche Variante dieser Methode, da die Häufigkeiten der Hg-Isotope unter Voraussetzung des $I \cdot t$-Gesetzes ermittelt worden waren. Wie H. Lichtblau[2]) zeigen konnte, ist diese Voraus-

[1]) W. Wahl, Naturwiss. 29, 536, 1941; Finska Kemistanfundets Medd. Nr. 1, 1941 (Yb); Soc. Sci. fenn., comm. phys.-math. 11, 1, 1941 (Gd); Suomen Kemistiseuran Tiedonantoja 50, 10, 1941 (Er). — [2]) H. Lichtblau, Phys. ZS. 41, 82, 1940; H. Lichtblau u. J. Mattauch, ZS. f. Phys. 117, 502, 1941.

setzung für die von Wahl benutzten Q_3-Platten der Ilford Ltd. erfüllt, nicht aber für die Q_1-Platten der gleichen Firma.

II. Ziel der Arbeit.

Wie aus der Einleitung hervorgeht, wurde bei den mit schnellen Ionenstrahlen (10 bis 40 kV) arbeitenden Massenspektrographen mit Geschwindigkeits- oder Doppelfokussierung bisher fast immer die photographische Methode benutzt[1]). Das hatte zur Folge, daß ihnen bei relativen Häufigkeitsmessungen von Isotopen allmählich der Rang abgelaufen wurde von den mit elektrometrischen Methoden arbeitenden Apparaten mit einfacher Richtungsfokussierung vom Dempster-Nierschen Typ, die langsame Ionenstrahlen (1 bis 2 kV) benutzen. Dies um so mehr, als Versuche von H. Lichtblau zum Teil mit dem einen von uns[2]) ergaben, daß die hauptsächlichste Voraussetzung der photographischen Methode (die Gültigkeit des $I \cdot t$-Gesetzes) durchaus nicht, wie bis dahin allgemein angenommen, für alle bei massenspektrographischen Arbeiten verwendeten Platten zutrifft.

Mit den zuerst genannten Apparaten kann aber ein viel größeres Auflösungsvermögen erzielt werden; deshalb und wegen der bereits genannten Vorzüge der photographischen Methode, mit der besonders dann bequem und schnell zu arbeiten ist, wenn die oft zahlreichen Vergleichsaufnahmen zur Ermittlung des $I \cdot t$-Betrages für die verschiedenen Isotope fortfallen, erschien es sehr erstrebenswert, auch diese zu einer Präzisionsmethode für relative Häufigkeitsmessungen auszubilden. Besonders für Routinemessungen an Isotopengemischen, die künstlich im Laboratorium oder durch die Natur selbst verändert waren, z. B. für biologische Indikatorversuche mit den seltenen stabilen Isotopen der lebenswichtigen Elemente (C, N, O) oder bei den für geologische Altersbestimmungen notwendigen Untersuchungen radiogener Endprodukte (Pb, Sr) war das sehr erwünscht. Gleichzeitig sollte die neue Methode aber auch von der der elektrometrischen Methode anhaftenden Voraussetzung der Konstanz der Ionenquelle frei sein; denn bei der sonst so eleganten Dempsterschen Ionenerzeugung im Hoch-

[1]) Eine Ausnahme hiervon bildet neben der in der Einleitung unter 1a genannten Smytheschen [Phys. Rev. **40**, 429, 1932 (O); **45**, 299, 1934 (O)] Messung von $^{18}O : {}^{16}O$ nur die unter 1b beschriebene Arbeit von Straus [Phys. Rev. **59**, 430, 1941 (Ni)], bei der das Auflösungsvermögen des Apparates aber auch stark heruntergesetzt wurde. — [2]) H. Lichtblau, Phys. ZS. **41**, 82, 1940; H. Lichtblau u. J. Mattauch, ZS. f. Phys. **117**, 502, 1941.

frequenzfunken, mit der sich Ionenstrahlen jedes beliebigen Elementes leicht und bei sehr kleinem Substanzverbrauch herstellen lassen, kann diese Voraussetzung nicht gemacht werden.

Als erstes Element, dessen Isotopenverteilung nach der hier zu beschreibenden Methode gemessen werden sollte, wurde Hafnium gewählt. Neben dem Umstand, daß die Häufigkeiten seiner Isotope bisher nur aus Schätzungen von Aston[1]) bekannt waren, spielte für diese Wahl folgende Überlegung eine Rolle: Aus Cassiopeium müßte durch seine natürliche β-Aktivität[2]) ein bestimmtes Hafnium-Isotop entstehen; man konnte daher hoffen, daß sich bei einem Hf-Präparat aus einem alten, an Yttererden verhältnismäßig reichem Mineral das Isobar des aktiven Cp-Isotops durch eine etwas größere Häufigkeit markieren würde. Nach einem Vorschlage, den Herr Prof. V. M. Goldschmidt vor längerer Zeit dem einen von uns machte, käme dafür eventuell das sehr seltene Mineral Thortveitit in Frage, das bei einem an sich geringen Zirkongehalt ein ungewöhnlich hohes Hf/Zr-Verhältnis aufweist.

III. Methode der Eichelemente.

Die im folgenden beschriebene photometrische Methode berührt sich am nächsten mit der in der Einleitung unter 2c) genannten, ohne jedoch von der Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes oder sonst einer theoretischen Annahme über den Verlauf der Schwärzungsfunktion der Platte Gebrauch zu machen. Sie hat Ähnlichkeit mit der in der optischen Spektrometrie bekannten Analysenmethode mit Hilfe von Leitproben.

Der Grundgedanke war dabei, sich mit Hilfe eines Eichelements, dessen Isotopenhäufigkeiten von anderer Seite zuverlässig elektrometrisch gemessen worden sind, die Schwärzungskurve der Platte zu verschaffen. Dafür wird am besten ein isotopenreiches Eichelement ausgewählt, dessen (elektrometrisch gemessene) relative Häufigkeiten möglichst gleichmäßig über einen größeren Bereich verteilte Werte haben. Wenn man dann die Höhe der Photometerausschläge für die Einzellinien als Funktion ihrer relativen Häufigkeiten aufträgt, ergibt sich direkt eine „Schwärzungskurve", die einen glatten Verlauf zeigen muß. Das Spektrum dieses Eichelementes wurde zugleich mit dem des

[1]) F. W. Aston, Proc. Roy. Soc. London (A) **149**, 396, 1935. — [2]) M. Heyden u. W. Wefelmeier, Naturwiss. **26**, 612, 1938; W. L. Libby, Phys. Rev. **56**, 21, 1939.

zu untersuchenden Elementes — in diesem Falle Hafnium — erzeugt. Man erhält also nicht nur für jede Platte, sondern für jede einzelne Aufnahme eine solche Schwärzungskurve.

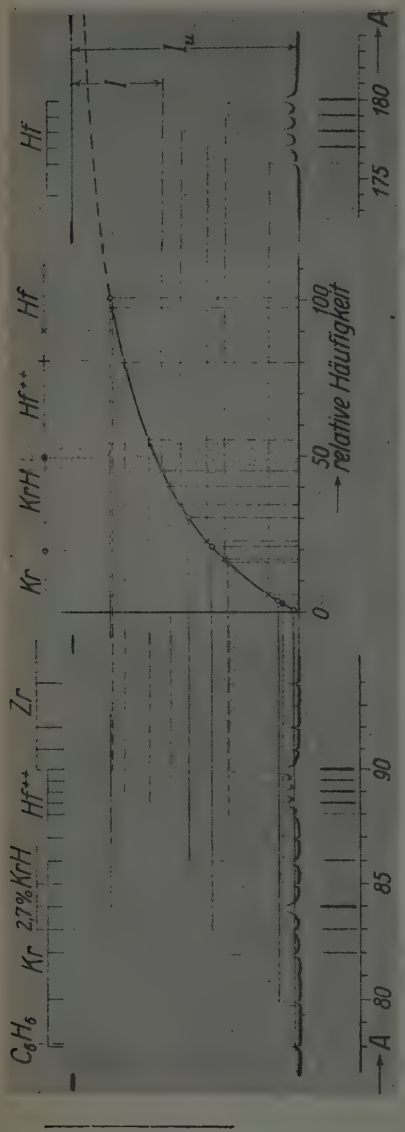


Fig. 1. Bestimmung der relativen Häufigkeiten der Hafniumisotope mit Hilfe von Krypton als Eichelement.

Fig. 1 gibt als Beispiel zwei Teilausschnitte einer einzelnen Aufnahme und darüber angeordnet die zugehörigen Photometerkurven. Links die Linien des Eichelementes Kr und die des doppelt geladenen Hf, rechts die des einfach geladenen Hf; von den schwachen Störlinien C_6H_6, KrH und Zr sei hier vorläufig abgesehen. Die in der Mitte gezeichnete Eichkurve wurde direkt mit Hilfe der Kr-Linienhöhen konstruiert, unter Verwendung der von Nier [1]) erhaltenen Zahlen für die relativen Häufigkeiten der Kr-Isotope (ausgezogene Striche, die Eichpunkte sind in der Kurve durch kleine Kreise gekennzeichnet)[2]). Natürlich muß die Eichkurve durch den Nullpunkt gehen; ein weiterer Anhaltspunkt für den Verlauf der Kurve in ihrem oberen Teil ergibt sich dadurch, daß sie sich asymptotisch der Sättigungsgrenze der Photoplatte nähern muß, die im äußersten Falle mit der oberen Nullinie des Photometerausschlages (völlige Dunkelheit) zusammenfällt. In eine auf diese Weise sorgfältig auf Milli-

[1]) A. O. Nier, Phys. Rev. 52, 933, 1937. — [2]) Über eine kleine, die Veränderung der Linienbreite berücksichtigende Korrektur s. weiter unten.

meterpapier gezeichnete Eichkurve kann man direkt mit den gemessenen Photometerausschlägen der Linien des zu bestimmenden Elementes hineingehen (hier einfach geladenes Hf: strichpunktiert, schräge Kreuze in der Eichkurve; doppelt geladenes Hf: gestrichelt, Pluszeichen in der Eichkurve). Die Ablesewerte auf der Abszisse geben dann unmittelbar die gesuchten Relativzahlen der Isotopenhäufigkeiten[1]); von diesen wurden jeweils zwei benachbarte zu einem „Linienverhältnis" eines Isotopenpaares zusammengefaßt.

Zur Durchführung dieses Verfahrens war es notwendig, bei der Herstellung der Aufnahmen die Linienintensitäten der beiden Elemente so aufeinander abzustimmen, daß die Intensitäten der zu bestimmenden Liniengruppe in den vom Eichelement umspannten Bereich der Schwärzungskurve hineinfallen.

Im einzelnen war sehr darauf zu achten, daß die Meßlinien frei von überlagerten Störlinien waren. Nicht immer war es aber möglich, solche Überlagerungen ganz zu vermeiden, wie z. B. in Fig. 1 neben den Kr-Linien und Hf-Linien noch die Gruppen der KrH-Linien und der Zr-Linien als zum Teil überlagernde Störlinien vorhanden sind. Wie man die Größe dieser Überlagerungen aber vielfach ermitteln und berücksichtigen kann, wird weiter unten an den KrH-Linien gezeigt werden.

Weiter war der aus der Theorie folgenden Eigenschaft des Mattauch-Herzogschen Massenspektrographen[2]) Rechnung zu tragen, daß die Linienbreite nicht konstant, sondern proportional $\sqrt{A}$ ist (A Massenzahl). Daß ein Gang in dieser Größe wirklich vorhanden war, wurde dadurch erwiesen, daß an einigen Photometerdiagrammen die Halbwertsbreiten dy von Linien des einfach und des doppelt geladenen Hafniums ausgemessen wurden; acht derartige Messungen ergaben im Mittel für das Verhältnis $dy(Hf^{+}) : dy(Hf^{++}) = 1{,}26$ an Stelle des theoretischen Wertes $\sqrt{2}$, was als genügende Bestätigung zu werten ist, da wegen der Schärfe der Linien dy nur sehr ungenau zu messen ist. Ein Größerwerden der Linienbreite bedeutet aber bei gleich angenommener gesamter Ionenstromintensität ein entsprechendes Kleinerwerden der Linienhöhe, oder m. a. W. eine mit $1/\sqrt{A}$ oder $\sqrt{A_0/A}$ von Linie zu Linie abnehmende Ionenstromdichte, wobei A_0 die Masse einer beliebig gewählten Bezugslinie ist. Als solche kann man eine

[1]) Über eine kleine, die Veränderung der Linienbreite berücksichtigende Korrektur s. weiter unten. — [2]) J. Mattauch u. R. Herzog, ZS. f. Phys. 89, 786, 1934.

Linie des betreffenden Elementes selbst wählen, dann ist der Faktor $\sqrt{A_0/A}$ immer nahe 1. Da nun nur die aufgefallenen Ionenstromdichten für die gemessenen Linienhöhen maßgeblich sein dürften, war daraus zu folgern, daß die Tabellenwerte der relativen Häufigkeiten des Eichelementes nicht direkt angesetzt werden dürfen, sondern erst nach Korrektur mit den Faktoren $\sqrt{A_0/A}$. Dann erst erhält man die „wahre Schwärzungskurve". Andererseits werden dieser wahren Schwärzungskurve wiederum nicht direkt die wahren relativen Häufigkeiten des zu bestimmenden Elementes entnommen, sondern aus dem gleichen Grunde erhält man jeweils von 2 Linien die leichtere l gegenüber der schwereren s im Verhältnis $\sqrt{A_s} : \sqrt{A_l}$ zu stark, so daß das gemessene scheinbare Linienverhältnis schließlich mit dem wiederum nahe 1 liegenden Faktor $\sqrt{A_l/A_s}$ korrigiert werden muß.

Das so beschriebene Verfahren zur Bestimmung von relativen Häufigkeiten mittels der Photoplatte ist nicht nur frei von der Annahme irgendeines speziellen Schwärzungsgesetzes, sondern auch von der Voraussetzung der Konstanz der Ionenquelle. Denn zur Ermittlung eines Einzelwertes für ein oder mehrere Isotopenverhältnisse ist jeweils nur eine Aufnahme notwendig, wobei es gleichgültig ist, ob Eichelement und zu untersuchendes Element während der ganzen Expositionszeit oder nur einen (eventuell verschieden langen) Bruchteil derselben wirksam waren. Das ermöglichte bei solchen Messungen die Verwendung der Dempsterschen Funkenröhre, deren Beschreibung bereits an anderer Stelle erfolgt ist [1]).

Die wesentliche Voraussetzung, die wir machen, ist aber die, daß die Schwärzungskurve für die Ionenstrahlen verschiedener Elemente, wenigstens in einem größeren Bereich, die gleiche ist. Wegen der verschiedenen Eindringtiefe verschieden schwerer Ionen trifft diese Voraussetzung für die früher verwendeten Paget Half Tone-Platten durchaus nicht zu, wie aus den von Aston [2]) gemessenen Schwärzungskurven hervorgeht; abgesehen von der viel stärkeren Schwärzung durch Wasserstoffkanalstrahlen, zeigte sich auch noch von Krypton bis Quecksilber ein sehr deutlicher Gang in der Schwärzung. Im Gegensatz dazu konnte Lichtblau [3]) bei den modernen Q-Platten der Ilford Ltd. bei der

[1]) J. Mattauch, H. Ewald, O. Hahn u. F. Strassmann, ZS. f. Phys. 120, 598, 1943. — [2]) F. W. Aston, Mass-Spectra and Isotopes, S. 91, London 1942. — [3]) H. Lichtblau, Physik. ZS. 41, 82, 1940.

gleichen Platte keine merkliche Verschiedenheit der Schwärzungskurven für Molybdän und für Quecksilber feststellen; doch ergaben sich bei seinen Messungen bei der gleichen Ionenart bei verschiedenen Platten trotz gleicher Emulsionsnummer starke Schwankungen bezüglich Steilheit und Sättigungsdichte. Wieweit unsere Voraussetzung bei den von uns verwendeten Platten Schumann Hart der Agfa erfüllt ist, können nur die Versuche ergeben.

Der schon erwähnte Umstand, daß das Eichelement nicht nur auf jeder Platte, sondern auf jeder einzelnen Aufnahme in einem Zuge mit aufgenommen wird, kann wichtig sein, wenn die diversen Streifen der Platte für die einzelnen Aufnahmen verschiedene Vorbehandlung erfahren haben. Es ist z. B. bekannt, daß verschiedener Schleieruntergrund, hervorgerufen durch Licht oder durch Streustrahlung an den restlichen Gasmolekülen, eine Änderung der Empfindlichkeit zur Folge haben kann. Obwohl die Eichkurven, die bei verschiedenen Platten recht verschieden ausfielen, auf den Aufnahmen der gleichen Platte recht ähnlich waren, wurde doch für jede Aufnahme nur mit der zugehörigen Eichkurve gearbeitet.

Um nun die Verwendbarkeit unserer Methode und die ihr etwa anhaftenden Mängel und Fehler zu untersuchen, wurden Hf-Spektren der Reihe nach mit fünf verschiedenen Eichelementen, nämlich: Os, Kr, Xe, Zn und Hg zusammen aufgenommen.

IV. Beschreibung der Messungen.

1. Die fünf häufigen Hafniumisotope. Zur Erzielung geeigneter Spektren wurde in folgender Weise vorgegangen: Für die Elektroden des Hochfrequenzfunkens wurde ein Trägermetall ausgewählt — hier Eisen oder Nickel —, bei dem man sicher sein konnte, daß all seine möglichen Isotopenlinien im Massenspektrum weder das Spektrum des Hf noch das des Vergleichselementes störend überlagern konnten. Das zu untersuchende Präparat wurde in eine kleine Bohrung (etwa 1 mm Durchmesser und 2 mm Tiefe) an der Spitze der unteren Elektrode eingefüllt, so daß die obere Elektrode dieser Bohrung gerade gegenüberstand. Nach Einfüllen des Präparates in die Elektrode wurde diese gewöhnlich kurz in einer kleinen Flamme ausgeglüht, um möglichste Wasserfreiheit und Entgasung des Präparates zu gewährleisten und — besonders bei Zusatz eines leicht schmelzenden und nicht störenden Bindemittels wie z. B. Borax — um ein besseres Haften in der Bohrung

zu erreichen. Verwendet wurde $HfOCl_2$ bzw. HfO_2, das dem einen von uns freundlicherweise von Herrn Prof. v. Hevesy zur Verfügung gestellt worden war[1]).

Das zuerst verwandte Vergleichselement Osmium wurde hauptsächlich wegen seiner dem Hf im Massenspektrum benachbarten Lage gewählt. Es wurde hierbei das Hafniumpräparat im Mörser möglichst innig mit einer bestimmten Menge metallischen Osmiums vermengt und diese Mischung als Elektrodenfüllung benutzt. Um die Intensitäten der Hf-Linien innerhalb des von den Os-Linien umspannten Intensitätsbereiches zu erhalten, wurde das geeignete Mischungsverhältnis von HfO_2 zu Os durch Versuche ermittelt. Diese Abstimmung der Intensitäten aufeinander erwies sich aber beim Os als sehr mühevoll und wenig reproduzierbar, so daß nur wenige brauchbare Aufnahmen erhalten werden konnten. Das mag seinen Grund darin haben, daß bei dem zur Trocknung notwendigen Ausglühen des Präparatgemisches in der Elektrode jeweils ein nicht kontrollierbarer Anteil des Os in OsO_4 übergeführt wurde, das wegen seiner leichten Flüchtigkeit schon beim Glühen oder bei der Funkenentladung im Vakuum bevorzugt wegdampfte. Gestützt wird diese Annahme durch die Tatsache, daß die Intensität der Os-Linien jedes Präparates bei aufeinanderfolgenden Aufnahmen sehr schnell abnahm. Fig. 2a gibt eine Reproduktion einer der erhaltenen guten Aufnahmen nebst Photometerkurven. Wie aus dieser ersichtlich ist, treten auch schwach die HfO-Linien auf, die Oxyde der Isotope 174 und 176 dabei als Überlagerungen der Os-Linien 190 und 192. Bei roh bekannten relativen Häufigkeiten der Hf-Isotope kann man aber aus der Intensität der HfO-Linien 193 bis 196 direkt auf die Größe der störenden Überlagerungen schließen und erkennen, daß sie entweder vernachlässigbar waren, oder man konnte sie als kleine Korrektur in Rechnung setzen.

Hier soll noch bemerkt sein, daß auf unseren Photometeraufnahmen die Ausschläge für die Linie ^{186}Os fast immer etwas größer erschienen als die der Linie ^{187}Os, entgegen der von Nier[2]) stammenden elektrometrischen Bestimmung. Dies mag als Hinweis dienen, daß der elektrometrischen Methode zum Teil auch kleine Ungenauigkeiten anhaften können, die dann unter Umständen bei dem hier dargestellten Verfahren durch einen nicht ganz glatten Verlauf der Eichkurve zutage treten können.

[1]) Dafür möchten wir auch hier Herrn Prof. v. Hevesy unseren besten Dank aussprechen. — [2]) A. O. Nier, Phys. Rev. 52, 885, 1937.

Nach den beim Osmium aufgetretenen Schwierigkeiten wurde der Versuch gemacht, die Edelgase Krypton und Xenon als Vergleichselemente zu verwenden. Als Elektrodenfüllung konnte dabei reines

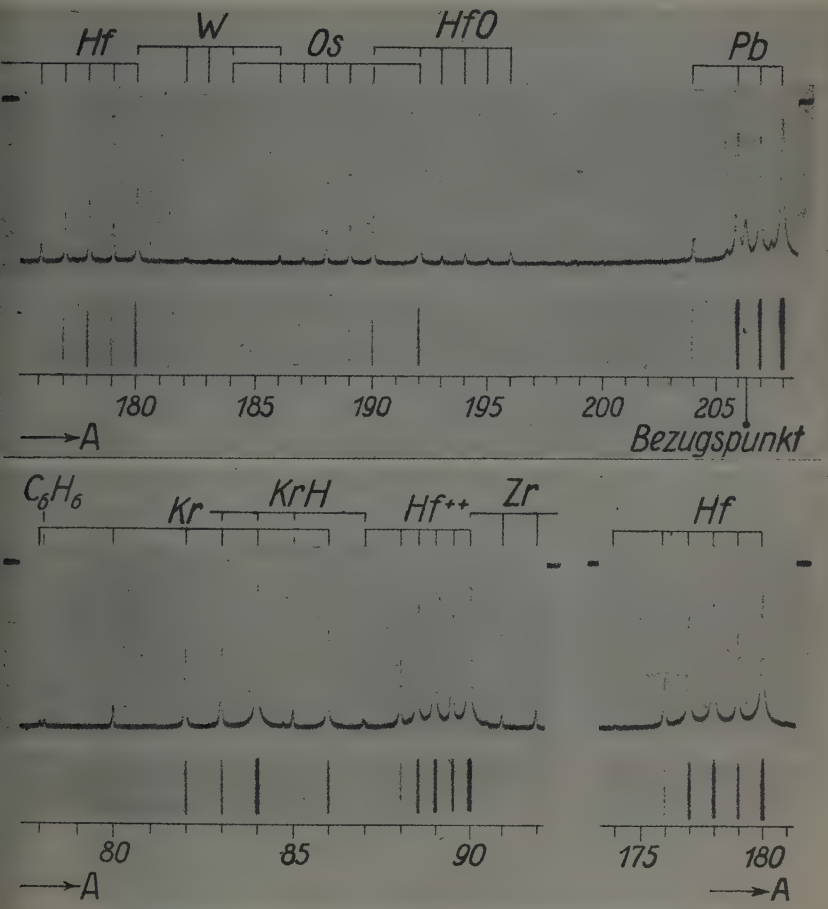


Fig. 2. Massenspektren von a) Osmium und Hafnium (einfach geladen), b) Krypton und Hafnium (einfach und doppelt geladen).

HfO_2 benutzt werden. Das Gas wurde genau wie bei Verwendung einer Gasentladungsröhre in die beschriebene Funkenröhre eingeführt, doch in solch geringen Mengen, daß keine eigentliche Gasentladung zünden konnte. Nur der geringe Anteil der Edelgasatome, der in den Funken hineindiffundierte, konnte von diesem ionisiert werden. Überraschenderweise genügte das aber, um reichlich intensive Linien zu erhalten. Man

hat dabei den großen Vorteil, daß man die Intensität der Vergleichslinien durch Regelung der Gaszufuhr leicht auf die Intensität der Hf-Linien abstimmen kann. Auf diese Weise wurde eine Anzahl sehr brauchbarer Aufnahmen erhalten; Beispiele geben die Fig. 2b und 3a. Beide Edelgase gaben auch recht schöne Eichkurven. Beim Kr war es vielleicht etwas nachteilig, daß zwischen den Häufigkeiten der stärksten Linien 86 und 84 eine etwas zu große Lücke bestand, was eine gewisse kleine Unsicherheit im Gefolge hatte. Beim Xe ergaben sich bei Verwendung der von Nier[1]) angegebenen Häufigkeitszahlen Eichkurven, die nicht ganz ideal glatt erschienen und die darauf hindeuten, daß die Häufigkeit der Linie 128 etwas größer sein mag als von Nier angegeben. Beide Unsicherheiten waren aber so gering, daß sie auf unsere Ergebnisse keinen merklichen Einfluß ausübten.

Bemerkt muß hier noch werden, daß bei den Edelgasen auf eine eventuelle Hydridbildung zu achten ist. Bei Krypton z. B. lauten die Nierschen Angaben $^{78}Kr : {}^{80}Kr : {}^{82}Kr : {}^{83}Kr : {}^{84}Kr : {}^{86}Kr = 0{,}608 : 3{,}52 : 20{,}2 : 20{,}2 : 100 : 30{,}6$. Die Linie 85 in Fig. 1 und 2b ist demnach als $^{84}KrH^+$ zu deuten, desgleichen die Linie 87 als $^{86}KrH^+$. Das bedeutet, daß bei dieser Aufnahme zu jeder Kr-Linie eine Masseneinheit höher eine Hydridlinie gehörte, die in einem bestimmten, bei allen Linien gleichen Verhältnis schwächer war als die Hauptlinie. Unbedenklich konnten daher nur die Linien 78, 80, 82 und 86 für die Eichkurve verwendet werden, da sie nicht durch Hydridlinien verstärkt sein konnten. Die Linien 83 und 84 waren aber durch die Hydride $^{82}KrH^+$ bzw. $^{83}KrH^+$ überlagert. Es gelingt jedoch leicht, den prozentuellen Betrag der Hydridbildung aus der Eichkurve abzulesen und dafür zu korrigieren. Wie in Fig. 1 angedeutet ist, entnimmt man bereits aus dem ersten kleinen Stückchen der Eichkurve, das aus den beiden unverfälschten Linien ^{78}Kr und ^{80}Kr gebildet ist, die relative Häufigkeit von ^{84}KrH zu 2,7 (punktierte Koordinaten, ausgefüllter Kreis); diese Zahl gibt zugleich den prozentuellen Betrag der Hydridbildung an, da ^{84}Kr zu 100 angesetzt war. Damit sind die Linien ^{83}Kr und ^{84}Kr zu korrigieren, deren Spitzenhöhen demnach bei den Abszissenwerten $20{,}2 + 20{,}2 \times \times 0{,}027 = 20{,}7$ und $100 + 20{,}2 \cdot 0{,}027 = 100{,}5$ einzutragen sind (abgesehen von den bereits erwähnten kleinen Korrektionen für die Änderung der Linienbreite).

[1]) A. O. Nier, Phys. Rev. **52**, 933, 1937.

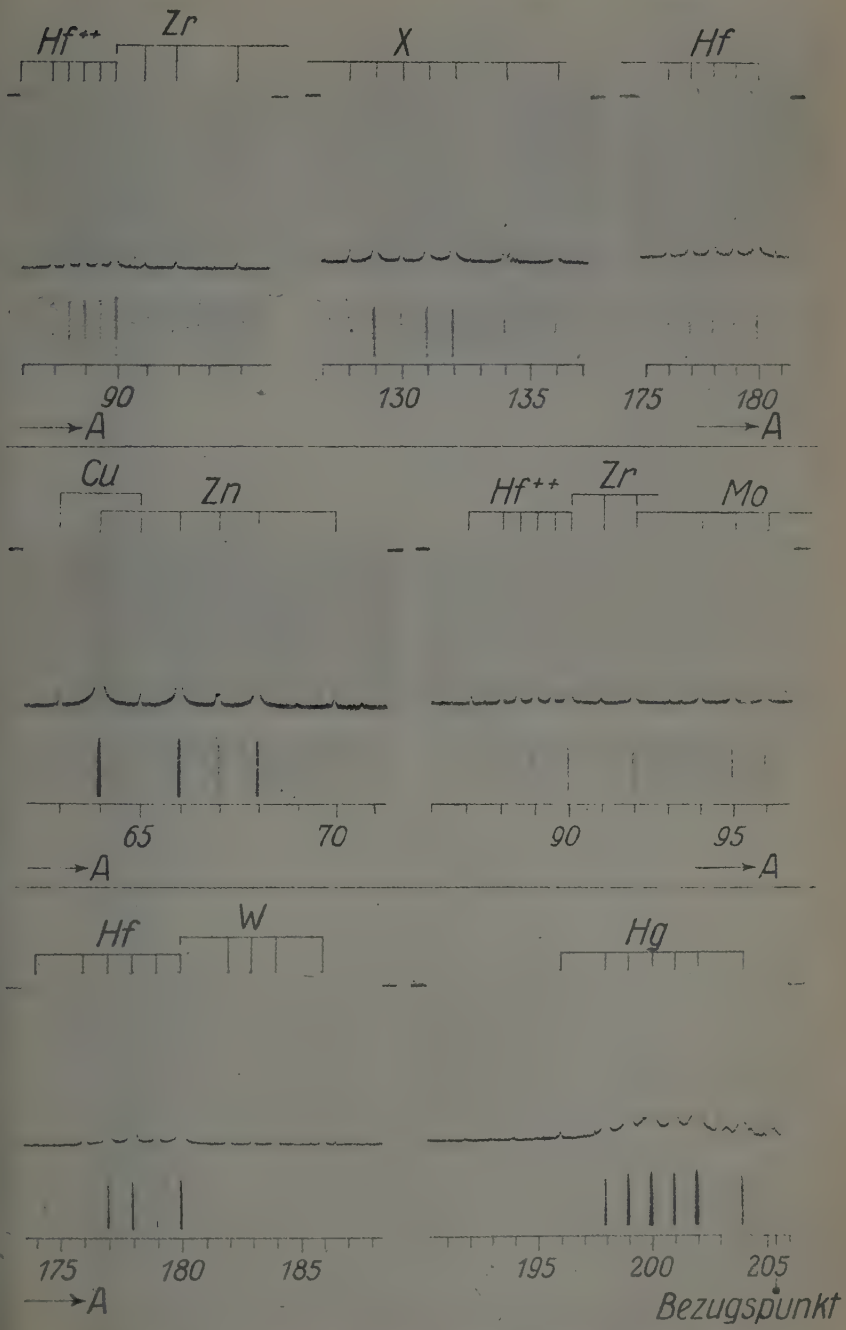


Fig. 3. Massenspektren von a) Xenon und Hafnium (einfach und doppelt geladen), b) Zink und Hafnium (doppelt geladen), c) Quecksilber und Hafnium (einfach geladen).

Zur weiteren Prüfung der bisherigen Ergebnisse wurden noch Zink und Quecksilber als Vergleichselemente[1]) herangezogen. Dabei wurde mit besserem Erfolge auf die beim Os schon versuchte Methode der Mischpräparate zurückgegriffen. Als Zusätze zum HfO_2 wurden $ZnCl_2$ bzw. Spuren metallischen Hg verwendet, und die Abstimmung der Intensitäten gelang hier mit nicht allzu großer Mühe. Die Fig. 3b und c geben je ein Beispiel.

2. Das seltene Hafniumisotop. Bei allen diesen Aufnahmen war es aber nicht gelungen, die Hf-Linien so intensiv zu erhalten, daß auch die Häufigkeit des seltenen Isotops 174 mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden konnte. Die Intensitäten der Hf-Linien waren im ganzen immer recht schwach und vor allem von Aufnahme zu Aufnahme in unkontrollierbarer Weise wechselnd. Das erscheint verständlich, wenn man die Erzeugungsart der Ionen bedenkt. Das Präparat in der Bohrung selbst war ein schlechter Leiter, daher sprang der Funke wohl nicht zum Präparat selber, sondern zum Metallrand der Elektrodenbohrung, d. h. an die Begrenzung zwischen Präparat und Elektrode. Die Folge war, daß der Funke auf dieser Kreisbegrenzung umhertanzte und das Präparat sehr verschieden stark und eigentlich immer nur so nebenbei an seinem Rande vom Funken getroffen werden konnte. Das macht es einleuchtend, daß die Erzielung guter Aufnahmen nach dieser Methode immer mehr oder weniger vom Zufall abhängen muß.

Einen radikalen Weg gab es nun, um zu einer definierteren Ionenerzeugung zu gelangen. Es mußten metallische Hf-Elektroden verwendet werden, abgesehen vom notwendigen und geeignet ausgewählten Vergleichselement, unter Vermeidung jeglicher Fremdatome im Funken. Das erschien um so erfolgversprechender, als wir bei anderen Versuchen bei Verwendung metallischer Elektroden bei den verschiedensten Elementen mit Leichtigkeit sehr intensive Linien erhalten hatten. Die Beschaffung von kompaktem metallischem Hf war uns aber zur Zeit nicht möglich, die Selbstdarstellung nach der Jodidmethode[2]) erschien uns zu umständlich. Daher wurde versucht, mit dem „Rohhafnium", das uns freundlicherweise von Fräulein Scheld hier im Institut durch Vakuumreduktion des HfO_2 mit Na hergestellt wurde[3]), auszukommen, trotzdem es bei der Reduktion nur in Pulverform erhalten wurde.

[1]) Elektrometrische Messung von A. O. Nier. Phys. Rev. **50**, 1041, 1936 (Zn); **52**, 885, 1937 (Hg). — [2]) Siehe A. E. van Arkel, Reine Metalle, S. 207ff. Berlin, Springer, 1939. — [3]) W. Klemm u. H. Bommer, ZS. f. anorg. allg. Chem. **231**, 138, 1937.

In einfacher Weise gelang es aber, dieses Hf-Pulver in genügend kompakte Form überzuführen: Es wurde in einer der üblichen Pastillenpressen zu kleinen Pillen gepreßt (4 mm Durchmesser, etwa 1 mm dick) und diese dann mittels geeigneter kleiner Halter als Elektroden eingesetzt. Der Fortschritt, der damit erzielt war, wird eindrucksvoll durch Fig. 4 illustriert: Die Fig. 4a zeigt als Vergleich eine der besten Aufnahmen, die nur selten und mit großer Mühe mit HfO_2 in der Bohrung erzielt werden konnten. Hier ist von der Linie 174 kaum eine Andeutung zu sehen. Die untere Fig. 4b zeigt dagegen die Intensität der Hf-Linien, wie sie nun bei Verwendung der gepreßten Hf-Elektroden bei gleicher Belichtungszeit mit Leichtigkeit und gut reproduzierbar erhalten wurden. Damit war das weitere Arbeiten sehr erleichtert, und in Zukunft dürfte auch bei anderen Arbeiten stets nach Möglichkeit die Verwendung metallischer Elektroden aus dem zu untersuchenden Element anzustreben sein. Die beobachtete Verstärkung betrug etwa den Faktor 10 oder mehr, und das legte die Vermutung nahe, daß sie nicht nur durch das nunmehr alleinige Vorhandensein von Hf-Atomen im Funken — abgesehen von den Atomen des Vergleichselementes — zu erklären war, sondern daß noch andere Gründe, wie z. B. besseres Vakuum in der Gegend des Funkens oder vielleicht auch das Fehlen von Fremdatomen mit geringerer Ionisationsenergie, die im Funken bevorzugt ionisiert werden, maßgebend waren.

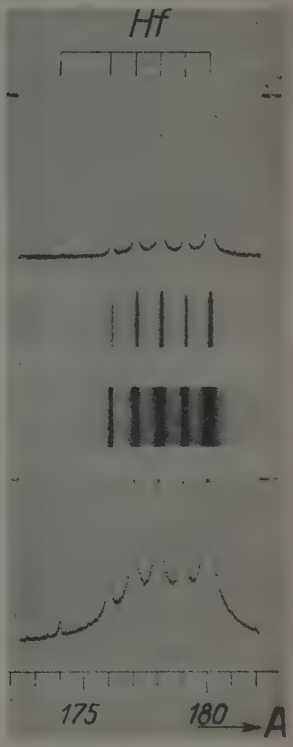


Fig. 4. Massenspektren von Hafnium, erzeugt mit a) Hafniumoxyd in der Bohrung einer Nickelelektrode, b) einer Pille aus metallischem Hafniumpulver als Elektrode.

Bei der nun möglichen Bestimmung des Linienverhältnisses $^{176}Hf : ^{174}Hf$ wurde Xe als Vergleichselement verwendet. Natürlich konnte das Verhältnis wegen seines extremen Wertes nicht mit der gleichen Genauigkeit erhalten werden wie in den anderen Fällen. Bei der Auswertung der Photometerkurven (siehe Fig. 4b) erschien es fraglich, ob die gesamte Linienhöhe angesetzt werden sollte oder ob

der örtlich verschiedene Schleieruntergrund als Streuintensität der sehr starken Nachbarlinien in Abzug zu bringen sei. Wir hatten die Wahl zwischen den beiden extremen Möglichkeiten, die in Fig. 5 angedeutet sind: Einmal in üblicher Weise die Höhen der Linien 174 und 176 vom gerade durchgezogenen Untergrund a zu messen und daraus direkt die relativen Häufigkeiten $H(^{174}\mathrm{Hf})$ und $H(^{176}\mathrm{Hf})$ zu ermitteln. Im anderen Fall war ein gekrümmter Untergrund b anzunehmen. Die Abstände S_{174} und S_{176} der Kurven a und b an den Stellen der Linien 174 und 176 lieferten uns dann mit Hilfe der Eichkurve die „relativen Häufigkeiten" $H(S_{174})$ und $H(S_{176})$ der beiden Streuintensitäten, die von den nach dem ersten Verfahren erhaltenen unkorrigierten Häufigkeiten in Abzug zu bringen waren. Die korrigierten Werte waren demnach

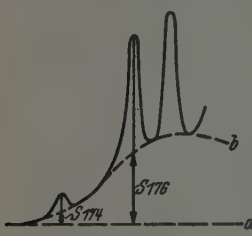


Fig. 5. Berücksichtigung des Untergrundes beim Linienverhältnis $^{176}\mathrm{Hf}:{}^{174}\mathrm{Hf}$.

$$H'(^{174}\mathrm{Hf}) = H(^{174}\mathrm{Hf}) - H(S_{174}),$$
$$H'(^{176}\mathrm{Hf}) = H(^{176}\mathrm{Hf}) - H(S_{176})$$

und daraus errechnete sich dann das Linienverhältnis. Versuchsweise wurde nach beiden Möglichkeiten ausgewertet. Es ergab sich aber praktisch kein Unterschied bei beiden Ergebnissen. Die Frage war also ohne Belang, wohl deshalb, weil für die beiden Linien zufällig der Schleieruntergrund proportional der relativen Häufigkeit war.

V. Diskussion der Ergebnisse.

1. Die Fehler. Wie erwähnt, setzen wir voraus, die Schwärzungskurve für Ionenstrahlen sei wenigstens in einem größeren Bereich unabhängig von der Art des verwendeten Elementes. Wenn diese Voraussetzung nicht zutreffen würde, dann könnte dadurch bei der Verwendung eines einzigen Eichelementes ein konstanter Fehler unbekannten Betrages in der Messung eines Linienverhältnisses verursacht werden. Beim Fortschreiten von einem Eichelement zum nächsten würde sich dieser Fehler aber in regelmäßiger Weise etwa mit der Eindringtiefe der Ionen oder ihrer Masse ändern. Nun bildet die Gesamtheit unserer Messungen der Hf-Isotopenhäufigkeiten mit Hilfe der verschiedensten Eichelemente ein Musterbeispiel für die Anwendung einer in der Ausgleichsrechnung längst bekannten Methode[1]) zur Prüfung

[1]) Siehe darüber und wegen älterer Literatur Handb. d. Phys., Berlin, Springer, 1928, Bd. III, Kap. 13, von K. Mader, insbesondere S. 511ff.

über das Vorhandensein solcher systematischer (regelmäßiger) Fehler, sowie von sogenannten groben Fehlern, die durch starkes Herausfallen einzelner Werte gekennzeichnet sind. In neuerer Zeit wurde diese Methode vielfach, besonders von amerikanischen Forschern[1]), mit Erfolg zur Untersuchung der Verträglichkeit von Präzisionsmessungen, z. B. der atomaren Konstanten, verwendet, die nach den verschiedensten Methoden in einer Reihe von Laboratorien gewonnen worden waren, so daß anzunehmen war, sie seien nicht alle durch den gleichen konstanten Fehler gefälscht. Da diese Methode offenbar des öfteren mißverstanden wurde[2]), soll im folgenden in einiger Ausführlichkeit ihre Anwendung auf unsere Beobachtungen gezeigt werden, nachdem wir uns zunächst ein Bild über die Genauigkeit der Messungen und die zufälligen Fehler verschafft haben.

a) Der Fehler der Einzelmessung; zufällige (unregelmäßige) Fehler. In Tabelle 1 sind die Resultate für die fünf Linienverhältnisse der sechs Hf-Isotope zusammengefaßt. Die einzelnen Zeilen enthalten die Mittelwerte $\bar{x}_j$ aus n_j Einzelmessungen x_i, getrennt für die verschiedenen Eichelemente, die ihrerseits nach steigenden Atomgewichten angeordnet sind. Da bei Kr und Xe genügend Material vorhanden war, wurden hier die Messungen an den einfach und an den doppelt geladenen Hf-Ionen gesondert zusammengefaßt. Beim Os waren nur die einfach geladenen Hf-Ionen vermessen worden; die Zeile für Hg enthält etwa gleich viel Messungen an Hf^+- wie an Hf^{++}-Ionen, während mit Zn als Eichelement nur ein bis drei Einzelmessungen an Hf^+, alle übrigen an Hf^{++} gemacht worden waren.

Aus den Abweichungen der einzelnen Messungen vom Mittelwert oder den scheinbaren (plausiblen) Fehlern $v_i = x_i - \bar{x}_j$ berechnet sich in üblicher Weise der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung einer Gruppe von n_j direkten, gleich genauen Beobachtungen nach

$$\varrho_j = 0{,}6745 \left(\frac{\sum_i^{n_j} v_i^2}{n_j - 1} \right)^{1/2} \cdot \left[1 \pm \frac{0{,}6745}{\sqrt{2\,(n_j - 1)}} \right]. \qquad (1)$$

ϱ_j ist bekanntlich eine bestimmte, die Genauigkeit des Meßverfahrens charakterisierende Größe, die besagt, daß das Ergebnis einer einzelnen

[1]) Vor allem R. T. Birge, Phys. Rev. 40, 207, 1932; Report on Progress in Physics 8, 90, 1941. — [2]) Siehe z. B. U. Stille, ZS. f. Phys. 120, 703, 1943.

Vergleich zwischen	$^{176}Hf : {}^{174}Hf$			$^{179}Hf : {}^{176}Hf$			$^{177}Hf : {}^{179}Hf$		
	n_j	$x_j \pm r_j$	ϱ_j	n_j	$\bar{x}_j \pm r_j$	$\varrho_j \cdot 10$	n_j	$\bar{x}_j \pm r_j$	$\varrho_j \cdot$
Zn—Hf^{+}, Hf^{++}				7	2,584 ± 0,064	1,7	13	1,360 ± 0,015	5,
Kr—Hf^{+}				9	2,755 ± 0,076	2,3	9	1,352 ± 0,018	5,
Kr—Hf^{++}				15	2,648 ± 0,045	1,8	15	1,343 ± 0,006	2,
Xe—Hf^{+}	11	29,1 ± 1,3	4,3	8	2,892 ± 0,087	2,5	8	1,308 ± 0,010	2,
Xe—Hf^{++}	12	30,2 ± 1,2	4,1	8	2,662 ± 0,086	2,4	8	1,327 ± 0,012	3,
Os—Hf^{+}				5	2,481 ± 0,062	1,4	6	1,305 ± 0,022	5,
Hg—Hf^{+}, Hf^{++}				5	2,403 ± 0,070	1,6	5	1,310 ± 0,021	4,

Messung nach diesem Verfahren mit der Wahrscheinlichkeit $^1/_2$ in das Intervall $\pm \varrho_j$ um die gesuchte Größe fallen wird, wenn nur rein zufällige Fehler vorhanden sind. Man erhält ϱ_j natürlich um so genauer, je größer n_j ist, wie man aus dem in der eckigen Klammer von Gl. (1) in Prozenten angegebenen wahrscheinlichen Fehler von ϱ_j erkennt[1]).

[1]) Zum besseren Verständnis des folgenden und, da manchmal gegen die Anwendung des wahrscheinlichen Fehlers Bedenken erhoben werden (siehe z. B. H. Kaiser, ZS. f. techn. Phys. 17, 219, 1936), sei hier folgendes ausgeführt: Bezeichnet ξ den „wahren" Wert der gesuchten Größe, d. h. den Mittelwert des Kollektivs aller (unendlich vielen) Messungen, die mit einem bestimmten Meßverfahren gemacht werden könnten, sind ferner $\varepsilon_i = x_i - \xi$ die „wahren" Fehler und $\varphi(\varepsilon)$ ihre Verteilungsfunktion (Wahrscheinlichkeitsdichte), dann ist die Streuung oder Standardabweichung σ des Kollektivs definiert durch $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ und der wahrscheinliche Fehler ϱ einer Beobachtung des Kollektivs durch $\int_{-\varrho}^{+\varrho} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{1}{2}$. Liegt eine Gruppe von n_j Beobachtungen vor, von denen nur die scheinbaren Fehler v_i bekannt sind, dann kann man aus dem Streuungsquadrat der Gruppe $s_j^2 = \frac{1}{n_j} \sum_1^{n_j} v_i^2$ unter bestimmten Voraussetzungen einen Erwartungswert von σ berechnen; man nennt ihn den mittleren Fehler einer Beobachtung der Gruppe und bezeichnet ihn mit μ_j. Die Voraussetzungen sind 1. $\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$, d. h. es seien nur zufällige Fehler vorhanden, und 2. das beobachtete s_j^2 der vorliegenden Gruppe von Beobachtungen sei gleich dem Mittelwert $\overline{s^2}$ der Streuungsquadrate einer sehr großen Anzahl m von Beobachtungsgruppen, die man sich aus dem Kollektiv herausgegriffen denkt. Dann läßt sich zeigen, daß $\sigma^2 = \frac{n_j}{n_j - 1}\, \overline{s^2}$ oder $\mu_j^2 = \frac{n_j}{n_j - 1}\, s_j^2$ ist. Unter Weglassung des Zahlenfaktors 0,6745, ist also durch Gl. (1) μ_j (und ferner die Streuung oder der mittlere Fehler von μ_j) gegeben.

Es ist nun zwar richtig, daß die direkte Ermittlung von ϱ_j aus den v_i (durch Abzählen) keinen genauen Wert gibt. Man kann aber natürlich vereinbaren, das 0,6745fache des mittleren Fehlers μ_j als wahrscheinlichen Fehler ϱ_j zu

lle 1.

$^{178}Hf : {}^{177}Hf$		$^{180}Hf : {}^{178}Hf$			$\left(\varrho_q^* \pm \frac{0{,}67 \cdot \varrho_q^*}{\sqrt{2(\Sigma n_j - m_q)}}\right) \cdot 10^2$	D cm
$\bar{x}_j \pm r_j$	$\varrho_j \cdot 10^2$	n_j	$\bar{x}_j \pm r_j$	$\varrho_j \cdot 10^2$		
1,476 ± 0,016	5,9	13	1,294 ± 0,008	2,8	5,4 ± 0,5	3,0
1,470 ± 0,021	6,3	9	1,323 ± 0,019	5,7	5,8 ± 0,6	9,8
1,463 ± 0,005	2,0	15	1,287 ± 0,009	3,5	2,6 ± 0,2	0,8
1,477 ± 0,007	1,9	7	1,323 ± 0,013	3,4	2,8 ± 0,3	4,2
1,376 ± 0,006	1,5)	7	1,310 ± 0,014	3,7	3,5 ± 0,5	4,4
1,456 ± 0,025	3,5	1	1,294]		5,2 ± 1,0	2,4
1,433 ± 0,021	4,3	4	1,267 ± 0,012	2,4	4,0 ± 0,6	7,2

Zunächst bemerkt man beim Vergleich der ϱ_j-Werte einer Zeile (z. B. Xe—Hf^+), daß ϱ_j um so kleiner wird, je mehr sich der Wert des Linienverhältnisses der 1 nähert, und zwar wachsen die ϱ_j-Werte etwa proportional oder etwas stärker mit der Abweichung der x_j von 1 an (siehe Fig. 6); denn es war durchaus zu erwarten, daß sich ein Linien-

bezeichnen. Beide — μ_j und ϱ_j — sind dann als Maß für die Genauigkeit eines Meßverfahrens, der sie umgekehrt proportional sind, gleichberechtigt; beide können daher in gleicher Weise für die Verteilung von Gewichten herangezogen werden. Keinem von beiden aber kommt zunächst eine anschauliche Bedeutung in dem Sinne zu, daß man erwarten kann, einen bestimmten Prozentsatz aller Beobachtungen innerhalb des Fehlerintervalls zu finden. Dazu verhilft uns bei beiden — dem mittleren wie dem wahrscheinlichen Fehler — erst das Gaußsche Fehlergesetz.

Man mag sich nun zu den Beweisen des normalen (oder Gaußschen) Fehlergesetzes stellen, wie man will; auf alle Fälle steht empirisch fest, daß es eine ausgezeichnete Approximation darstellt, wenn nur rein zufällige Fehler vorhanden sind. Es ist daher müßig, für das Kollektiv eine andere, allgemeinere Voraussetzung zu machen. Wir ersetzen daher die obige Voraussetzung 1 durch $\varphi(\varepsilon) = \frac{h_j}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h_j^2 \varepsilon^2}$. Ist sie für die ε_i erfüllt, dann befolgen auch die v_i ein normales Gesetz, und zwar mit $h_j' = h_j \sqrt{\frac{n_j}{n_j - 1}}$ an Stelle von h_j. Von all den unendlich vielen Kollektiven mit verschiedenen Streuwerten σ wird es nun eines mit dem speziellen Streuwert μ_j geben, aus dem die vorliegende Gruppe mit dem beobachteten Wert s_j mit der größten Wahrscheinlichkeit herausgegriffen worden ist. An Stelle von Voraussetzung 2 können wir jetzt auch die Annahme machen, unsere Gruppe sei tatsächlich aus diesem wahrscheinlichsten Kollektiv gezogen worden. Das führt wieder auf die gleiche Formel von μ_j wie oben.

Der Zusammenhang zwischen dem Genauigkeitsmaß h_j des verwendeten Meßverfahrens mit μ_j und ϱ_j ist $\mu_j \cdot h_j = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\varrho_j \cdot h_j = \varrho_0$, einer bestimmten transzendenten Zahl; daher ist $\varrho_j = \sqrt{2}\, \varrho_0 \cdot \mu_j$. Aus einer der bekannten Tabellen des Wahrscheinlichkeitsintegrals $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ entnimmt man aus der

verhältnis um so genauer messen lassen wird, ein je kleinerer Teil der Schwärzungskurve dazu beansprucht wird. Bei den drei Verhältnissen $^{177}Hf/^{179}Hf$, $^{178}Hf/^{177}Hf$ und $^{180}Hf/^{178}Hf$, die alle ziemlich gleiche Werte (zwischen 1,3 und 1,5) besitzen und die daher praktisch mit der gleichen Genauigkeit gemessen werden sollten, zeigen sich aber recht merkliche Schwankungen der ϱ_j-Werte in den verschiedenen Zeilen; sie sind sicher nicht ganz auf die Ungenauigkeit ihrer Bestimmung zurückzuführen, sondern entsprechen wenigstens zum Teil wirklichen Änderungen in der Meßgenauigkeit, bedingt durch den Wechsel des Eichelementes oder der Entfernung der beiden zu vergleichenden Liniengruppen auf der Platte.

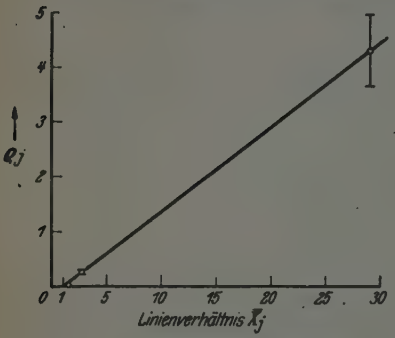


Fig. 6. Der Fehler der Einzelmessung ϱ_j in Abhängigkeit von der Größe des Linienverhältnisses $\bar{x}_j$.

Um einen besseren Einblick zu gewinnen, verschaffen wir uns zunächst genauere ϱ-Werte. Manchmal hat man nämlich, wie hier, nach dem gleichen Meßverfahren (z. B. durch den Vergleich $Xe-Hf^+$) m-Gruppen von Messungen (hier $m = 3$) gleichartiger Größen (hier der drei Linienverhältnisse $^{177}Hf/^{179}Hf$, $^{178}Hf/^{177}Hf$ und $^{180}Hf/^{178}Hf$), die selbst untereinander verschieden sein können, durchgeführt, so daß man (wie in unserem Falle) annehmen kann, sie seien

Bedingung $\Phi(\varrho_0) = \frac{1}{2}$ den numerischen Wert von $\varrho_0 = 0{,}4769$ und daher $\varrho_j = 0{,}6745\,\mu_j$. Das Fehlerintervall $\pm\,\mu_j$ bzw. $\pm\,\varrho_j$ hat nun den bekannten anschaulichen Sinn, daß man erwartet, 68,26% bzw. 50% der tatsächlich gemachten Beobachtungen in diesem Intervall zu finden. Allgemein ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fehler einer Beobachtung den k-fachen Wert des mittleren bzw. des wahrscheinlichen Fehlers nicht überschreitet, durch $\Phi\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$ bzw. $\Phi(k\,\varrho_0)$ gegeben. Wegen der leichteren Übersichtlichkeit und Diskutierbarkeit der Ergebnisse ist daher die Angabe des wahrscheinlichen Fehlers unbedingt vorzuziehen.

Nun ist die Verteilungsfunktion der s-Werte von m verschiedenen Gruppen theoretisch nicht normal, sondern schief, was schon daraus hervorgeht, daß die s definitionsgemäß positiv sind. Deshalb besitzt der mittlere, wie auch der wahrscheinliche Fehler streng genommen nur eine Streuung, deren 0,6745fachen Wert wir wieder als wahrscheinlichen Fehler des Fehlers bezeichnen dürfen. Mit zunehmendem m nähern sich diese Verteilungskurven aber stark der normalen; das ist z. B. für $m = 6$ praktisch gut genug erfüllt, damit man die darunter befindliche Fläche in Viertel teilen kann (siehe z. B. W. E. Deming u. R. T. Birge, Rev. Mod. Phys. 6, 119, 1934, Fig. 4). Dann hat aber der wahrscheinliche Fehler des Fehlers ebenfalls wieder den oben angegebenen anschaulichen Sinn.

mit praktisch der gleichen Genauigkeit gemessen worden; dann ist es logisch, alle $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ Einzelmessungen (in dem Beispiel Xe—Hf^+ ist $n_1 = 8$, $n_2 = n_3 = 7$) zu benutzen, um einen genaueren Wert ϱ^* für den wahrscheinlichen Fehler der Einzelmessung zu erhalten. Das geschieht nach der Formel

$$\varrho^* = \left(\frac{\sum_1^m (n_j - 1)\, \varrho_j^2}{\sum_1^m n_j - m} \right)^{1/2} \cdot \left[1 \pm \frac{0{,}6745}{\sqrt{2\left(\sum_1^m n_j - m \right)}} \right], \qquad (2)$$

die eine Verallgemeinerung von (1) darstellt[1]). Die nach (2) aus den genannten drei Linienverhältnissen gewonnenen Werte (für die beiden ersten Verhältnisse der Tabelle 1 gilt die Voraussetzung gleicher Meßgenauigkeit nicht mehr), sind in der vorletzten Spalte von Tabelle 1 angegeben. Der Index q (quer) soll andeuten, daß (im Gegensatz zu später) die Summationen von Gl. (2) quer über jede Zeile durchzuführen waren. In den beiden Zeilen Xe—Hf^{++} und Os—Hf^+ ist $m = 2$, da bei der ersten der herausfallende Wert von $^{178}Hf/^{177}Hf$ weggelassen wurde und bei der zweiten der Einzelwert bei dem Verhältnis $^{180}Hf/^{178}Hf$ wegen des fehlenden ϱ_j für die Berechnung von ϱ_q^* nicht mitverwendet werden konnte; in der ersten Zeile von Tabelle 1 wurden zur Berechnung von ϱ_q^* nur die dreimal neun Einzelwerte für Zn—Hf^{++} verwendet. Die ebenfalls angegebenen wahrscheinlichen Fehler von ϱ_q^* zeigen bereits, daß die Annahme, die Messungen der verschiedenen Zeilen hätten die gleiche Genauigkeit und damit das gleiche Gewicht, im höchsten Grade unwahrscheinlich ist.

Die letzte Spalte der Tabelle 1 schließlich enthält die mittlere Distanz D der beiden zu vergleichenden Liniengruppen auf der Platte. Bei Hg wurde dafür der Mittelwert eingetragen, da bei der Berechnung von ϱ_q^* wegen der geringen Zahl von Messungen die Hf^+- und Hf^{++}-Werte nicht getrennt worden waren. Fig. 7 zeigt nun recht deutlich, daß mit größer werdendem D die Streuung der Messungen größer wird, was nicht etwa zu bedeuten hat, daß sich gleichzeitig systematische Fehler eingeschlichen haben. Es ist ja vollkommen verständlich, daß sich die ziemlich regellosen Ungleichmäßigkeiten des Schleieruntergrundes, der photographischen Schicht selbst und der Einwirkung des Entwicklers um so stärker bemerkbar machen müssen, je größer D ist. Besonders

[1]) Siehe W. E. Deming u. R. T. Birge, Rev. Mod. Phys. 6, 119, 1934.

aufschlußreich ist in dieser Hinsicht der starke Unterschied in der Meßgenauigkeit bei den jeweils auf der gleichen Aufnahme durchgeführten Vergleichen zwischen den eng benachbarten Gruppen Kr und Hf^{++} und den weit voneinander entfernten Kr und Hf^{+}, während die Vergleiche mit Xe, das praktisch in der Mitte zwischen Hf^{+} und Hf^{++} liegt, innerhalb der Fehlergrenzen gleiche Meßgenauigkeit in beiden Fällen ergab.

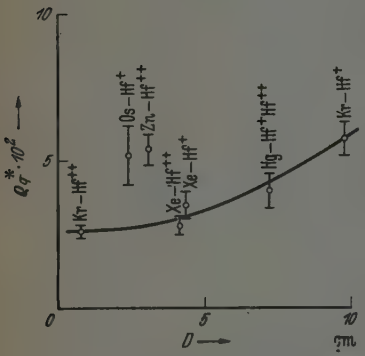


Fig. 7. Der Fehler der Einzelmessung ϱ_σ^* der 3 zwischen 1,3 und 1,5 liegenden Linienverhältnisse in Abhängigkeit von der Distanz D auf der Platte zwischen der Liniengruppe des Eichelements und der von Hafnium.

Aus der Kurve von Fig. 7 fallen die Werte für Os—Hf^{+} und für Zn—Hf^{++} heraus. Es ist ja auch zu erwarten, daß außer D noch andere Faktoren die Meßgenauigkeit bestimmen werden, z. B. die mehr oder minder große Sicherheit, mit der sich aus den Eichkurven die Linienverhältnisse entnehmen lassen. Wie erwähnt, hatten wir beim Os Schwierigkeiten, beide Liniengruppen in das gleiche Intensitätsintervall zu bekommen, so daß wir öfters zu kleinen Extrapolationen greifen mußten; ferner machten die hier immer geringen Intensitäten die Messungen der Spitzenhöhen an sich ungenau. Beim Zn—Hf-Vergleich hingegen waren die Linien des Eichelementes stets so intensiv, daß die Gruppe der Hf-Linien in das steile Stück zwischen den ersten zwei oder drei Eichpunkten zu liegen kamen (siehe Fig. 8), was die graphische Ablesung beeinträchtigen mußte.

Beim Verhältnis $^{179}Hf/^{176}Hf$ ist der Gang der ϱ_j mit D durch die an sich viel größere Streuung praktisch verdeckt.

b) Die Fehler der Gruppenmittel; systematische Fehler. Der Fehler des Mittelwertes $\bar{x}_j$ einer Gruppe von n_j direkten, gleich genauen Beobachtungen, als die wir die Einzelmessungen jeder Meßreihe von Tabelle 1 auffassen müssen, ist gegeben durch

$$r_j = \frac{\varrho_j}{\sqrt{n_j}}. \tag{3}$$

Hat man, wie in der Regel, nur eine Beobachtungsgruppe vorliegen, dann stellt die Beziehung (3), die gewöhnlich aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz hergeleitet wird, eine Voraussage dar. Sie behauptet, daß der „wahre" Wert der gesuchten Größe mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ in einem Intervall $\pm r_j$ um den Mittelwert $\bar{x}_j$ liegen wird, wenn keine

anderen als rein zufällige Fehler vorhanden sind. Denn Gl. (3) in Verbindung mit (1) gilt nur bei normaler Verteilung der Fehler. Hätte man nun m Meßreihen vorliegen, jede mit der gleichen Anzahl $n_j = n$ von Einzelbeobachtungen und mit der gleichen durch $\varrho_j = \varrho$ charakterisierten Genauigkeit durchgeführt, so könnte man sich sozusagen experimentell von der Voraussetzung normaler Fehlerverteilung überzeugen, worauf besonders Birge[1]) hingewiesen hat. Man könnte dann nämlich r_j als Fehler eines Gruppenmittels $\bar{x}_j$ nach Gl. (1) mit m statt n, aus den Abweichungen $\bar{v}_j = \bar{x}_j - \bar{\bar{x}}_u$ der verschiedenen Gruppenmittel $\bar{x}_j$ vom Gesamtmittel $\bar{\bar{x}}_u = \frac{\sum_1^m{}_j \bar{x}_j}{m}$ berechnen (der Index u soll anzeigen, daß es sich um ein ungewichtetes Mittel handelt). Der Wert müßte mit dem nach Gl. (3) aus den v_i ermittelten Wert übereinstimmen bis auf die durch die eckige Klammer von Gl. (1) gegebenen statistischen Schwankungen.

Haben die m Gruppen zwar verschiedene Anzahlen n_j ($j = 1, 2, \ldots m$) von Einzelbeobachtungen, die aber alle nach dem gleichen Meßverfahren (gleiches ϱ) durchgeführt worden sind, dann kann man die Prüfung so vornehmen, daß man den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung ϱ einmal nach Gl. (1) aus den $\bar{v}_j$, das andere Mal nach Gl. (3) aus den unter Verwendung der v_i erhaltenen Fehlern r_j der Gruppenmittel berechnet. Ihr Verhältnis soll dann bis auf die erwähnten statistischen Schwankungen gleich 1 sein. Zu beachten ist, daß sich jetzt das Gesamtmittel $\bar{\bar{x}}_u = \frac{\sum_1^m{}_j n_j \bar{x}_j}{\sum_1^m{}_j n_j}$ schreibt, da die einzelnen Gruppenmittel verschieden oft zu zählen sind, d. h. verschiedenes Gewicht n_j haben. Das gleiche gilt von den $\bar{v}_j$. Daher wird nach (1) berechnet $\varrho_{(1)} = 0{,}6745 \cdot \left(\frac{\sum_1^m{}_j n_j \bar{v}_j^2}{m-1} \right)^{1/2}$ und durch Ersatz von n_j aus Gl. (3) erhält man $\frac{\varrho_{(1)}}{\varrho_{(3)}} = 0{,}6745 \cdot \left(\frac{\sum_1^m{}_j \bar{v}_j^2 / r_j^2}{m-1} \right)^{1/2}$.

[1]) R. T. Birge, l. c.

Soweit ist die Methode aber praktisch von geringem Interesse. Denn da voraussetzungsgemäß die m Meßreihen nach dem gleichen Verfahren gewonnen wurden, können alle immer noch den gleichen konstanten Fehler besitzen, der sich bei der Bildung der scheinbaren Fehler herausheben würde. Nur vereinzelte grobe Fehler wird man finden können oder solche systematische Fehler, die sich durch eine trotz aller Vorsicht eingetretene langsame Änderung der Versuchsbedingungen — etwa mit der Zeit oder der Temperatur — eingeschlichen haben. Man ändert daher von einer Meßreihe zur anderen die Versuchsbedingungen oder das Meßverfahren so ab, daß die Ursachen, die man im Verdacht hat, konstante Fehler zu erzeugen (in unserem Falle also die Masse oder Eindringtiefe der Ionen oder eventuell die Distanz D der beiden zu vergleichenden Liniengruppen auf der Platte), sich ändern. Dann wird der konstante Fehler sich systematisch von Meßreihe zu Meßreihe ändern. Im allgemeinen werden aber dann die m Beobachtungsgruppen verschiedene Genauigkeit und damit verschiedene Werte ϱ_j ($j = 1, 2, \ldots m$) besitzen. Da wir uns im vorigen Abschnitt überzeugt haben, daß die Schwankungen der ϱ_j bei den sechs bis sieben Meßreihen von Tabelle 1 wenigstens zum Teil reell sind, wäre es widersinnig, aus ihnen ein ungewichtetes oder nach n_j gewichtetes Mittel zu bilden, was nur bei Beobachtungen gleicher Genauigkeit erlaubt wäre. Bekanntlich führt man diesen Fall so auf den früheren zurück, daß man sich die verschiedenen Meßreihen jeweils durch eine solche Anzahl p_j gleich genauer Beobachtungen erzeugt denkt, so daß bei einem für alle Messungen gleichen ϱ die nach (3) errechneten wahrscheinlichen Fehler r_j resultieren. Man erteilt also den Gruppenmitteln verschiedene Gewichte p_j, die den r_j^2 umgekehrt proportional sind:

$$p_j = \frac{\varrho^2}{r_j^2}. \qquad (3\,a)$$

ϱ heißt der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1 *vor* der Ausgleichung und ist an sich willkürlich, da die p_j ja nur Verhältniszahlen darstellen. Man kann dazu z. B. einen der vorliegenden r_j-Werte wählen und damit dieser Beobachtung das Gewicht 1 erteilen. Die übrigen Gewichte ergeben sich dann nach (3a). Das Gesamtmittel aller Beobachtungen wird nun analog wie früher

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_1^m p_j \bar{x}_j}{\sum_1^m p_j}. \qquad (4)$$

Ebenso wie früher berechnet man aus den $\bar{v}_j$, die diesmal die Abweichungen der Gruppenmittel von dem nach (4) berechneten gewichteten Gesamtmittel darstellen, nach Gl. (1) den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1 *nach* der Ausgleichung:

$$\bar{\varrho} = 0{,}6745 \left(\frac{\sum_j^m p_j \cdot \bar{v}_j^2}{\frac{1}{m-1}} \right)^{1/2} \cdot \left[1 \pm \frac{0{,}6745}{\sqrt{2\,(m-1)}} \right]. \tag{5}$$

Indem man wieder p_j mit Hilfe von (3a) eliminiert, kann man nun die Beziehung $\bar{\varrho}/\varrho = 1$ überprüfen, da:

$$\frac{\bar{\varrho}}{\varrho} = 0{,}6745 \left(\frac{\sum_j^m \bar{v}_j^2/r_j^2}{\frac{1}{m-1}} \right)^{1/2} = 1 \pm \frac{0{,}6745}{\sqrt{2\,(m-1)}} \tag{6}$$

sein soll. Ist diese Relation nicht innerhalb vernünftiger Grenzen erfüllt, dann kann das nur heißen: Die nach (3a) erteilten Gewichte sind wenigstens zum Teil falsch, weil die den Gruppenmitteln zuerteilten Fehler r_j unrichtig sind; d. h. es sind entweder grobe oder systematische Fehler vorhanden.

Tabelle 2 enthält nun für die verschiedenen Linienverhältnisse in den ersten Spalten die Summe aller Einzelbeobachtungen $\sum n_j$, sowie die Anzahl m der verschiedenen Gruppenmittel und die endgültigen nach Gl. (4) berechneten Mittelwerte $\bar{\bar{x}}$. Die nächsten Spalten enthalten die Abweichungen der nach Gl. (6) sich ergebenden Werte $\bar{\varrho}/\varrho$ von ihrem theoretischen Wert 1, m. a. W. ihre wahren Fehler u sowie die bei m Gruppen nach Gl. (6) dafür zu erwartenden wahrscheinlichen Fehler r. Beim Verhältnis $^{176}Hf/^{174}Hf$ hätte wegen der geringen Zahl von Gruppen diese Berechnung wenig Sinn gehabt. Die folgende Spalte gibt die [aus einer Tabelle für die Funktion $\Phi(x)$ entnommene] Wahrscheinlichkeit $1 - \Phi(k\,\varrho_0)$ für das Auftreten des $k = u/r$ fachen Wertes des wahrscheinlichen Fehlers an[1]).

Nun haben wir bereits in Tabelle 1 bemerkt, daß beim Verhältnis $^{178}Hf/^{177}Hf$ der Wert der Zeile Xe—Hf^{++} stark herausfällt. Wir sehen hier (eingeklammerte Zeile in Tabelle 2), daß der wahre Fehler von $\bar{\varrho}/\varrho$ mehr als das 13fache des wahrscheinlichen Fehlers beträgt; dafür gibt es aber nicht einmal eine Chance in einer Billion. Wir sind daher wohl berechtigt, diesen Wert als durch einen groben Fehler entstellt zu

[1]) Siehe die Fußnote auf S. 336 ff.

Tabelle 2.

Linienverhältnis	Σn_j	m	Gewichtete Mittel $\bar{x} \pm \bar{r}$	$u = \frac{\bar{\varrho}}{\varrho} - 1$	$t = \frac{0{,}67}{\sqrt{2(m-1)}}$	$1 - \Phi(k\varrho_0)$	Ungewichtete Mittel $\bar{x}_u \pm \bar{r}_u$	$\varrho^* \cdot 10^2$	$\varrho_u \cdot 10^2$	$\frac{\varrho^*}{\varrho_u} - 1$
$^{176}Hf : {}^{174}Hf$	23	2	29,7 ± 0,9	+ 0,47	± 0,20	1/9,6	29,7 ± 0,9			
$^{179}Hf : {}^{176}Hf$	57	7	2,614 ± 0,036	+ 0,11	± 0,20	1/1,4	2,657 ± 0,028	20,15	21,09	− 0,045
$^{177}Hf : {}^{179}Hf$	64	7	1,334 ± 0,005	+ 2,62	± 0,20	1/10[18]	1,335 ± 0,005	4,28	4,31	− 0,007
$(^{178}Hf : {}^{177}Hf$	57	7	1,439 ± 0,012	− 0,29	± 0,21	1/2,8	(1,456 ± 0,006	4,21	4,58	− 0,081)
$^{178}Hf : {}^{177}Hf$	50	6	1,467 ± 0,004	+ 0,13	± 0,21	1/1,5	1,467 ± 0,006	4,46	4,38	+ 0,017
$^{180}Hf : {}^{178}Hf$	55	6	1,296 ± 0,005				1,301 ± 0,005	3,80	3,76	+ 0,010

streichen. Wodurch er verursacht sein könnte, vermögen wir jedoch nicht zu sagen. Wäre nämlich beim Xe—Hf^{++}-Vergleich die Linie $^{177}Hf^{++}$ von einer Fremdlinie überlagert gewesen, dann müßte auch beim Verhältnis $^{177}Hf/^{179}Hf$ der entsprechende Wert aus seiner Kolonne, und zwar im umgekehrten Sinne herausfallen, was nicht der Fall ist. Auch ein Buckel in der Schwärzungskurve kann nicht die Ursache für das Herausfallen dieses einen Gruppenmittels sein; denn bei den sieben Einzelwerten, aus denen es gebildet ist, wurden die verschiedensten Teilstücke der Schwärzungskurve verwendet. Auch müßte bei einem fehlerhaften Verlauf der Eichkurve der entsprechende Wert für Hf^{+} ebenfalls herausfallen.

Nach Unterdrückung dieses Wertes haben wir für die vier Linienverhältnisse, bei denen die Rechnung durchgeführt werden konnte, vier Werte von $\bar{\varrho}/\varrho$. Von diesen fallen, gerade wie es zu erwarten ist, zwei in das durch den wahrscheinlichen Fehler gegebene Intervall, während die beiden anderen nicht weit außerhalb liegen. Von den letzteren hat der eine eine Wahrscheinlichkeit 1/2,8, soll also bereits in drei Fällen einmal vorkommen. Der größte Fehler, der bei vier Werten zu erwarten ist, ergibt sich aus $1 - \Phi(k\varrho_0) = 1/4$, woraus man aus einer Tabelle für $\Phi(x)$ den Wert $k = 1{,}75$ interpoliert; statt dessen tritt der 2,4fache Wert des wahrscheinlichen Fehlers auf, für den es noch immer die Wahrscheinlichkeit 1/9,6 gibt. In Anbetracht dessen, daß wir hier nur eine Statistik von 4 haben und daß streng genommen bei $m = 6$ bis 7 die in der Spalte für r angegebenen Werte noch nicht ganz

die Bedeutung eines wahrscheinlichen Fehlers haben[1]), ist die Übereinstimmung so gut, als wir sie überhaupt erwarten können. Wir schließen daher, daß das Kriterium für den Fehler vor und nach der Ausgleichung erfüllt ist und keine etwa durch verschiedene Eindringtiefe der Ionen usw. veranlaßten systematischen Fehler vorliegen.

Tabelle 2 enthält ferner noch die ungewichteten Mittelwerte $\overline{\overline{x}}_u$ aller $\sum n_j$ Einzelmessungen oder, was das Gleiche ist, die nach n_j gewichteten Mittelwerte der Gruppenmittel von Tabelle 1, nur um zu zeigen, daß auch diese praktisch mit den von uns als endgültig betrachteten nach p_j gewichteten Mitteln übereinstimmen. Wie erwähnt, darf man diese Mittelung nur vornehmen, wenn man sich über das im vorigen Abschnitt Gesagte (siehe besonders Fig. 7) hinwegsetzt und die Schwankungen der ϱ_j nicht als reell betrachtet. Konsequenterweise hat man dann den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung entweder (ϱ^*) nach Gl. (2) aus den ϱ_j-Werten der Tabelle 1 oder (ϱ_u) nach Gl. (1) mit $\sum n_j$ an Stelle von n_j und $v_i = x_i - \overline{\overline{x}}_u$ zu berechnen. Beide sind in den auf $\overline{\overline{x}}_u$ folgenden Spalten von Tabelle 2 angegeben. Sie sollen natürlich wieder miteinander übereinstimmen — die letzte Spalte enthält die Differenzen ihrer Quotienten gegen 1 — doch ist der wahrscheinliche Fehler für dieses Kriterium nicht bekannt; er dürfte von der Größenordnung $0{,}6745/2\sqrt{\sum n_j}$ sein[2]). Wie man sieht, ist dieses Kriterium sehr viel weniger empfindlich. Der in der eingeklammerten Zeile stehende Wert von $u = \frac{\varrho^*}{\varrho} - 1$ ist zwar am größten, doch ist er kaum zweimal so groß wie der nächstgrößte vorkommende Wert.

c) Der Fehler der Endergebnisse; konstanter Fehler. Der wahrscheinliche Fehler des Endmittels vor bzw. nach der Ausgleichung berechnet sich analog zu Gl. (3) aus dem wahrscheinlichen Fehler der Beobachtung vom Gewicht 1 vor bzw. nach der Ausgleichung nach

$$\bar{r} = \frac{\varrho}{\sqrt{\sum_1^m p_j}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\bar{\varrho}}{\sqrt{\sum_1^m p_j}}. \tag{7}$$

[1]) Siehe die Fußnote auf S. 336ff. — [2]) Das hier verwendete Kriterium stellt eine Verallgemeinerung des bekannten Abbeschen Kriteriums dar, bei dem $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 2$ gesetzt wird und dessen Fehler die oben angegebene Größe hat. Doch bezieht sich das Abbesche Kriterium, das bei Meßreihen nach dem gleichen Verfahren zur Untersuchung auf etwa mit der Zeit sich einschleichende systematische Fehler angewandt wird, nur auf die wahren Fehler ε_i (z. B. Dreieckswidersprüche bei Triangulierungen). Siehe darüber F. R. Helmert, Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1907, 2. Aufl., S. 341ff.

Tabelle 3.

	$^{176}Hf : ^{174}Hf$	n	$^{179}Hf : ^{176}Hf$	n	$^{177}Hf : ^{179}Hf$	n	$^{178}Hf : ^{177}Hf$	n	$^{180}Hf : ^{178}Hf$	n
Endergebnisse	29,7 ± 1,3	23	2,614 ± 0,054	57	1,334 ± 0,007	64	1,467 ± 0,006	50	1,296 ± 0,007	55
2 × 5 Stichproben	–	–	2,58 ± 0,05	10	1,34 ± 0,02	10	1,46 ± 0,02	10	1,29 ± 0,02	10
Hf aus Thortveitit	–	–	2,73 ± 0,11	11	1,35 ± 0,07	11	1,49 ± 0,02	11	1,33 ± 0,02	6
Aston (u. Dempster)	(16,7)		3,60		1,05		1,47		1,07	

Der größere von beiden, den man vorsichtigerweise gewöhnlich wählt, ist in Tabelle 2 neben den Endmitteln angegeben.

Nun könnten noch immer alle Messungen eines Linienverhältnisses durch einen konstanten Fehler, der sich trotz Variation der Versuchsbedingungen nicht mitverändert hat, entstellt sein. Darüber können wir natürlich gar nichts aussagen. Um dieser Möglichkeit aber Rechnung zu tragen, vergrößern wir überall die Fehler der Endergebnisse mit dem Faktor 1,4 bis 1,5 (siehe Tabelle 3). Der vergrößerte Wert, der nach dem Vorschlag von Birge[1]) wieder als wahrscheinlicher Fehler aufgefaßt werden soll, entspricht der Einkalkulation eines konstanten Fehlers, der bei unbekanntem Vorzeichen die gleiche Größe haben kann wie der nach (7) berechnete (da sich dann beide pythagoräisch addieren) oder der bei bekanntem Vorzeichen halb so groß ist.

2. Gegen unser Verfahren kann noch der Einwand erhoben werden, daß die Messung der Spitzenhöhen über dem Schleieruntergrund nicht immer ganz korrekt zu sein braucht und ferner, daß die Endergebnisse vielleicht doch durch die überwiegende Zahl von Messungen an den beiden Edelgasen einseitig beeinflußt sind. Außerdem waren die bisher besprochenen Aufnahmen alle an einer einzigen Hafniumprobe durchgeführt worden. Um solche Bedenken zu zerstreuen, dienen die folgenden Ausführungen bzw. Versuche.

a) Schwankungen des Schleierwertes oder des Photometers. Die Schwärzung S wird definiert durch $S = \log I_0/I$, wobei I_0 und I die Intensitäten des Meßlichtes vom Photometer für eine klare und für die zu messende geschwärzte Plattenstelle bedeuten. Wenn das Elektrometer des Photometers proportional arbeitet, können wir darunter

[1]) R. T. Birge, l. c.

auch seine Ausschläge verstehen. Ist ein konstanter Schleieruntergrund vorhanden, der durch gestreute Ionen verursacht ist und für den der Ausschlag oder die Intensität des Meßlichtes $I_u \leqq I_0$ sei, so tritt seine Schwärzung additiv zur Linienschwärzung (letztere gemessen über dem Schleierwert) hinzu: $S = \log I_0/I_u + \log I_u/I$.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, kann man statt S jede beliebige eindeutige Funktion von S, deren Form uns weiter nicht zu interessieren braucht, für die graphische Auftragung benutzen. Tatsächlich haben wir, wie im Kap. III bei der Beschreibung der Methode ausgeführt ist, die Höhen der Maxima $I_u - I$ über dem Schleierwert gewählt; da wir nur Vergleichsmessungen machen, sind wir auch von der Voraussetzung, daß das Elektrometer proportional arbeitet, unabhängig und können unter I und I_u direkt seine Ausschläge, gemessen von der am Anfang und am Ende jedes Photometerdiagramms markierten Nullstellung des Elektrometers, verstehen (siehe Fig. 1). Die photometrische Messung wurde nun stets so vorgenommen, daß auf der gleichen Platte des Photometers hintereinander der Massenbereich mit den Isotopen des Eichelementes und der mit den Hafnium-Isotopen registriert wurde. Haben beide gleiches I_u, so kann auch dann, wenn dieses von I_0 verschieden wäre, bei unseren Vergleichsmessungen dadurch kein Fehler bedingt werden. Weisen beide Bereiche eine Differenz ΔI_u auf, die sich sofort bemerkbar macht, auch wenn die Nullstellung des Elektrometers nicht mitregistriert wurde, dann kann das zweierlei Ursachen haben. Entweder der Schleieruntergrund ist nicht der gleiche, oder das Photometer hat inkonstant gearbeitet, indem z. B. eine Änderung in der Intensität des Meßlichtes eingetreten war. Beide Ursachen sind leicht voneinander zu unterscheiden, da z. B. im ersten Falle bei einer Wiederholung der Registrierung der Sprung ΔI_u konstant bleiben muß.

Ist der Sprung ΔI_u, unter dem die Differenz der I_u-Werte des Eichelementes und des zu untersuchenden Elementes verstanden sei, durch eine Änderung des Schleieruntergrundes verursacht, dann kann dies folgendermaßen leicht berücksichtigt werden. Wird die Abszissenachse um den Betrag ΔI_u parallel verschoben, so ergibt ihr Schnittpunkt mit der Eichkurve die „relative Häufigkeit" der den Überschuß des Schleiers erzeugenden Ionen; dieser Betrag ist jeweils von dem für die Isotopen des zu untersuchenden Elementes abzulesenden Wert in Abzug zu bringen. M. a. W. man verschiebt das Achsenkreuz parallel zu sich selbst, wobei der Ursprung auf der Eich-

kurve bleibt, so daß der Abstand der neuen von der alten Abszissenachse ΔI_u beträgt, und benutzt das neue Achsenkreuz für die Ablesung der zu untersuchenden Linienverhältnisse. Ist ΔI_u negativ, d. h. hat der Bereich des Eichelements den größeren Schleier, dann muß die Eichkurve ein Stückchen über den Ursprung hinaus extrapoliert werden. Bei unseren Messungen mit Hafnium war stets $\Delta I_u = 0$. Bei unseren gegenwärtigen geologischen Altersbestimmungen nach der Strontiummethode haben wir aber ein Beispiel für den Fall $\Delta I_u > 0$, und zwar erreichte bei acht verschiedenen Aufnahmen die Differenz des Untergrundes zwischen dem Eichelement Xe und dem zu untersuchenden Sr Beträge von 1 bis 3,5 mm; doch erhielten wir ohne Berücksichtigung des Schleiersprunges für $^{87}Sr/^{88}Sr$ bei diesem Präparat im Mittel den Wert 3,83 und bei Verschiebung des Achsenkreuzes um ΔI_u den praktisch damit übereinstimmenden Wert 3,82.

Ist eine Schwankung des Photometers (z. B. des Meßlichtes) die Ursache für ein von Null verschiedenes ΔI_u, dann kann das leicht eliminiert werden, indem man $(I_u - I)/I_u$ statt $I_u - I$ aufträgt.

b) Fünf Stichproben besonderer Auswertung. Um nicht ein bestimmtes Eichelement zu begünstigen, wurde von jedem eine Aufnahme herausgegriffen, die sowohl die einfach wie die doppelt geladene Gruppe der Hafniumionen enthielt, und nochmals sorgfältig photometriert. Bei jeder der fünf Platten wurde der Photometerausschlag auf $I_u \approx 70$ mm eingestellt. Von der Nullstellung des Photometers aus, die für jede der drei Plattenbereiche (Eichelement, Hafnium$^+$ und Hafnium^{++}) getrennt markiert worden war, wurden jetzt neben den I_u-Werten die Entfernungen zu den Spitzen der Ausschläge, d. h. die Werte I (siehe Fig. 1) gemessen. Bei keiner der fünf Aufnahmen waren die Schwankungen ΔI_u größer als einige Zehntel mm, d. h. sie lagen innerhalb der Meßgenauigkeit. Diesmal wurde die Größe $(I_u - I)/I_u$ in Abhängigkeit von der relativen Häufigkeit aufgetragen, wobei das häufigste Isotop des Eichelements jeweils gleich 100 gesetzt ist. Fig. 8 zeigt die damit gewonnenen Eichkurven und ausgezogen bzw. punktiert die Höhen der Ausschläge für die zu bestimmenden Hf$^+$- und Hf^{++}-Linien. Wie man sieht, liegen diese Punkte auf ganz verschiedenen Teilen der Eichkurve; damit ist die Möglichkeit ausgeschlossen, daß ein örtlicher Fehler in der Eichkurve sich bei allen Meßwerten in der gleichen Weise bemerkbar machen könnte.

Die Mittelwerte aus diesen zweimal fünf Stichproben — die Linienverhältnisse der einfach und der doppelt geladenen Hafnium-Isotope

für die fünf Eichelemente — sind in der zweiten Zeile von Tabelle 3 angegeben. Man sieht, daß die Übereinstimmung mit den in der ersten Zeile stehenden Endergebnissen so gut ist, wie überhaupt zu erwarten war. Die angegebenen Fehler, die nach Gl. (3) berechnet und wie unter 1c vereinbart für einen eventuell konstanten Fehler mit dem Faktor 1,5 vergrößert sind, sollen wieder als wahrscheinliche Fehler aufgefaßt werden.

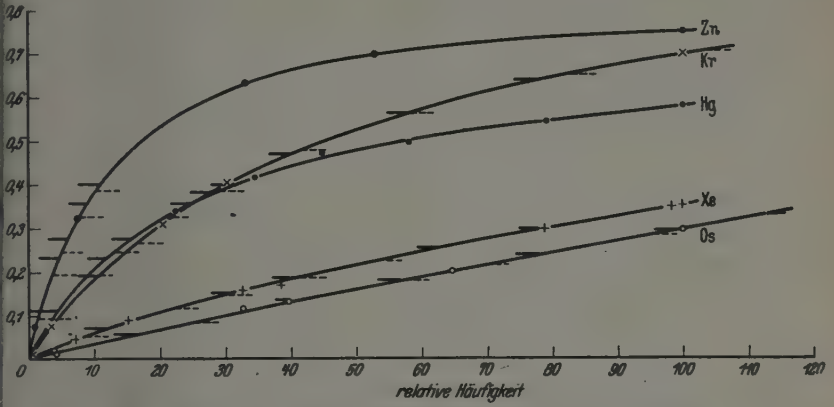


Fig. 8. Je eine Stichprobe von den fünf Eichelementen Os, Kr und Xe, sowie Zn und Hg; die beiden letzteren sind mit einer anderen Plattensendung aufgenommen. Die Punkte, Kreise und Kreuze bezeichnen die relativen Spitzenhöhen der Photometerausschläge $(I_u - I)/I_u$ der Isotope der Eichelemente, durch die die Eichkurve für jede Aufnahme gelegt wird. Die (von links kommenden) ausgezogenen bzw. (von rechts kommenden) gestrichelten Linien markieren die Spitzenhöhen der Isotope von einfach bzw. doppelt geladenem Hafnium.

c) Hafnium aus Thortveitit. Wie schon in Kap. II erwähnt, gelangte von uns noch eine Probe von Hafnium aus Thortveitit zur Untersuchung, da eine wenn auch geringe Aussicht bestand, daß sich in diesem dasjenige Hf-Isotop, das mit dem β-aktiven Cp-Isotop isobar ist, in meßbarem Maße radiogen angereichert haben könnte. Thortveitit — übrigens das einzige bekannte Scandiummineral — ist ein Scandiumsilikat, dessen norwegisches Vorkommen nach Untersuchungen von Hevesy[1]) bei einem Gehalt von nur 2% ZrO_2 immerhin 0,5% HfO_2 zeigt. Das Verhältnis HfO_2/ZrO_2 ist hier demnach 0,25, während es bei den eigentlichen Zr-Mineralen mit 30 bis über 90% ZrO_2 im Durchschnitt nur 0,015 und in einigen Fällen bis maximal 0,11 beträgt, je nachdem es sich um Produkte alkalischer oder saurer Restkristallisationen handelt[2]). Andererseits konnten Goldschmidt und

[1]) G. v. Hevesy, Danske Selsk. Skr. 6, 23, 1925. — [2]) G. v. Hevesy, Das Element Hafnium, S. 38f. Berlin, Springer, 1927.

Thomassen [1]) zeigen, daß sich die übrigen seltenen Erden, die neben dem Scandium in diesem Mineral enthalten sind, durch eine starke Anreicherung der letzten Glieder und damit auch des sonst seltenen Cassiopeiums auszeichnen.

Herr Direktor W. Feit hat sich in aufopferungsvoller Weise der Mühe unterzogen, das Gemisch von Zr + Hf aus Thortveitit für uns chemisch abzutrennen. Dafür standen 10 g eines Kristalls aus dem geologischen Museum in Oslo + 50 g thortveitithaltigem Mineralstaub, den wir von der Norsk Feldspat Co. bezogen hatten, zur Verfügung. Begleitet und unterstützt wurde die chemische Analyse durch Röntgenuntersuchungen des einen von uns (H. Ewald). Die erhaltene Menge von $(Zr + Hf)OCl_2$ war natürlich nicht groß; doch gelangen hiermit u. a. elf für die photometrische Auswertung brauchbare massenspektrographische Aufnahmen mit Kr als Eichelement.

Auch die massenspektrographische Analyse erwies, daß die Abtrennung von den seltenen Erden quantitativ gelungen war, da sich weder bei $A = 175$ — dem Hauptisotop von Cp — noch sonst eine Spur von Linien für die seltenen Erden zeigte. Für die Messung der Linienverhältnisse kamen diesmal nur die einfach geladenen Hf-Ionen in Betracht, da die Hf^{++}-Linien zum Teil durch Zr-Linien stark überdeckt waren. Die erhaltenen Werte sind mit ihren Fehlern (für die wieder das unter 1c Gesagte gilt) in der 3. Zeile von Tabelle 3 eingetragen. Wenn auch das erhoffte Ergebnis nicht gefunden werden konnte — bei keinem der Linienverhältnisse von Hf aus Thortveitit ist eine außerhalb der Fehler liegende Abweichung von den Endergebnissen der 1. Zeile zu bemerken —, so beweist diese Untersuchung doch, daß auch mit seltenen oder kostbaren Proben verläßliche Werte für die relative Häufigkeit von Isotopen nach unserer Methode durchzuführen sind.

Aus der Isobarenregel [2]) wäre zu folgern, daß von den beiden bekannten Cp-Isotopen ^{176}Cp die natürliche β-Aktivität zeigt [3]). Eine experimentelle Stütze dafür wurde kürzlich [4]) bei der Neutronenbestrahlung von Cp gefunden, da sich durch Neutroneneinfang u. a. ein Isomer des Cp-Isotops mit der natürlichen β-Aktivität bildet. Wir hätten demnach eventuell erwarten können, im Hf aus Thortveitit die Linie 176 durch den Anteil der radiogenen Hf-Atome verstärkt zu

[1]) V. M. Goldschmidt u. L. Thomassen, Geochemische Verteilungsgesetze III, Videnskapsselsk. Skr. 1924, Nr. 5. — [2]) J. Mattauch, ZS. f. Phys. 91, 361, 1934. — [3]) J. Mattauch, Naturwiss. 25, 812, 1937; J. Mattauch u. H. Lichtblau, ZS. f. Phys. 111, 514, 1939. — [4]) A. Flammersfeld u. J. Mattauch, Naturwiss. 31, 66, 1943.

finden. Bezeichnet man diesen mit $^{176}Hf^*$, um ihn von den Anteilen der gewöhnlichen Hf-Isotope zu unterscheiden, und mit $\varepsilon = {}^{176}Hf^*/{}^{176}Hf$ das Verhältnis der seit der Kristallisation des Thortveitits aus Cp entstandenen Atome zu den schon vorhandenen von der Massenzahl 176, dann wird sich zeigen, daß $\varepsilon \ll 1$ ist; die Differenz $^{179}Hf/^{176}Hf - {}^{179}Hf/^{176}Hf\,(1+\varepsilon) = \varepsilon \cdot {}^{179}Hf/^{176}Hf$ gibt dann den Betrag an, um den dieses Linienverhältnis hätte kleiner gefunden werden müssen, da der erste Term mit gewöhnlichem, der zweite mit Hf aus Thortveitit gemessen wurde.

Aus den in der Literatur verstreuten Angaben läßt sich aber zeigen, warum unser diesbezügliches Ergebnis negativ war. Aus der Halbwertszeit $T = (\ln 2)/\lambda$ des Cp, die von Libby[1]) zu $2{,}9 \cdot 10^{12}\,a$ (bezogen auf das Mischelement) bestimmt wurde, errechnet man, daß sich aus N_0 Cp-Atomen bei Annahme eines Maximalalters von $t = 2 \cdot 10^9\,a$ (Alter der festen Erdrinde) höchstens $N_0 \lambda t = N_0 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-4}$ Atome $^{176}Hf^*$ gebildet haben können. Nun enthält der norwegische Thortveitit nach Analysen von J. Sterba-Böhm, die bei Schetelig[2]) ausgeführt wurden, 8,89 Gew.% $[Y]_2O_3$, wobei das Zeichen [Y] für Y plus den Elementen der Reihe Gd—Cp steht. Nach Angabe von Goldschmidt und Thomassen[3]) kommt bei den zahlreichen von ihnen auf seltene Erden untersuchten Mineralen auf ein Atom Y höchstens ein Atom der Reihe Eu—Cp; von dieser beträgt nach den von ihnen für den Erdenbestand des Thortveitit-Typus angegebenen Zahlen die Menge des Cp etwa 9,4%. Norwegischer Thortveitit enthält demnach höchstens 0,35% Cp, gegenüber 0,46% Hf (nach der erwähnten Hevesyschen Analyse). Auf N_0 Atome Cp kommen daher in unserem Mineral mindestens (unter Berücksichtigung der Atomgewichte) $1{,}29 \cdot N_0$ Atome Hf, von denen die dagegen jedoch zu vernachlässigende Anzahl der radiogenen $^{176}Hf^*$-Atome in Abzug zu bringen wäre, um die Anzahl der schon vorher vorhandenen gewöhnlichen Hf-Atome zu erhalten. Von diesen sind nach unseren Messungen (siehe Tabelle 4) 5,30%, das sind wenigstens $0{,}068 \cdot N_0$ Atome, ^{176}Hf. Es ist daher $\varepsilon \leqq 0{,}70 \cdot 10^{-2}$ oder die zu erwartende Differenz im Linienverhältnis $\varepsilon \cdot {}^{179}Hf/^{176}Hf \leqq 0{,}018$ oder höchstens $^1/_3$ des von uns angegebenen wahrscheinlichen Fehlers. Man müßte schon sehr große Mengen eines an Zr und Hf praktisch freien, aber seltene Erden führenden Minerals verarbeiten, um den gesuchten Nachweis führen zu können.

[1]) W. F. Libby, Phys. Rev. 56, 21, 1939. — [2]) J. Schetelig, Videnskapsselsk. Skr. 1922, Nr. 1. — [3]) V. M. Goldschmidt u. L. Thomassen, l. c. S. 45.

VI. Relative Häufigkeiten, mittlere Massenzahl und chemisches Atomgewicht.

Diese Größen sind durch die experimentell gemessenen, d. h. vor allem durch die Linienverhältnisse auszudrücken, um nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ihre Fehler richtig berechnen zu können. Um zu geschlossenen Ausdrücken zu kommen, ist es am zweckmäßigsten, die Massenzahlen der Isotope $A_1, A_2, \ldots A_n$ nach fallenden Häufigkeiten $H_1 > H_2 > \cdots > H_n$ zu ordnen; dabei bedeutet H_i die Häufigkeit des Isotops von der Massenzahl A_i. Da die H_i nur Verhältniszahlen sind, ist die Anzahl der gemessenen Linienverhältnisse L_i, deren Fehler mit l_i bezeichnet werden sollen, um 1 kleiner als die der Massenzahlen. Wir können daher festsetzen, daß $H_{i-1}/H_i = L_i \pm l_i$ ist, was noch durch die Definition $H_0/H_1 = L_1 = 1$ ($l_i = 0$) zu ergänzen ist; dabei ist $H_0 = H_1$ eine willkürlich wählbare Konstante.

a) Relative Häufigkeiten. Man kann nun über H_1 so verfügen, daß man $H_1 = 1$ (oder auch $= 100$) setzt. Dann ist $H_1 = 1 = \frac{1}{L_1}$, $H_2 = \frac{1}{L_1 L_2}$, $\ldots$ $H_n = \frac{1}{L_1 L_2 \ldots L_n}$ oder allgemein

$$H_i = \frac{1}{\prod_1^i L_k}. \tag{8}$$

Die Fehler der H_i sind nach dem Fortpflanzungsgesetz:

$$h_i = \sqrt{\sum_1^n \left(l_j \cdot \frac{\partial H_i}{\partial L_j}\right)^2}, \tag{9}$$

wobei

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i}{\partial L_j} &= 0 \quad \text{für } i < j, \\ &= -\frac{H_i}{L_j} \quad \text{für } i \geqq j. \end{aligned} \tag{9a}$$

Gewöhnlich gibt man aber die relativen Häufigkeiten in Prozenten an — wir wollen diese Zahlen zur Unterscheidung mit $H_1^*, H_2^*, \ldots H_n^*$ bezeichnen —, wobei über die willkürliche Konstante so verfügt ist, daß $\sum_1^n H_i^* = 1$ (oder $= 100$) gemacht wird. Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\sum_1^n H_i = C \tag{10}$$

und berechnen für später mit Hilfe von (9a)

$$\frac{\partial C}{\partial L_j} = -\frac{1}{L_j}\sum_{j}^{n} H_i = -\frac{1}{L_j}\left(C - \sum_{1}^{j-1} H_i\right), \tag{11}$$

dann werden die

$$H_i^* = \frac{H_i}{C} \tag{12}$$

und die zugehörigen Fehler

$$h_i^* = \sqrt{\sum_{1}^{n}\left(l_j \cdot \frac{\partial H_i^*}{\partial L_j}\right)^2} \tag{13}$$

Aus (12) ergeben sich mit Hilfe von (9a) und (11) leicht die für die Fehlerberechnung nötigen Größen

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i^*}{\partial L_j} &= \frac{H_i}{C^2 \cdot L_j}\sum_{j}^{n} H_i \quad \text{für } i < j, \\ &= -\frac{H_i}{C^2 \cdot L_j}\sum_{1}^{j-1} H_i \quad \text{für } i \geqq j. \end{aligned} \tag{13a}$$

Aus unseren Endergebnissen (Tabelle 3, 1. Zeile) berechnen sich so die in Tabelle 4 aufgeführten Werte der H_i^* und ihrer selbst wieder in Prozenten angegebenen wahrscheinlichen Fehler. Vergleicht man die letzteren mit den von Nier und anderen bei elektrometrischen Messungen angegebenen Fehlern[1]), so wird man finden, daß die Genauigkeit unserer Methode der elektrometrischen ebenbürtig ist.

Tabelle 4.

Massenzahl.....	174	176	177	178	179	180
Prozentuelle Häufigkeit	0,18 ± 5 %	5,30 ± 2 %	18,47 ± 0,3$_5$ %	27,10 ± 0,3 %	13,84 ± 0,5$_5$ %	35,11 ± 0,4 %
Nach Aston (u. Dempster)...	(0,3)	5	19	28	18	30

Aston[2]) hatte, wie er selbst angibt, bei seinen Aufnahmen des Hf-Spektrums die Linien nicht klar aufgelöst, so daß nur ungefähre Schätzungen der Häufigkeit vorgenommen werden konnten. Seine Zahlen sind zum Vergleich in die letzte Zeile von Tabelle 4 eingetragen. Dempster[3]) hat später das seltene Isotop ^{174}Hf entdeckt und seine

[1]) Siehe z. B. J. Mattauch u. S. Flügge, Kernphysikalische Tabellen. Berlin, Springer, 1942, Tabelle 1. — [2]) F. W. Aston, Proc. Roy. Soc. London (A) **149**, 396, 1935. — [3]) A. J. Dempster, Phys. Rev. **55**, 794, 1939.

Häufigkeit zu 0,3% geschätzt. Daraus lassen sich die Schätzungen für die Linienverhältnisse zurückberechnen, die in der letzten Zeile von Tabelle 3 enthalten sind. Wie man sieht, ist nur ein Linienverhältnis — $^{178}Hf/^{177}Hf$ — richtig zu etwa 1,5 geschätzt worden.

b) Die mittlere Massenzahl. Aus den relativen Häufigkeiten läßt sich bekanntlich das chemische Atomgewicht berechnen. Vorerst pflegt man aber — wenigstens bei den schweren Elementen — als Zwischenresultat die mittlere Massenzahl $\bar{A}$ anzugeben, da sich diese ohne Zuhilfenahme fremder Messungen berechnen läßt. Sie ist definiert durch

$$\bar{A} = \sum_1^n A_i \cdot H_i^* = \frac{1}{C} \sum_1^n A_i \cdot H_i. \tag{14}$$

Ihr Fehler ist demnach

$$\bar{a} = \sqrt{\sum_1^n \left(l_j \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial L_j}\right)^2}. \tag{15}$$

Durch Differentiation von (14) findet man unter Benutzung von (9a) und (11)

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial L_j} = \frac{1}{C \cdot L_j} \sum_j^n (\bar{A} - A_i) \cdot H_i. \tag{15a}$$

Damit erhalten wir für die mittlere Massenzahl von Hf und ihren wahrscheinlichen Fehler den Wert $178{,}543 \pm 0{,}004$. Die auf den ersten Blick extrem hoch scheinende Genauigkeit erklärt sich daraus, daß die mittlere Massenzahl gegenüber den Messungen der Linienverhältnisse nicht sehr empfindlich ist. Aus der 2. und 3. Zeile von Tabelle 3 erhält man für die $2 \cdot 5$ Stichproben 178,546 und für das Hf aus Thortveitit 178,576; selbst Aston erhält trotz seiner groben Schätzungen 178,5.

c) Das chemische Atomgewicht. Aus der mittleren Massenzahl ergibt sich nach Korrektion für den Packungsanteil das chemische Atomgewicht nach Division durch den Smytheschen Faktor 1,000275. Dieser Wert ist sehr genau bekannt und neuerdings wieder durch Messungen von Murphey[1]) bestätigt worden. Sein Fehler beträgt nur einige Einheiten der letzten Stelle und ist praktisch zu vernachlässigen. Der Packungsanteil von Hf ist bisher noch nicht gemessen worden; man schätzt ihn[2]) (für alle Isotope näherungsweise gleich) aus der

[1]) B. F. Murphey, Phys. Rev. **59**, 320, 1941. — [2]) S. Flügge u. J. Mattauch, Isotopenbericht 1942, Phys. ZS. **44**, 181, 1943.

Kurve zu $+ 0{,}2 \cdot 10^{-4}$. Damit erhalten wir für das chemische Atomgewicht von Hf

$$178{,}50 \pm 0{,}01.$$

Wie üblich ist hier die Unsicherheit recht hoch angegeben; sie schließt einen Fehler von $\pm 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ im Packungsanteil ein, der fast doppelt so groß ist wie der Fehler des bei den benachbarten Elementen Os bis Au gemessenen Packungsanteils.

Auf chemischem Wege wurde das Atomgewicht des Hafniums von Hönigschmid und Zintl[1]) bestimmt. Als Endresultat, das seitdem auch in die Internationale Tabelle aufgenommen wurde, wird 178,6 angegeben, dessen Unsicherheit 0,05% nicht übersteigen soll. Die chemischen Messungen selbst sind jedoch genauer. Es wurden je zwei Analysen an zwei durch ihren Zirkongehalt etwas verschiedenen, von v. Hevesy und Thal Jantzen hergestellten Fraktionen durchgeführt; die Einzelanalysen weichen von ihren Mittelwerten nur um eine oder höchstens zwei Einheiten der zweiten Dezimale ab. Die Autoren geben die folgende kleine Tabelle, die neben den Mitteln der

Fraktion	(Hf + Zr) gemessen	p% ZrO_2 im HfO_2	Hf berechnet
III	177,79	$0{,}57 \pm 0{,}06$	$178{,}64 \pm 0{,}09$
I + II	178,33	$0{,}16 \pm 0{,}02$	$178{,}57 \pm 0{,}03$

Analysenwerte und den von Thal Jantzen röntgenographisch bestimmten Gehalten der verwendeten Oxydpräparate an ZrO_2 die daraus berechneten Atomgewichte für Hf enthält. Setzt man p für die Fraktion III bzw. I + II zu 0,48 bzw. 0,11% an, d. h. wäre der röntgenographische Befund in beiden Fällen um rund den gleichen Faktor $^3/_4$ zu verkleinern, was in Anbetracht des geringen Zr-Gehalts nicht unmöglich erscheint, dann ergibt sich aus den Analysenwerten von Hönigschmid und Zintl beide Male identisch unser Wert für das Atomgewicht. Von einer Unstimmigkeit mit den chemischen Messungen kann daher wohl nicht gesprochen werden.

Einer ganzen Reihe von Herren gebührt unser Dank für die mannigfache Unterstützung dieser Arbeit: Herrn Prof. G. v. Hevesy für die freundliche Überlassung des Hafniumpräparates, mit dem die Untersuchungen an gewöhnlichem Hf durchgeführt wurden, Herrn Prof.

[1]) O. Hönigschmid u. E. Zintl, Ber. d. Deutsch. chem. Ges. 58, 453, 1925.

V. M. Goldschmidt für die Beschaffung der Thortveititminerale, Herrn Direktor W. Feit für die uneigennützige und mühevolle Isolierung von Hafnium aus denselben, den Herren Prof. J. Eggert und Dr. Kallab und den sonst daran beteiligten Herren der Filmfabrik Wolfen der IG. dafür, daß sie in entgegenkommendster Weise auf unsere Wünsche eingegangen sind und in längerer Entwicklungsarbeit eine für massenspektrographische Zwecke gut geeignete Platte geschaffen haben. Weiter möchten wir der Deutschen Forschungsgemeinschaft für verschiedene Hilfsapparate sowie für die Verleihung eines Stipendiums an den einen von uns (H. Ewald) unseren Dank aussprechen. Auch dem Kaiser Wilhelm-Institut für Physik wünschen wir für die Überlassung eines Zeissschen selbstregistrierenden Photometers zu danken.

Unsere bewährte Mitarbeiterin Frl. H. Scheld hat nicht nur die Reduktion des Hafniumoxyds zu Metall vorgenommen, sondern auch die massenspektrographischen Aufnahmen und die photometrische Registrierung gewissenhaft durchgeführt und uns bei ihrer Auswertung unterstützt.

Berlin-Dahlem, Kaiser-Wilhelm-Institut für Chemie, August 1943.

Zur Theorie der thermischen Dämpfung in festen Körpern*).

Von **Max Päsler** in Berlin.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 4. August 1943.)

Schwingungen elastischer Körper sind durch das Auftreten des thermoelastischen Effektes mit einer ihrer Eigenart wegen als thermische Dämpfung bezeichneten Erscheinung verbunden. Um diese Größe quantitativ zu erfassen, wird folgender Weg beschritten: Man bestimmt die Bewegungsgleichung des Schwingers aus dem Hamiltonschen Prinzip, setzt in dieses jedoch für die potentielle Energie des Schwingers nicht den sich durch Integration des elastischen Potentials ergebenden Ausdruck ein, sondern denjenigen Wert, welcher (durch die gleiche Integration über den betreffenden Körper) aus einer erweiterten, den thermischen Verhältnissen bei der Deformation Rechnung tragenden Form zu berechnen ist. Dieses Verfahren führt zu einer erweiterten Bewegungsgleichung für den Schwinger, in der ein Dämpfungsglied auftritt, so daß nach Definition des ln-Dekrementes als Maß für die thermische Dämpfung die rechnerische Bestimmung derselben möglich ist. Nach Entwicklung der allgemeinen Theorie werden die gefundenen Ergebnisse dazu benutzt, um die thermische Dämpfung für spezielle Schwinger (Stab, Platte, Kugel, Zylinder) zu berechnen.

Einleitung.

Bemerkung. In nachstehender Arbeit werden die Gleichungen in den einzelnen Abschnitten durch zwei vor und hinter einem Komma stehende Zahlen gekennzeichnet, von denen die erste mit der Nummer des betreffenden Abschnitts übereinstimmt, während die zweite, hinter dem Komma stehende, die Laufzahl ist. Bei Zitierung einer Gleichung, die in demselben Abschnitt auftritt, wird nur die Laufzahl angegeben, dagegen beide Zahlen, wenn sich die genannte Gleichung in einem anderen Abschnitt befindet.

1. Einiges über thermische Dämpfung. Problemstellung. Von experimentellen Untersuchungen, unter anderem von mit der Entwicklung des sogenannten Quarzfadenmanometers [1]) zusammenhängenden Versuchen her, ist es bekannt, daß die Amplitude schwingender fester Körper mit der Zeit *stärker* abnimmt, als es der Einwirkung der einzigen äußeren Reibungskraft, dem Luftwiderstand, entspricht. Man beobachtet also eine zusätzliche Dämpfung und führt deren Entstehen auf die Auswirkung einer als *innere Reibung* bezeichneten Ursache zurück. Welche Gesamtheit von Erscheinungen in diesem Begriff zusammenzufassen sind, ist im einzelnen noch nicht ganz geklärt.

*) D 11. Gekürzte, von der math.-naturw. Fakultät der Universität Berlin genehmigte Dissertation.

[1]) E. Brüche, Ann. d. Phys. **79**, 695, 1926; Diss. T. H. Danzig; G. Wetterer, Wiss. Veröff. Siemens-Konzern **19**, 68, 1940.

Es läßt sich jedoch aus den bisher durchgeführten diesbezüglichen theoretischen Betrachtungen in Verbindung mit dem zur Zeit vorliegenden experimentellen Beobachtungsmaterial eine Folgerung ziehen, die über die Natur der inneren Reibung insofern eine Aussage macht, als sie diese auf *Wärmeleitung* zurückführt, die — in Fällen, wie den hier besprochenen — wegen ihres weitaus überwiegenden Beitrags als praktisch *einzige* Ursache für die Entstehung der Dämpfung anzusehen ist. Letztere wird deshalb auch als *thermische* Dämpfung bezeichnet. Eben gemachte Aussage, die in vorliegender Arbeit wesentlich benutzt wird, folgt unmittelbar aus den Ergebnissen der Untersuchungen, die insbesondere Bennewitz und Rötger[1]) und Zener[2]) zur Erforschung der Natur der inneren Reibung angestellt haben.

Von Problemen, die mit dieser Erscheinung zusammenhängen, interessiert u. a. wesentlich die Frage: Von welchen Größen hängt die Dämpfung in einem schwingenden elastischen Körper[3]) ab und wie gelangt man zu einem diesbezüglichen quantitativen Gesetz? Die Beantwortung dieser Frage ist von praktischer Bedeutung für die Entwicklungstechnik des eingangs genannten Quarzfadenmanometers, wahrscheinlich auch für gewisse, neuerdings eingehender untersuchte Fragen der Werkstoffprüfung[4]). Darüber hinaus besitzt sie aber grundsätzlichen theoretischen Wert.

Nachstehende Ausführungen sollen einen Weg weisen, der zu einer Beantwortung der aufgeworfenen Frage führt, wobei — an obengenannte Aussage anknüpfend — die Betrachtungen allein auf thermische Dämpfung beschränkt wurden. Die Überlegungen, die zu einer Lösung führten, waren folgende: Da sich die durch Wärmeleitung bedingte Energiedissipation als Dämpfung der Schwingung äußert, wurde versucht, die Bewegungsgleichung des Schwingers derart zu erweitern, daß jene ein zusätzliches Glied enthält, welches von der durch die Deformation bedingten Temperaturänderung ϑ abhängt und den Charakter eines Dämpfungsgliedes besitzt. Zu einer einen derartig beschaffenen zusätzlichen Ausdruck enthaltenen Bewegungsgleichung

[1]) K. Bennewitz u. H. Rötger, a) Phys. ZS. 37, 578, 1936; b) ZS. f. techn. Phys. 19, 521, 1938; c) Phys. ZS. 40, 416, 1939. — [2]) Cl. Zener, Phys. Rev. 52, 230, 1937; 53, 192, 1938; 53, 1100, 582, 686, 1010, 1938. — [3]) Für diesen soll in Anlehnung an eine neuerdings gebräuchliche Bezeichnung der Ausdruck „Schwinger" gebraucht werden. Vgl. E. Lehr, Schwingungstechnik. Berlin, Springer, 1930. — [4]) W. Köster, Arch. f. Eisenhüttenwesen 14, 271/78, 1940/41.

gelangt man nun vermittels des Hamiltonschen Prinzips (H.P.), wenn man in diesem statt der potentiellen Energie, zu deren Berechnung man vom elastischen Potential u ausgeht, denjenigen Wert einsetzt, der sich aus einer zweckentsprechenden Erweiterung von u ergibt. Diese erweiterte Form, nachstehend mit φ bezeichnet, unterscheidet sich von dem elastischen Potential durch ein additives Glied, das im wesentlichen von der bei der Deformation entstehenden Temperaturänderung abhängt. Offensichtlich ist daher das zusätzliche, in der Bewegungsgleichung auftretende Glied, wie verlangt, ebenfalls von ϑ abhängig. Ob es darüber hinaus noch den Charakter eines Dämpfungsgliedes hat, muß einer gesonderten Untersuchung vorbehalten bleiben. Indes zeigt eine solche, daß dies tatsächlich der Fall ist: der zusätzliche Ausdruck ist ein „$\partial/\partial t$-Glied". Die gefundene erweiterte Bewegungsgleichung beschreibt also eine gedämpfte Schwingung und man kann nun in Analogie zu den mechanischen oder elektrischen Schwingungen als Maß der zu berechnenden Energiedissipation etwa das ln-Dekrement definieren, womit die Möglichkeit der exakten Berechnung der Dämpfung gegeben ist.

Bevor mit der quantitativen Formulierung der eben skizzierten Ausführungen im einzelnen begonnen werde, sei noch kurz auf die bereits vorliegende Literatur zu dem hier behandelten bzw. mit ihm verwandten Thema hingewiesen. Die Physik der Thermoelastizität, von W. Thomson (Lord Kelvin)[1]) begründet, ist nicht sehr entwickelt. Einige ältere, ziemlich spezielle Probleme behandelnde Arbeiten werden bei Timpe-Love[2]) zitiert. Von jüngeren Arbeiten sind es insbesondere die oben genannten Veröffentlichungen von Bennewitz-Rötger[3]) und Zener[4]), in denen das Problem der inneren Reibung wohl erstmalig behandelt wird. Einen zusammenfassenden Bericht darüber gibt Rötger[5]). Eine weitere, erst kürzlich erschienene Arbeit zur Theorie der inneren Reibung ist die von J. L. Snoek[6]). Neben diesen vorwiegend theoretischen Arbeiten liegt eine Reihe solcher vor, die sich eingehender mit experimentellen Methoden, insbesondere mit Dämpfungsmessungen von Werkstoffen beschäftigen. Es seien hier genannt die Publikationen von Köster[7]), Förster-Köster[8]), Rohloff-Lawrynowicz[9]), Rohloff[10]) und

---

[1]) W. Thomson, Phil. Mag. (Ser. 5), Vol. 5, 1878. In deutscher Sprache vgl. Ostwalds Klassiker d. exakt. Wiss. Nr. 193, S. 135. — [2]) A. Timpe u. A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizitätstheorie. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1907. — [3]) K. Bennewitz u. H. Rötger, a) Phys. ZS. **37**, 578, 1936; b) ZS. f. techn. Phys. **19**, 521, 1938; c) Phys. ZS. **40**, 416, 1939. — [4]) Cl. Zener, Phys. Rev. **52**, 230, 1937; **53**, 1938; **53**, 100, 582, 686, 1010, 1938. — [5]) H. Rötger, Glastechn. Ber. **19**, 192, 1941. — [6]) J. L. Snoek, Nederl. Tijdschr. voor Natuurk. **7**, 133, 1940. — [7]) W. Köster, Arch. f. Eisenhüttenwesen **14**, 271/78, 1940/41. — [8]) F. Förster u. W. Köster, Naturwiss. **25**, 436, 1937. — [9]) E. Rohloff u. W. Lawrynowicz, ZS. f. techn. Phys. **22**, 110, 1941. — [10]) E. Rohloff, ZS. f. Phys. **117**, 64, 1940.

Krüger-Rohloff [1]). Diese Autoren untersuchen die Dämpfung von *Metallen* und *Hölzern*. Weitere Arbeiten, die sich auf Ergebnisse ähnlicher Messungen beziehen, wurden von Higuchi [2]), Kneser [3]) und Pfriem [4]) veröffentlicht. Die beiden letzten Autoren berichten über akustische Relaxationserscheinungen. Arbeiten, die über Meßverfahren, Meßgeräte usw. berichten, werden von Pöschl [5]) zitiert.

Theoretische Betrachtungen.

2. Die Energiedissipation bei thermoelastischen Vorgängen. Eine gedämpfte Schwingung ist im thermodynamischen Sinne ein irreversibler Prozeß, da sich ein gewisser Betrag der kinetischen Energie des Schwingers nach Ablauf einer bestimmten Zeit in eine andere Energieform (Wärme) umgewandelt hat. Die Energiedissipation wird von der Dämpfungsursache abhängig sein. Insbesondere ist bei dem Problem der thermischen Dämpfung der sich umsetzende Teil der mechanischen Energie offensichtlich eine Funktion der durch den thermoelastischen Effekt hervorgerufenen Übertemperatur sowie des Wärmeleitvermögens des Schwingers. Nachstehend soll ein Ausdruck für die Dissipationsfunktion hergeleitet werden, was etwa dadurch gelingt, daß man mit Hilfe der beiden thermodynamischen Hauptsätze die zeitliche Änderung der Entropie berechnet, aus welchem Ausdruck auf die Energiedissipation geschlossen werden kann.

Mit den in der Thermodynamik gebräuchlichen Abkürzungen: Q für die Wärmemenge, U für die innere Energie, A für die mechanische Arbeit, T für die Temperatur und S für die Entropie, nehmen die Hauptsätze die bekannte Form

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U - \mathrm{d}A, \tag{2,1}$$

$$\mathrm{d}Q = T\,\mathrm{d}S \tag{2,2}$$

an. Hieraus ergibt sich nach Einführung der spezifischen Entropie s und inneren Energie u für die Entropieänderung, wenn ϱ die Dichte bedeutet,

$$T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = T\varrho\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \varrho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}. \tag{2,3}$$

Um diese Gleichung anwenden zu können, bedarf es der Kenntnis der Änderung der Arbeit und der potentiellen Energie. Für erstere ergibt

---

[1]) Krüger-Rohloff, ZS. f. Phys. 110, 58, 1938. — [2]) S. Higuchi, Journ. Frankl. Inst. (Vol. 231) Nr. 5, S. 421, 1941. — [3]) H. Kneser, ZS. f. techn. Phys. 19, 486, 1938. — [4]) H. Pfriem, Akust. ZS. 6, 109, 1941. — [5]) T. Pöschl, Phys. in regelm. Ber. 9, Heft 2, S. 7/9, 1941.

sich, da Arbeit = Kraft · Weg = Spannung · Dehnung, also

$$\mathrm{d}A = \sum \sigma_{ik} \cdot \mathrm{d}\varepsilon_{ik} \tag{2, 4}$$

ist, sofort

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \sum \sigma_{ik} \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ik}}{\mathrm{d}t}. \tag{2, 5}$$

Hierbei bedeuten σ_{ik} (ε_{ik}) die Komponenten des Spannungs- (Dehnungs-) tensors ($i, k = 1, 2, 3$ bzw. x, y, z).

Die Berechnung der zeitlichen Änderung der inneren Energie $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ läßt sich, ausgehend von der Energiehauptformel in Verbindung mit den elastischen Grundgleichungen durchführen. Die Energiehauptformel der Elastizitätstheorie lautet[1]):

$$\mathrm{d}U + \mathrm{d}L = \int\int\int \varrho\,(\mathfrak{F}\,\mathrm{d}\mathfrak{x})\,\mathrm{d}\tau + \int\int (\mathfrak{P}\,\mathrm{d}\mathfrak{x})\,\mathrm{d}\Omega - \mathrm{d}t \int\int \mathfrak{W}_n\,\mathrm{d}\Omega. \tag{2, 6}$$

Hierbei bedeuten: L die kinetische Energie, $\mathfrak{F}$ den Vektor der volumenproportionalen Kräfte, $\mathfrak{P}$ den Vektor der Oberflächenkräfte, $\mathfrak{x}$ den Verschiebungsvektor, $\mathfrak{W}_n$ die Normalkomponente des Vektors des Wärmestroms, der durch die mit dem elastischen Prozeß verbundene Wärmeentwicklung bzw. Abkühlung entsteht, $\mathrm{d}t$ ein Zeitelement, $\mathrm{d}\tau$ ein Volumenelement und $\mathrm{d}\Omega$ ein Oberflächenelement. Werden die Komponenten von $\mathfrak{P}$ zur Abkürzung mit Π_i ($i = 1, 2, 3$) bezeichnet und die Komponenten von $\mathfrak{x}$ durch ξ_i symbolisiert, so kann, unter Beachtung der üblichen Summationsvorschrift, daß über doppelt auftretende Indizes zu summieren ist, das zweite Integral der rechten Seite von (6) in der Form

$$\int\int (\mathfrak{P}\,\mathrm{d}\mathfrak{x})\,\mathrm{d}\Omega = \int\int \Pi_i\,\mathrm{d}\xi_i\,\mathrm{d}\Omega \tag{2, 7}$$

geschrieben werden. Nach den Grundgesetzen der Elastizitätstheorie ist nun[1])

$$\Pi_i = \sum \sigma_{ik} \cdot \cos(n, x_k). \tag{2, 8}$$

Damit geht Gl. (7) über in

$$\int\int (\mathfrak{P}\,\mathrm{d}\mathfrak{x})\,\mathrm{d}\Omega = \int\int \sigma_{ik}\,\mathrm{d}\xi_i \cos(n, x_k)\,\mathrm{d}\Omega \tag{2, 9}$$

oder durch Anwendung des Gaussschen Integralsatzes und anschließende Differentiation

$$\begin{aligned}\int\int (\mathfrak{P}\,\mathrm{d}\mathfrak{x})\,\mathrm{d}\Omega &= \int\int\int \frac{\partial \sigma_{ik}\,\mathrm{d}\xi_i}{\partial x_k}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int\int\int \sigma_{ik} \frac{\partial\,\mathrm{d}\xi_i}{\partial x_k}\,\mathrm{d}\tau + \int\int\int \mathrm{d}\xi_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{2, 10}$$

[1]) Handb. d. Phys. 6.

Geht man mit diesem Ausdruck in Gl. (6) ein, so erhält man für die Änderung der potentiellen Energie

$$\mathrm{d}U = \int\int\int \varrho\,(\mathfrak{F}\,\mathrm{d}\mathfrak{x})\,\mathrm{d}\tau - \mathrm{d}t\int\int \mathfrak{W}_n\,\mathrm{d}\Omega + \\ + \int\int\int \sigma_{ik}\frac{\partial\,\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}x_k}\,\mathrm{d}\tau + \int\int\int \mathrm{d}\xi_i\,\frac{\partial\,\sigma_{ik}}{\partial x_k}\,\mathrm{d}\tau - \mathrm{d}L. \qquad (2,11)$$

Das in dieser Gleichung auftretende Glied $\mathrm{d}L$ ist noch durch σ_{ik} und ε_{ik} auszudrücken, was mit Hilfe der elastischen Grundgleichungen gelingt. Diese lauten bekanntlich:

$$\varrho\,\mathfrak{F} + \frac{\partial\,\sigma_{ik}}{\partial x_k} = \varrho\,\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}. \qquad (2,12)$$

Durch Multiplikation mit $\mathrm{d}\mathfrak{x}$ und Integration über den betrachteten Körper folgt hieraus

$$\int\int\int \varrho\,(\mathfrak{F}\,\mathrm{d}\mathfrak{x})\,\mathrm{d}\tau + \int\int\int \mathrm{d}\xi_i\cdot\frac{\partial\,\sigma_{ik}}{\partial x_k}\,\mathrm{d}\tau = \int\int\int \varrho\,\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\,\mathrm{d}\mathfrak{x}\,\mathrm{d}\tau \\ = \int\int\int \frac{\varrho}{2}\,\mathrm{d}\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}\tau \\ = \mathrm{d}L. \qquad (2,13)$$

Verknüpfung dieser Gleichung mit (11) liefert:

$$\mathrm{d}U = \int\int\int \sigma_{ik}\frac{\partial\,\mathrm{d}\xi_i}{\partial x_k}\,\mathrm{d}\tau - \mathrm{d}t\int\int \mathfrak{W}_n\,\mathrm{d}\Omega, \qquad (2,14)$$

woraus sich für die zeitliche Änderung von U ergibt

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \int\int\int \left(\sigma_{ik}\,\frac{\mathrm{d}\,\varepsilon_{ik}}{\mathrm{d}t} - \mathrm{div}\,\mathfrak{W}\right)\mathrm{d}\tau. \qquad (2,15)$$

Drückt man schließlich U durch u aus:

$$\mathrm{d}U = \int\int\int \varrho\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\tau, \qquad (2,16)$$

so erhält man die Beziehung

$$\varrho\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \sigma_{ik}\,\frac{\mathrm{d}\,\varepsilon_{ik}}{\mathrm{d}t} - \mathrm{div}\,\mathfrak{W}. \qquad (2,17)$$

Geht man mit diesem Wert in (3) ein und berücksichtigt gleichzeitig Gl. (5), so erhält man für die gesuchte Entropieänderung den einfachen Ausdruck

$$\varrho\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{W} = 0. \qquad (2,18)$$

Auf Grund vektoranalytischer Rechenregeln ist (18) äquivalent mit nachstehender Beziehung:

$$\varrho\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \mathrm{div}\,\frac{\mathfrak{W}}{T} = \mathfrak{W}\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{T} = -\frac{1}{T^2}\,(\mathfrak{W},\,\mathrm{grad}\,T). \qquad (2,19)$$

Integration über den betrachteten Körper führt zu

$$\int\int\int \varrho \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,\tau + \int\int \left(\frac{\mathfrak{W}}{T}\right)_n \mathrm{d}\,\Omega = -\int\int\int \left(\frac{\mathfrak{W}}{T^2}, \operatorname{grad} T\right)\mathrm{d}\,\tau. \qquad (2,20)$$

Geht der thermoelastische Prozeß adiabatisch vor sich, eine Voraussetzung, die bei hinreichend schnellen Schwingungen als erfüllt angesehen werden kann, so verschwindet das Oberflächenintegral in Gl. (20) und es gibt dann die rechte Seite dieser Gleichung die Entropiezunahme pro Zeiteinheit an. Eine solche Deutung ist sinnvoll, denn diese Größe wird nirgends negativ, weil, da Wärme stets von Orten höherer Temperatur zu solchen niedrigerer fließt, der Winkel zwischen $\mathfrak{W}$ und grad T stumpf ist. Von Gl. (20) gelangt man zu dem gesteckten Ziel, wenn man den sogenannten phänomenologischen Ansatz für den Zusammenhang zwischen Wärmestrom und Temperaturgefälle heranzieht. Für homogene anisotrope Medien wird dieser durch die linearen Gleichungen

$$\mathfrak{W}_i = -\sum \varkappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, 3) \qquad (2,21)$$

beschrieben. $\varkappa_{ik}$ sind hierbei die Komponenten des Wärmeleitungstensors. Einsetzen dieser Beziehung in den rechts stehenden Ausdruck von (20) führt zu

$$-\int\int\int \left(\frac{\mathfrak{W}}{T^2}, \operatorname{grad} T\right)\mathrm{d}\,\tau = \int\int\int \left(\frac{1}{T^2}\sum\sum \varkappa_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_k}\right)\mathrm{d}\,\tau > 0, \quad (2,22)$$

welcher Ausdruck immer positiv ist. Aus (20) und (22) kann auf eine lokale Entropieerzeugung[1]) pro Volumen- und Zeiteinheit von der Größe

$$\bar{s} = -\left(\frac{\mathfrak{W}}{T^2}, \operatorname{grad} T\right) = \frac{1}{T^2}\sum\sum \varkappa_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_k} > 0 \qquad (2,23)$$

geschlossen werden, woraus sich unmittelbar als Betrag für die Energiedissipation

$$\bar{E} = -\left(\frac{\mathfrak{W}}{T}, \operatorname{grad} T\right) = \frac{1}{T}\sum_i\sum_k \varkappa_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_k} > 0 \qquad (2,24)$$

ergibt. Für den Fall eines *isotropen* Mediums vereinfacht sich letzterer Ausdruck zu

$$\bar{E} = \frac{k}{T}(\operatorname{grad} T)^2. \qquad (2,25)$$

Die Gl. (24) bzw. (25) enthalten das gesuchte Ergebnis. Ihr physikalischer Inhalt läßt sich in folgenden Satz fassen: Die Energiedissi-

[1]) J. Meixner, Ann. d. Phys. (5) **39**, 333, 1941.

pation bei thermoelastischen Vorgängen hängt nur von dem Gefälle der erzeugten Übertemperatur ab.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß der hier für die Dissipation hergeleitete Ausdruck einen Spezialfall einer allgemeineren Dissipationsfunktion darstellt, die von J. Meixner[1]) anläßlich einer Betrachtung über die Natur irreversibler Prozesse aufgestellt wurde. Danach „scheint die Energiedissipation additiv aus drei Gliedern zusammengesetzt, die auf je einen der irreversiblen Prozesse, nämlich Diffusion, Wärmeleitung und innere Reibung[2]) Bezug haben. Es ist so, als ob jeder dieser Prozesse seinen spezifischen Beitrag zur Energiedissipation gibt . . .". Da im vorliegenden Fall Diffusions- und „Impuls"-Ströme nicht in den Bereich der Betrachtungen einbezogen werden sollen, erscheint hier (nach Voraussetzung) die Energiedissipation als nur von der Wärmeleitung abhängig. Sie ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Meixner, wenn dieses auf den hier behandelten Fall spezialisiert wird.

3. Hilfsmittel aus der Thermodynamik des elastischen Körpers. Versucht man, das zuletzt gefundene Ergebnis (2, 25) anzuwenden, etwa die Berechnung der thermischen Dämpfung für einen vorgegebenen speziellen Schwinger (Stab oder dgl.) im einzelnen durchzuführen, so werden, nachdem man die zur Anwendung von (2, 25) benötigte Temperaturänderung aus der verallgemeinerten Wärmeleitungsgleichung ermittelt hat, die dann entstehenden Rechnungen sehr verwickelt. Die Verhältnisse gestalten sich aber demgegenüber wesentlich einfacher, wenn man zur Berechnung der Dämpfung die in der Einleitung angedeutete Methode benutzt. Um diese in Gleichungen zu fassen, benötigt man einige Hilfsmittel aus der Thermodynamik des elastischen Körpers, die nachstehend zusammengestellt werden sollen.

Wird ein elastischer Körper aus einem spannungslosen Ruhezustand unter Temperaturänderung deformiert, so entsteht in seinem Innern ein Spannungszustand, der sich aus der Überlagerung zweier Tensoren ergibt, von denen der eine, mit den Komponenten σ_l[3]), von den Verzerrungen ε_l allein und in derselben Weise abhängt, als wäre die Deformation isotherm vor sich gegangen (mechanische Spannung), während

[1]) J. Meixner, Ann. d. Phys. (5) 39, 333, 1941. — [2]) Der bei Meixner angeführte Begriff der inneren Reibung ist nicht identisch mit dem in der Einleitung dieser Arbeit gebrauchten, sondern bezieht sich auf Erscheinungen, die mit Impulstransport zusammenhängen. — [3]) $l, k = 1, 2, 3, \ldots, 6$ bzw. $xx, yy, zz, \ldots, xy$.

die Komponenten τ_l des zweiten Tensors nur von der entstehenden Temperaturänderung ϑ abhängen (thermische Spannung). Ebenso wie man die σ_l durch Differentiation einer Funktion $u(\varepsilon_l)$, dem elastischen Potential, gewinnt, kann man die $\tau_l(\vartheta)$, und daher, wegen der additiven Zusammensetzung der mechanischen und thermischen Spannung, auch die gesamte wirkende Spannung bei thermoelastischen Prozessen durch den gleichen Prozeß gewinnen. Dabei ist $u(\varepsilon_l)$ durch eine Funktion zu ersetzen, die man erhält, indem man zu $u(\varepsilon_l)$ einen geeigneten Term $v(\varepsilon_l, \vartheta)$ hinzufügt. Der dann entstehende Ausdruck [nach Voigt[1]) das thermodynamische Potential der thermoelastischen Vorgänge] ist, wie bei Voigt a. a. O. im einzelnen gezeigt wird, eine homogene quadratische Form in ε_l und ϑ:

$$\varphi = \frac{c_\varepsilon \vartheta^2}{2 T_0} + \vartheta \sum_{l=1}^{6} q_l \varepsilon_l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{6} \sum_{m=1}^{6} c_{lm} \varepsilon_l \varepsilon_m. \qquad (3, 1)$$

Der letzte Ausdruck, die Doppelsumme, auf den sich φ für $\vartheta = 0$ reduziert, ist offensichtlich das elastische Potential $u(\varepsilon_l)$ der isothermen Deformation (die c_{lm} also die isothermen Elastizitätskoeffizienten). Die beiden ersten Glieder in (1) stellen demnach die obengenannte Erweiterung $v(\varepsilon_l, \vartheta)$ dar. Die darin auftretenden Größen q_l heißen die Konstanten des thermischen Druckes und werden weiter unten für den Fall der Isotropie berechnet. Die in dem ersten Glied auftretenden Größen bedeuten: c_ε = spezifische Wärme bei konstanten Verzerrungen, T_0 = Temperatur des Körpers im Ausgangszustand.

Es ist bekannt und wird bei Voigt näher begründet, daß man thermoelastische Probleme ebenso behandeln kann wie mechanoelastische, indem man formal in den Gleichungen der Mechanoelastik jede Größe (z. B. die mechanische Spannung σ_l) durch eine entsprechend erweiterte (mechanische und thermische $= \sigma_l + \tau_l$) ersetzt. Wendet man dieses Verfahren insbesondere auf die hier vorliegende Aufgabe an, die elastischen Schwingungen unter Berücksichtigung der dabei entstehenden Temperaturänderung zu behandeln, so müßte man, wenn die Schwingungsgleichung aus dem H.P. hergeleitet wird, darin statt der potentiellen Energie $U = \int u \, d\tau$ die Größe $\Phi = \int \varphi \, d\tau = \int (u + v) \, d\tau$ einführen. Es muß einer besonderen Untersuchung vorbehalten bleiben, zu prüfen, welche Gleichung dann das H.P. liefert. Es wird im nächsten Abschnitt bewiesen werden, daß die so resultierende Schwingungs-

[1]) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, S. 764. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1910.

gleichung ein zusätzliches Glied enthält, das Dämpfungscharakter besitzt und sich daraus, wie es in den folgenden Ausführungen getan wird, ein Maß für die thermische Dämpfung berechnen läßt.

Will man die Herleitung der erweiterten Bewegungsgleichung durch Ersatz von U durch Φ im H.P. vornehmen, so bedarf es, wie Gl. (1) lehrt, zur expliziten Darstellung von φ der Kenntnis von ϑ. Die Orts- und Zeitabhängigkeit dieser Größe läßt sich aus der allgemeinen Wärmeleitungsgleichung

$$\bar{Q} - \operatorname{div} \mathfrak{W} = c\,\varrho\,\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \tag{3,2}$$

bestimmen. $\bar{Q}$ ist hierbei die pro Zeiteinheit durch die Deformation erzeugte Wärmemenge, die sofort angegeben werden kann. Wird nämlich durch die Deformation eine Temperaturerhöhung

$$\mathrm{d}\vartheta = \sum_{l=1}^{6} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \varepsilon_l}\right)_{ad} \cdot \mathrm{d}\,\varepsilon_l \tag{3,3}$$

bewirkt, so ist erforderlich, daß eine Wärmemenge

$$Q = c\,\varrho \sum_{l=1}^{6} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \varepsilon_l}\right)_{ad} \cdot \mathrm{d}\,\varepsilon_l \tag{3,4}$$

erzeugt wurde. Geht man mit diesem Ausdruck in Gl. (2) ein, so erhält man

$$c\,\varrho \sum_{l=1}^{6} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \varepsilon_l}\right)_{ad} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} - \operatorname{div} \mathfrak{W} = c\,\varrho\,\frac{\partial \vartheta}{\partial t}. \tag{3,5}$$

Hierzu kommt noch die von der erzeugten Wärme offenbar nicht beeinflußte Gl. (2, 21), sowie die zur eindeutigen Lösung der Differentialgleichung (5) notwendige Randbedingung, die sich aus der Forderung, daß der Wärmestrom nur im Innern des Körpers fließt, dieser also adiabatisch isoliert sei, zu

$$(\operatorname{grad} \vartheta)_{Oberfl.} = 0 \tag{3,6}$$

ergibt. —

Vorstehende, für ein beliebiges anisotropes Medium geltenden Formeln vereinfachen sich zum Teil weitgehend, wenn man sie auf einen isotropen Körper anwendet. Das elastische Potential u drückt sich dann bekanntlich[1]) aus durch

$$u_{iso}(\varepsilon_l) = G\left\{\frac{1-\mu}{1-2\mu}\,\theta^2 - 2\,(\varepsilon_{xx}\,\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}\,\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}\,\varepsilon_{zz}) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\,(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2)\right\}^{2}), \tag{3,7}$$

[1]) Vgl. etwa G. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik, S. 152. Leipzig, Akad. Verlagsb., 1934. — [2]) G = Gleitmodul, μ = Poissonsche Konstante.

wobei $\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ die Volumendilatation ist. Ferner muß beim isotropen Körper $\sum q_l \varepsilon_l$ dehnungsinvariant sein, so daß sich dieser Ausdruck auf θ reduziert, da $\theta = \operatorname{div} \mathfrak{x}$ ($\mathfrak{x}$ = Verschiebungsvektor) die einzige lineare Invariante des Dehnungstensors ist[1]). Damit nimmt φ nach (1) die Form

$$\varphi = \frac{c_\varepsilon \vartheta^2}{2 T_0} + \vartheta q \theta + u_{iso}(\varepsilon_l) \qquad (3, 8)$$

an. Um die Konstante q zu bestimmen, werde ein Volumenelement betrachtet, das sich unter der gleichzeitigen Einwirkung einer mechanischen Kraft und von Wärme ausdehnen möge. Die Gesamtausdehnung in der x_i-Richtung sei $\mathrm{d}\bar{\xi}_i$ und setzt sich (vgl. Fig. 1) aus einem mechanischen und einem thermischen Anteil $\mathrm{d}\xi_i^m$ bzw. $\mathrm{d}\xi_i^{therm}$ zusammen. Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{\xi}_i &= \mathrm{d}\xi_i^m + \mathrm{d}\xi_i^{th} \\ &= \varepsilon_i \mathrm{d}x_i + \alpha \vartheta \, \mathrm{d}x_i , \end{aligned} \qquad (3, 9)$$

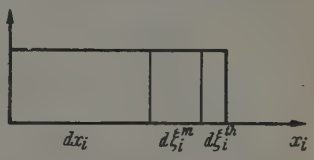


Fig. 1. Zur Ableitung der thermischen Spannung.

woraus folgt:

$$\frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial x_i} = \bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_i + \alpha \vartheta . \qquad (3, 10)$$

Setzt man diesen Wert in σ_i für das darin auftretende ε_i ein, so muß nach dem eingangs Gesagten $\sigma_i \to \sigma_i + \tau_i$ übergehen. Man erhält dafür

$$\begin{aligned} \sigma_i + \tau_i = \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_i}\right)_{\varepsilon_i = \bar{\varepsilon}_i} &= 2G\left\{\bar{\varepsilon}_i + \frac{\mu \bar{\theta}}{1-2\mu}\right\} \\ &= 2G\left\{\varepsilon_i + \frac{\mu \theta}{1-2\mu}\right\} + 2G\alpha\vartheta\left(1 + \frac{3\mu}{1-2\mu}\right). \end{aligned} \qquad (3, 11)$$

Andererseits erhält man $\sigma_i + \tau_i$ ebenfalls durch Differentiation von φ nach ε_i:

$$\sigma_i + \tau_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_i} = \vartheta q + 2G\left\{\varepsilon_i + \frac{\mu \theta}{1-2\mu}\right\}. \qquad (3, 12)$$

Der Vergleich von (11) und (12) ergibt für die gesuchte Größe:

$$q = 2G\alpha \frac{1+\mu}{1-2\mu} = \frac{E\alpha}{1-2\mu}. \qquad (3, 13)$$

Damit wird v für den isotropen Körper:

$$v = \frac{c_\varepsilon \vartheta^2}{2 T_0} + \frac{E\alpha\theta}{1-2\mu}\vartheta. \qquad (3, 14)$$

φ erhält man durch Addition von u und v [Gl. (7) und (14)].

[1]) Vgl. etwa A. Timpe u. A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizitätstheorie, S. 52. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1907.

Eine weitere Vereinfachung tritt im Fall der Isotropie noch bei der Wärmeleitungsgleichung insofern auf, als der Tensor $K(\varkappa_{ik})$ in einen Skalar $\varkappa$ übergeht und daher Gl. (5) in Verbindung mit (2, 21) bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems die Form

$$\sum_{l=1}^{6}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\varepsilon_l}\right)_{ad}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\eta\,\mathrm{div\,grad}\,\vartheta=\frac{\partial\vartheta}{\partial t} \tag{3, 15}$$

($\eta=\frac{\varkappa}{c\varrho}$ = Temperaturleitvermögen) annimmt. Diese Wärmeleitungsgleichung unterscheidet sich von der schlechthin als solche genannten durch das Auftreten des Σ-Gliedes, das den Einfluß der Form- und Spannungsänderung erfaßt.

4. Herleitung der Bewegungsgleichung elastischer Schwinger mit Berücksichtigung der thermischen Dämpfung. Mit dem im vorigen Abschnitt entwickelten Hilfsmitteln ist es möglich, die in der Einleitung umrissene Aufgabe zu lösen. Danach wird die Berechnung der thermischen Dämpfung im wesentlichen auf die Herleitung einer erweiterten Bewegungsgleichung des Schwingers zurückgeführt, die aus dem H.P. gewonnen wird, indem dort statt der potentiellen Energie U mit dem Wert Φ eingegangen wird. Die in diesem auftretende, noch unbekannte Übertemperatur ϑ wird aus der erweiterten Wärmeleitungsgleichung gewonnen. Es liegen demnach folgende Ausgangsgleichungen vor:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(L-\Phi)\,dt=0, \tag{4, 1}$$

$$\Phi=\int\int\int\left\{\frac{c_\varepsilon\vartheta^2}{2T_0}+\frac{E\alpha\vartheta}{1-2\mu}\theta+u(\varepsilon_l)\right\}\mathrm{d}\tau, \tag{4, 2}$$

$$\sum_{l=1}^{6}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\varepsilon_l}\right)_{ad}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\eta\,\mathrm{div\,grad}\,\vartheta=\frac{\partial\vartheta}{\partial t} \tag{4, 3}$$

und es bleibt nun zu beweisen, daß die Elimination von Φ und ϑ aus diesen Gleichungen zu einer Bewegungsgleichung für den betrachteten Schwinger führt, die sich von der üblichen, aus der Mechanik bekannten durch ein zusätzliches Dämpfungsglied unterscheidet.

Um den Beweis zu erbringen, werde daran angeknüpft, daß für den Sonderfall $\vartheta=0$ aus (1) und (2) nach den Methoden der Variationsrechnung die bekannte Hauptgleichung der Elastizität

$$\varrho\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}=\varrho\,\mathfrak{F}+G\left\{\Delta\,\mathfrak{x}+\frac{1}{1-2\mu}\,\mathrm{grad\,div}\,\mathfrak{x}\right\} \tag{4, 4}$$

resultiert. Eine vollkommen analoge Rechnung führt für $\vartheta \neq 0$ zu einem entsprechend erweiterten Ausdruck, der Hauptgleichung der Thermoelastizität[1])

$$\varrho \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2} = \varrho \mathfrak{F} + G \left\{ \Delta \mathfrak{x} + \frac{1}{1-2\mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{x} - 2\alpha \frac{1+\mu}{1-2\mu} \operatorname{grad} \vartheta \right\}. \quad (4,5)$$

Damit ist aus dem System der Ausgangsgleichungen Φ bereits eliminiert. Gl. (5) unterscheidet sich von (4) durch das Auftreten eines die noch unbekannte Übertemperatur ϑ enthaltenden Gliedes, deren Orts- und Zeitabhängigkeit nach (3) zu bestimmen ist. Diese Gleichung ist daher zu integrieren.

Die darin auftretenden Größen $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \varepsilon_l}\right)_{ad}$ sind Konstanten[2])

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \varepsilon_l}\right)_{ad} = -\frac{T_0}{c_v} q_l, \quad (4,5\,a)$$

die mit p_l bezeichnet werden mögen. Die Verzerrungen ε_l sind Funktionen der Differentialquotienten des Verschiebungsvektors $\mathfrak{x}$, so daß man setzen kann:

$$\sum_{l=1}^{6} p_l \varepsilon_l = w\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}, \ldots\right). \quad (4,6)$$

Da $\mathfrak{x}$ — insbesondere bei Schwingungsvorgängen — als Produkt einer Orts- und Zeitfunktion dargestellt werden kann, gilt dies auch für w. Es werde also gesetzt

$$w\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}, \ldots\right) = f(x, y, z) \cdot \psi(t). \quad (4,7)$$

Damit kann Gl. (3) geschrieben werden

$$\eta \Delta \vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - f(x, y, z) \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}. \quad (4,8)$$

Da diese Beziehung als „gestörte" Wärmeleitungsgleichung angesehen werden kann, liegt es nahe, zu ihrer Integration die Methoden der Störungstheorie anzuwenden. Danach hat man zunächst das homogene Problem

$$\eta \Delta \bar{\vartheta} = \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} \quad (4,9)$$

zu lösen. Der Produktansatz

$$\bar{\vartheta} = \zeta(t) \cdot \vartheta^0(x, y, z) \quad (4,10)$$

---

[1]) Bei Ausführung der Rechnung darf ϑ nicht variiert werden, sondern ist als Konstante zu behandeln. — [2]) W. Voigt, a. a. O. Folgt u. a. durch Vergleich von Gl. (545) auf S. 791 mit Gl. (3, 5) dieser Arbeit.

führt in bekannter Weise zu den beiden Gleichungen

$$\Delta \vartheta^0 + \lambda_n \vartheta^0 = 0, \qquad (4, 11)$$

$$\frac{\mathrm{d}\zeta(t)}{\mathrm{d}t} + \eta \lambda_n \zeta(t) = 0 \qquad (4, 12)$$

(λ_n = Eigenwerte). Die Lösungen von Gl. (11) sind die durch die Randbedingungen (3, 6) festgelegten Eigenfunktionen ϑ_n^0. Der Index n bezieht sich hierbei auf den jeweiligen Eigenwert λ_n. Nun hat man den ortsabhängigen Teil $f(x, y, z)$ der Störungsfunktion nach den Eigenfunktionen ϑ_n^0 zu entwickeln:

$$f(x, y, z) = \sum c_n \vartheta_n^0. \qquad (4, 13)$$

Die Koeffizienten c_n dieser Entwicklung sind — Normierung von ϑ_n^0 vorausgesetzt — durch

$$c_n = \int\int\int f(x, y, z)\, \vartheta_n^0(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \qquad (4, 14)$$

gegeben. Als Lösung von Gl. (8) wird nun die Reihe

$$\vartheta = \sum \chi_n(t)\, \vartheta_n^0 \qquad (4, 15)$$

angesetzt. Geht man mit diesem Ausdruck in (8) ein, so erhält man in bekannter Weise unter Berücksichtigung von Gl. (11) und Verwendung der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenfunktionen eine Differentialgleichung für $\chi_n(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}\chi_n}{\mathrm{d}t} + \lambda_n \eta \chi_n = c_n \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}. \qquad (4, 16)$$

Die Funktion $\chi_n(t)$ stellt physikalisch den zeitlichen Verlauf der durch die Deformation bedingten Übertemperatur ϑ dar. Da jene bei elastischen Schwingungen periodisch verläuft, kann auch bei $\chi_n(t)$ Periodizität angenommen werden, so daß für $\chi_n(t)$ angesetzt werden kann:

$$\chi_n(t) = \beta_n e^{j\omega t} \ldots \qquad j = \sqrt{-1}. \qquad (4, 17)$$

Die Koeffizienten β_n berechnen sich aus (16) zu:

$$\beta_n = \frac{c_n e^{-j\omega t}}{j\omega + \eta \lambda_n} \cdot \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}, \qquad (4, 18)$$

so daß man, aus (15) und (17) folgend,

$$\vartheta = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \sum \frac{c_n \vartheta_n^0}{j\omega + \eta \lambda_n} \qquad (4, 19)$$

erhält. Damit ist die gesuchte Übertemperatur bestimmt. Der Summenausdruck ist eine Funktion von x, y, z, der etwa durch das Symbol $f_1(x, y, z)$ dargestellt werde. Damit kann ϑ in der Form

$$\vartheta = f_1(x, y, z) \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \qquad (4, 20)$$

geschrieben werden. In Gl. (5), in die mit diesem Wert einzugehen ist, tritt der Ausdruck $-2G\alpha\frac{1+\mu}{1-2\mu}\operatorname{grad}\vartheta$ auf. Sei der $-2G\alpha\frac{1+\mu}{1-2\mu}$-fache Gradient von f_1 die Funktion $f_2(x, y, z)$, so kann man schreiben:

$$-2G\alpha\frac{1+\mu}{1-2\mu}\operatorname{grad}\vartheta = f_2(x, y, z)\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}F_2(x, y, z, t) \quad (4, 21)$$

und erhält als Resultat der Elimination von ϑ aus (5) nach Einführung des Differentialoperators D

$$D = G\left\{\operatorname{div}\operatorname{grad} + \frac{1}{1-2\mu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\right\} \quad (4, 22)$$

als erweiterte Gleichung

$$\varrho\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2} = \varrho\mathfrak{Y} + D(\mathfrak{x}) + \frac{\partial}{\partial t}F_2(x, y, z, t), \quad (4, 23)$$

während sich (4) unter Verwendung von (22) schreibt

$$\varrho\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2} = \varrho\mathfrak{Y} + D(\mathfrak{x}). \quad (4, 24)$$

Der Vergleich zeigt, daß sich die erweiterte Bewegungsgleichung von (24) durch ein Dämpfungsglied unterscheidet, w. z. b. w.

Man kann also, die bisher gefundenen Ergebnisse zusammenfassend, sagen: Bestimmt man die Bewegungsgleichung eines elastischen Schwingers nach dem H.P., geht in dieses jedoch statt mit der potentiellen Energie U mit demjenigen Wert Φ ein, der sich (durch Integration) aus einer Erweiterung des Ausdruckes für das elastische Potential ergibt, so erhält man für den betreffenden Schwinger eine Bewegungsgleichung, in der ein „$\partial/\partial t$-Ausdruck", also ein Dämpfungsglied, auftritt, das im wesentlichen von der mit der Schwingung verbundenen, durch den thermoelastischen Effekt hervorgerufenen Übertemperatur abhängt. Wegen des Auftretens des Dämpfungsgliedes ist die Möglichkeit der Berechnung eines ln-Dekrementes gegeben, das als Maß für die durch Wärmeleitung bedingte Dämpfung definiert werden kann.

Beispiele. Berechnung der thermischen Dämpfung für spezielle Schwinger.

Vorbemerkung. In den nachstehenden Beispielen ist ein großer Teil der (keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bereitenden) Zwischenrechnungen unterdrückt worden. In Fällen, wo es angebracht erschien, eine Ableitung des betreffenden Ausdrucks zu bringen, ist diese im Anhang, Abschnitt 9, stichwortartig angedeutet worden.

5. Transversal schwingender isotroper Stab. Als Anwendung der vorstehend entwickelten Theorie möge zunächst die Berechnung der thermischen Dämpfung in einem schwingenden Stab durchgeführt werden. Die Bezeichnung der Dimensionen des Stabes sowie seine Lage in bezug auf ein Koordinatensystem sind aus Fig. 2 ersichtlich. Der als homogen und isotrop vorausgesetzte Stab führe, an der Stelle $x = 0$ eingespannt, Transversalschwingungen parallel zur z-Achse aus. Nach den allgemeinen Erörterungen sind zunächst die Größen u und v zu bestimmen, zu addieren und die so gefundene Summe über den Stab zu integrieren. Das Ergebnis stellt dann Φ dar. Die diesbezügliche Rechnung liefert hierfür den Ausdruck[1]).

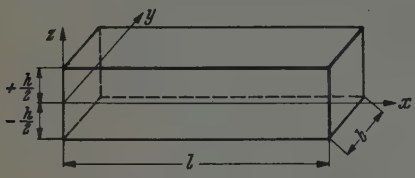


Fig. 2. Zur Berechnung der thermischen Dämpfung in einem schwingenden Stab.

$$\Phi = \frac{E}{2}\int_0^l\int_0^b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2\left(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$- E\alpha\int_0^l\int_0^b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \vartheta z\,\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \int r_0\,\mathrm{d}\tau \qquad (5,1)$$

$$= \frac{EJ}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_0^l D_1\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^l D_2\,\mathrm{d}x. \qquad (5,2)$$

Hierbei ist J das Flächenträgheitsmoment und D_1 eine Abkürzung für das Integral

$$D_1 = -E\alpha\int_0^b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \vartheta z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \qquad (5,3)$$

---

[1]) Die Berechnung von u findet man z. B. bei Cl. Schaefer, Theor. Phys. 1, 563. In gleicher Weise wie dort ist v zu berechnen. Integriert man die Summe $u + v$ über den Stab, so führt dies zu Gl. (1). Für den darin auftretenden, im Verlauf der weiteren Rechnung herausfallenden Ausdruck $c_s\,\vartheta^2/2\,T_0$ [s. Gl. (4, 2)] wurde dabei die Abkürzung r_0 eingeführt.

Entsprechend ist D_2 definiert. Da die kinetische Energie des Stabes

$$L = \frac{\varrho}{2} \int_0^l \int_0^b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\varrho\, b\, h}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x \qquad (5,4)$$

ist, nimmt demnach das H.P. die Form

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_0^l \left\{ \frac{\varrho\, b\, h}{2} \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial t}\right)^2 - \frac{EJ}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2}\right)^2 - D_1 \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2} - D_2 \right\} \mathrm{d}x = 0 \qquad (5,5)$$

an, woraus man als zugehörige Eulersche Gleichung[1])

$$\varrho\, b\, h \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 \xi_3}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 D_1}{\partial x^2} = 0 \qquad (5,6)$$

erhält. Hierin ist D_1 das durch Gl. (3) definierte Integral, das, um ausgewertet werden zu können, die Kenntnis von $\vartheta(z,t)$ verlangt. Diese ergibt sich aus der allgemeinen Wärmeleitungsgleichung und lautet im vorliegenden Falle, da der Wärmestrom in Richtung der z-Achse fließt (vgl. Fig. 3) und die ε_l sich durch ε_{xx} ausdrücken lassen:

Fig. 3. Thermoelastischer Effekt in einem gebogenen Stab.

$$p \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t}, \qquad (5,7)$$

wie aus Gl. (3, 15) unmittelbar folgt. p ist dabei eine Abkürzung für $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \varepsilon_{xx}}\right)_{a\,d}$. Setzt man noch für ε_{xx} seinen Wert[2]) ein, so erhält man die zur Bestimmung von ϑ geltende Differentialgleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - p z \frac{\partial^3 \xi_3}{\partial^2 \partial t}. \qquad (5,8)$$

Hierzu kommt als Randbedingung

$$(\mathrm{grad}\,\vartheta)_{Oberfl.} = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z=\pm\frac{h}{2}} = 0. \qquad (5,9)$$

Das dieser Bedingung genügende Integral von Gl. (8) lautet[3])

$$\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} - \frac{p c_n k}{j\omega + \eta (2n+1)^2 \cdot \frac{\pi^2}{h^2}} \sin (2n+1) \frac{\pi z}{h} \cdot \frac{\partial^3 \xi_3}{\partial x^2 \partial t}. \qquad (5,10)$$

---

[1]) Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd. 1. Berlin, Springer, 1929. — [2]) Cl. Schaefer, l. c. — [3]) Vgl. Anhang I.

Damit ergibt sich für D_1 gemäß Gl. (3)

$$D_1 = -E\alpha \int_0^b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p c_n k z}{j\omega + \eta (2n+1)^2 \cdot \frac{\pi^2}{h^2}} \sin(2n+1)\frac{\pi z}{h} \cdot \frac{\partial^3 \xi_3}{\partial x^2 \partial t} \mathrm{d}y \mathrm{d}z \quad (5,11)$$

$$= -E\alpha b p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^2}{j\omega + \eta (2n+1)^2 \cdot \frac{\pi^2}{h^2}} \cdot \frac{\partial^3 \xi_3}{\partial x^2 \partial t} = C \cdot \frac{\partial^3 \xi_3}{\partial x^2 \partial t} \cdot \quad (5,12)$$

Dieser Ausdruck folgt aus (11) wegen der Gültigkeit der Gl. (9, 2). Geht man mit D_1 in (6) ein, so erhält man schließlich als erweiterte, die thermische Dämpfung erfassende Differentialgleichung der Schwingung:

$$\varrho b h \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial t^2} + E J \frac{\partial^4 \xi_3}{\partial x^4} + C \frac{\partial^5 \xi_3}{\partial x^4 \partial t} = 0. \quad (5,13)$$

Sie unterscheidet sich von der bekannten Schwingungsgleichung des Stabes durch das zusätzliche „$\partial/\partial t$-Glied", dessen Charakter als Dämpfungsglied zutage tritt, wenn man, um zur Berechnung der thermischen Dämpfung zu schreiten, für $\xi_3(x,t)$ den Produktansatz

$$\xi_3(x,t) = \Psi(x) \cdot T(t) \quad (5,14)$$

macht. Dieser führt Gl. (13) nach einiger Umformung in

$$\frac{1}{\Psi(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}^4 \Psi}{\mathrm{d}x^4} \left[EJ + \frac{C}{T(t)} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{\varrho b h}{T(t)} \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} \right] = 0 \quad (5,15)$$

über, woraus nach einem bekannten Schlußverfahren die Existenz der beiden nachstehenden Gleichungen folgt:

$$\frac{\mathrm{d}^4 \Psi}{\mathrm{d}x^4} - m^2 \Psi(x) = 0 \quad (5,16)$$

$$\varrho b h \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} + C m^2 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + m^2 E J T(t) = 0 \quad (5,17)$$

$m^2 =$ Konstante.

Diese sind aus der elementaren Theorie des schwingenden Stabes bekannt. Ihnen genügen die Orts- und Zeitfunktionen $\Psi(x)$ bzw. $T(t)$. Während jedoch (16) mit der entsprechenden Gleichung der elementaren Theorie identisch ist, beschreibt (17) eine *gedämpfte* harmonische Schwingung, unterscheidet sich also von der ihr in der elementaren Theorie entsprechenden Gleichung durch das Dämpfungsglied $Cm^2 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$, in Übereinstimmung mit der oben entwickelten Theorie, die das Auftreten eines Dämpfungsgliedes verlangt. Da dieses durch C bestimmt wird, beschreibt es, der physikalischen Bedeutung dieser Größe wegen,

die thermische Dämpfung, die, sofern als Maß für sie das ln-Dekrement $\mathfrak{d}$ eingeführt wird, durch Gl. (17) quantitativ festgelegt ist. Bei der Berechnung von $\mathfrak{d}$ ist zu berücksichtigen, daß C komplex ist. Die Beachtung dieser Tatsache führt nach etwas langwieriger, aber keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bietenden und daher hier unterdrückten Rechnung zu folgendem Ausdruck für das Dekrement[1]):

$$\mathfrak{d} = \frac{\pi\,\omega}{E\,J}\,\Re\,(C) = \alpha\,b\,\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta\,\frac{\pi^2}{h^2}\,(2n+1)^2\,\omega}{\omega^2 + \eta^2\,(2n+1)^4 \cdot \frac{\pi^4}{h^4}} \cdot \frac{12\,c_n^2}{h^3}\,. \qquad (5,18)$$

Diese Gleichung gilt streng. Sie stellt das gesuchte Ergebnis dar, ist aber wegen ihrer Summenform verhältnismäßig unübersichtlich. Sie läßt sich aber sehr gut durch ihr erstes Glied approximieren, denn es ist nach Gl. (9, 2)

$$\frac{12\,c_n^2}{h^3} = \frac{96}{\pi^4\,(2n+1)^4} \quad \begin{matrix} \approx 1 \\ \leqq 0{,}1 \end{matrix} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} n = 0 \\ n \geqq 1. \end{matrix} \qquad (5,19)$$

Da außerdem die Beziehung[2])

$$\alpha\,p = \frac{1}{3}\,(1-2\,\mu)\,(\gamma-1)\,\ldots \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \qquad (5,20)$$

gilt, geht (18) schließlich in die vereinfachte Form

$$\mathfrak{d} = \frac{\pi}{3}\,(1-2\,\mu)\,(\gamma-1)\,\frac{\eta\,\frac{\pi^2}{h^2}\cdot\omega}{\omega^2 + \eta^2 \cdot \frac{\pi^4}{h^4}} \qquad (5,21)$$

über. Damit ist die thermische Dämpfung für den speziellen Fall eines schwingenden Stabes als Funktion der Daten des Schwingers und der Frequenz ausgedrückt. Das Ergebnis (21) stimmt mit dem Zenerschen Resultat Q^{-1} bis auf den (durch die verschiedenen Definitionen von Q und $\mathfrak{d}$ bedingten) Faktor π überein. Desgleichen läßt sich (21) auch auf die von Bennewitz-Rötger abgeleitete Cosec-Form bringen, wie durch Division durch den Zähler von (21) sofort erkenntlich wird. Eine Diskussion des obigen Resultats kann hier unterbleiben, da sich eine solche in den Arbeiten von Zener bzw. bei Bennewitz-Rötger findet.

Bemerkung. Statt eines isotropen Stabes kann auch ein solcher mit kristalliner Struktur der Betrachtung zugrunde gelegt werden. Es war auch geplant, ein derartiges Beispiel durchzurechnen und hier zu behandeln, jedoch waren die diesbezüglichen Rechnungen noch nicht abgeschlossen, als äußere Gründe zur vorzeitigen Abfassung dieser Arbeit zwangen.

[1]) $\Re\,(C)$ ist die übliche Abkürzung für den Realteil der komplexen Zahl C. — [2]) Vgl. Cl. Zener, Phys. Rev. **52**, 230, 1937.

6. Schwingende ebene Platte. Als zweites Beispiel möge die thermische Dämpfung in einer schwingenden Platte berechnet werden. Ihre Lage in bezug auf ein Koordinatensystem sei ähnlich wie beim Stab (vgl. Fig. 4). Die Rechnung verläuft analog der im Abschnitt 5 durchgeführten. Es sind zunächst, um mit Hilfe des H.P. die Schwingungsgleichung zu erhalten, die Ausdrücke für L und Φ zu ermitteln. Die kinetische Energie ist im vorliegenden Fall:

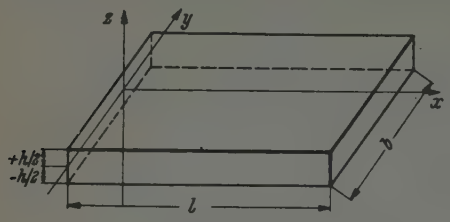


Fig. 4. Zur Berechnung der thermischen Dämpfung in einer Platte.

$$L = \frac{\varrho}{2}\int_0^l\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{+\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\varrho h}{2}\int_0^l\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad (6,1)$$

Für Φ ergibt sich aus den Gleichungen (3, 7) und (3, 14) nach einiger Rechnung[1])

$$\Phi = \frac{E h^3}{24(1-\mu^2)}\int_0^l\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\Big\{\Big(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial y^2}\Big)^2 - 2(1-\mu)\Big[\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial y^2}-\Big(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x\,\partial y}\Big)^2\Big]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big\}$$
$$+\int_0^l\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} D_1\Big(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial y^2}\Big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_0^l\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} r_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad (6,2)$$

mit

$$D_1 = \frac{-E\alpha}{1-\mu}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z\vartheta\,\mathrm{d}z. \quad (6,3)$$

[1]) Vgl. Anhang II.

Setzt man die Ausdrücke L und Φ in das H.P. ein, so erhält man nach den Methoden der Variationsrechnung als zugehörige Eulersche Gleichung

$$\varrho h \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial t^2} + \frac{E h^3}{24 (1-\mu^2)} \Delta \Delta \xi_3 + \left(\frac{\partial^2 D_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_1}{\partial y^2} \right) = 0. \qquad (6, 4)$$

Dabei bedeutet das Symbol $\Delta \Delta \xi_3$ die Vorschrift, den Laplaceschen Operator zweimal auf die Funktion ξ_3 anzuwenden:

$$\Delta \Delta \xi_3 = \frac{\partial^4 \xi_3}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \xi_3}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \xi_3}{\partial y^4}. \qquad (6, 5)$$

Um von Gl. (4) zur erweiterten Schwingungsgleichung zu gelangen, ist die Kenntnis von D_1 oder nach Gl. (3) die von ϑ erforderlich, wozu wieder die Integration der Wärmeleitungsgleichung notwendig ist. Diese ergibt sich durch Spezialisierung von Gl. (3, 15) auf den vorliegenden Fall zu

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - z p \left(\frac{\partial^3 \xi_3}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 \xi_3}{\partial y^2 \partial t} \right). \qquad (6, 6)$$

Hierbei wurde in erster Näherung angenommen, daß der Wärmestrom, ähnlich wie beim schwingenden Stabe, nur in der Richtung der z-Achse fließt[1]). Die Größen p in Gl. (6) sind eine Abkürzung für

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \varepsilon_{xx}} \right)_{ad} = p_{xx} = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \varepsilon_{yy}} \right)_{ad} = p_{yy} = p. \qquad (6, 7)$$

Diese Gleichheit folgt aus (4, 5a) in Verbindung mit (3, 13) oder (9, 11). Die zu (6) gehörige Randbedingung lautet wiederum

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0. \qquad (6, 8)$$

Das (ebenso wie oben zu bestimmende) Integral der Gl. (6) lautet:

$$\vartheta = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p c_n k}{j\omega + \eta (2n+1)^2 \cdot \frac{\pi^2}{h^2}} \sin (2n+1) \frac{\pi z}{h} \left(\frac{\partial^3 \xi_3}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 \xi_3}{\partial y^2 \partial t} \right), \qquad (6, 9)$$

womit nach Gl. (3) für D_1 folgt:

$$D_1 = \frac{E \alpha p}{1-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^2}{j\omega + \eta (2n+1)^2 \cdot \frac{\pi^2}{h^2}} \left(\frac{\partial^3 \xi_3}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 \xi_3}{\partial y^2 \partial t} \right)$$

$$= C \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial y^2} \right). \qquad (6, 10)$$

[1]) Wegen der Einbeziehung der seitlichen Wärmeströmung in die Rechnung vgl. die Bemerkung am Schluß dieses Abschnitts.

Einsetzen dieses Wertes in Gl. (4) führt zu der erweiterten Bewegungsgleichung der schwingenden Platte:

$$\varrho h \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial t^2} + \frac{E h^3}{12 (1 - \mu^2)} \Delta \Delta \xi_3 + C \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \Delta \xi_3) = 0. \qquad (6, 11)$$

Für $C = 0$ erhält man hieraus die bekannte Differentialgleichung der Plattenschwingung bei elementarer Behandlung. Das zusätzliche auftretende „$\partial/\partial t$-Glied" erfaßt wiederum die thermische Dämpfung. Zu ihrer Berechnung gelangt man abermals durch den Produktansatz

$$\xi_3(x, y, t) = T(t) \cdot \Psi(x, y), \qquad (6, 12)$$

welcher (11) in die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Delta \Delta \Psi - m^2 \Psi &= 0 \qquad (6, 13) \\ \varrho b \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d} t^2} + m^2 C \frac{\mathrm{d} T}{\mathrm{d} t} + \frac{E h^3 m^2}{12 (1 - \mu^2)} T(t) &= 0 \qquad (6, 14) \end{aligned}\right\} m^2 = \text{Konstante}$$

zerfallen läßt. Aus (13) läßt sich analog wie oben unschwer das ln-Dekrement berechnen, das bei Durchführung derselben wie in Abschnitt 5 benutzten Näherung [Gl. (5, 19)] und Beachtung der Beziehung (5, 20) den Ausdruck

$$\mathfrak{d} = \frac{\pi}{3} (1 - 2\mu)(\gamma - 1)(1 + \mu) \frac{\omega \eta \frac{\pi^2}{h^2}}{\omega^2 + \eta^2 \frac{\pi^4}{h^4}} \qquad (6, 15)$$

annimmt.

Bemerkung. Das als Ausdruck für die thermische Dämpfung hergeleitete Ergebnis (15) ist insofern nicht ebenso streng wie das entsprechende Resultat (5, 21) für den schwingenden Stab, als beim Aufstellen der Wärmeleitungsgleichung für die Platte der Wärmestrom als nur in Richtung der z-Achse fließend angenommen wurde. In Wirklichkeit wird ein gewisser, wenn auch sehr kleiner Betrag sich auch seitlich ausbreiten, so daß in die Wärmeleitungsgleichung noch die Ableitungen von ϑ nach y aufgenommen werden müßten. Auf die Funktion ϑ wäre also der zweidimensionale Laplacesche Operator auszuüben. Geht man von einer derartigen Wärmeleitungsgleichung aus, so zeigt sich beim Versuch, diese zu integrieren, eine eigentümliche Schwierigkeit: Entsprechend dem *zweidimensionalen* Problem sind die Eigenfunktionen von y und z abhängig. Man hat demnach die Störungsfunktion, s. Gl. (6), in eine doppelte Fourier-Reihe zu entwickeln, deren Koeffizienten das Doppelintegral über das Produkt aus Eigenfunktion und Störungsfunktion sind. In letzterer tritt aber u. a. die Funktion $\xi_3(x, y, z)$ auf, deren explizite Abhängigkeit von y nicht bekannt ist. Indes wird sie zur Durchführung der Integration benötigt. Eine Berechnung der Entwicklungskoeffizienten ist also in diesem Falle nicht möglich, das Problem daher bei Ansatz einer zweidimensionalen Wärmeleitungsgleichung nicht lösbar. Spricht man jedoch dem Wärmestrom nur die Abhängigkeit von *einer* Richtung zu, die naturgemäß parallel zur Bewegungsrichtung verläuft, so kann die Dämpfung mit den hier entwickelten Methoden berechnet werden, wie es durchgeführt wurde.

7. Radial schwingende Kugel. Als drittes Beispiel möge die Berechnung der thermischen Dämpfung in einer radial schwingenden Kugel durchgeführt werden. Führt man Polarkoordinaten ein (vgl. Fig. 5), so wird $\mathfrak{x}$, da $\xi_\lambda = \xi_\psi = 0$ ist, identisch mit ξ_r (bei welcher Komponente der Einfachheit halber der Index fortgelassen werden möge) und es drücken sich Φ[1]) und L durch ξ wie folgt aus:

$$\Phi = \frac{2\pi E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \int_0^R \left\{(1-\mu)\, r^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)^2 + 4\mu\, \xi r \frac{\partial \xi}{\partial r} + 2\xi^2\right\} \mathrm{d}r +$$

$$+ \frac{4\pi E\alpha}{1-2\mu} \int_0^R \vartheta \left(r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} + 2r\xi\right) \mathrm{d}r + 4\pi R^2 \int_0^R r_0\, \mathrm{d}r. \qquad (7,1)$$

$$L = \frac{\varrho}{2} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 r^2 \sin\psi\, \mathrm{d}\psi\, \mathrm{d}\lambda = 2\pi\varrho \int_0^R r^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}r. \qquad (7,2)$$

Geht man mit diesen Werten in die das H.P. ausdrückende Formel ein, so liefert die Variation die Gleichung

$$\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial \xi}{\partial r} + 2\frac{\xi}{r}\right] + \frac{E\alpha}{1-2\mu} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \qquad (7,3)$$

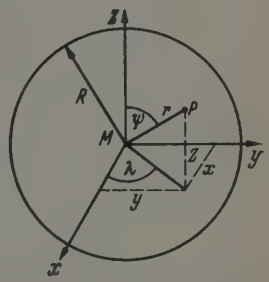


Fig. 5. Zur Berechnung der thermischen Dämpfung in einer Kugel.

Um die hierin auftretende Übertemperatur ϑ auszurechnen, ist wiederum die Wärmeleitungsgleichung heranzuziehen. Da ϑ nur von r abhängt, lautet diese

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \eta\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + 2\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right) + \sum \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \varepsilon_l}\right)_{ad} \cdot \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t}$$

$$= \eta\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + 2\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right) + p \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + 2\frac{\xi}{r}\right). \qquad (7,4)$$

Hierbei ist p als Abkürzung für $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \varepsilon_r}\right)_{ad} = -\frac{T}{c_\varepsilon} q_r$ eingeführt. Die zu (4) gehörige Randbedingung lautet:

$$(\mathrm{grad}\,\vartheta)_{Oberfl.} = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)_{r=R} = 0 \qquad (7,5)$$

Es liegen also die simultanen Differentialgleichungen (3) und (4) vor und man hat zu versuchen, um die thermische Dämpfung wie oben

[1]) Vgl. Anhang III.

berechnen zu können, aus ihnen ϑ zu eliminieren. Dies gelingt vermöge der Ansätze

$$\vartheta = f(r)\, g(t), \tag{7,6}$$

$$\xi = F(r) G(t). \tag{7,7}$$

Geht man mit ihnen in Gl. (4) ein, so zerfällt diese in zwei für sich bestehende Gleichungen, von denen die eine, wenn man wieder auf ξ und ϑ zurückgeht, die Form

$$p \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + 2\frac{\xi}{r}\right) = a\vartheta \tag{7,8}$$

besitzt. a ist hierbei eine vorläufig noch unbekannte Konstante. Setzt man den somit ermittelten Wert von ϑ in Gl. (3) ein, so erhält man als Bewegungsgleichung der gedämpft schwingenden Kugel:

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + 2\frac{\xi}{r}\right) + \frac{Bp}{a} + \frac{\partial^2}{\partial r\, \partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + 2\frac{\xi}{r}\right) \cdots \begin{cases} A = \dfrac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \\ B = \dfrac{E\alpha}{1-2\mu}. \end{cases} \tag{7,9}$$

Mit Hilfe des oben benutzten Produktansatzes (7) läßt sich die Gleichung separieren, denn geht man mit jeden in (9) ein, so folgt auf Grund bekannter mathematischer Überlegungen u. a. die Existenz der Gleichung

$$\varrho \frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}t^2} + \frac{Bpb^2}{a} \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} + b^2 A G(t) = 0 \quad (b = \text{Konstante}). \tag{7,10}$$

Dies ist die Differentialgleichung, der der zeitabhängige Teil des Verschiebungsvektors $\mathfrak{x}$ genügt. Die Gleichung beschreibt einen gedämpften Schwingungsvorgang, dessen ln-Dekrement $\mathfrak{d}$ sich in bekannter Weise durch die Koeffizienten von Gl. (10) ausdrücken läßt. In diesen sind jedoch noch die Konstanten a und b unbekannt und daher zu bestimmen. Da b bei der Bildung von $\mathfrak{d}$ herausfällt, ist nur die Festlegung von a noch erforderlich, wozu die noch nicht benötigte Wärmeleitungsgleichung heranzuziehen ist, die in Verbindung mit (8) die Form

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \eta\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right) + a\vartheta \tag{7,11}$$

annimmt. Die Konstante a ist nun so zu bestimmen, daß die Lösung einerseits der Gl. (11), andererseits der Randbedingung (5) genügt. Zur Integration erweist sich der Produktansatz (6) als geeignet. Berücksichtigt man, daß ϑ durch die Deformation ξ bedingt wird, der zeitliche

Verlauf beider Funktionen also im wesentlichen der gleiche ist, so kann man, wenn ω die Kreisfrequenz der schwingenden Kugel ist, in (6) speziell für

$$g(t) = e^{j\omega t} \tag{7, 12}$$

setzen. Mit diesem Ansatz ergibt sich das Integral von (11) zu

$$\vartheta = \frac{\sin \lambda r}{r} e^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad \lambda^2 = \frac{a - j\omega}{\eta} \tag{7, 13}$$

eine Lösung, die auch für $r = 0$ regulär ist. Die Randbedingung (5) führt zu der transzendenten Gleichung

$$\operatorname{tg} \lambda R = \lambda R, \tag{7, 14}$$

deren Wurzeln wie folgt lauten[1]):

$$\lambda_n = \frac{1}{R}\left(k - \frac{2}{3k^3} - \frac{5}{15k^5} - \cdots\right) = \frac{\bar{\lambda}_n}{R} \tag{7, 15}$$

mit

$$k = (2n + 1)\frac{\pi}{2}. \tag{7, 16}$$

Durch diese Gleichungen sind die Eigenwerte des Problems festgelegt. Für die gesuchte Größe a ergibt sich demnach [aus Gl. (13) folgend]

$$a = j\omega + \eta \lambda_n^2. \tag{7, 17}$$

Setzt man diesen Wert für a in die erweiterte Bewegungsgleichung (3) ein und bestimmt dann das Dekrement, so erhält man unter Berücksichtigung von (5, 20) schließlich als endgültigen Ausdruck

$$\mathfrak{d} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1 + \mu}{1 - \mu} (1 - 2\mu)(\gamma - 1) \frac{\omega \eta \cdot \frac{\bar{\lambda}_n^2}{R^2}}{\omega^2 + \eta^2 \cdot \frac{\bar{\lambda}_n^4}{R^4}}. \tag{7, 18}$$

Dieser Ausdruck besitzt die gleiche charakteristische Frequenz- und Eigenwertabhängigkeit, wie sie beim Dekrement des schwingenden Stabes und der Platte in den vorhergehenden Beispielen gefunden wurde.

Bemerkung. Statt des hier eingeschlagenen Weges zur Integration der Gleichungen (3) und (4) mit Hilfe des Produktansatzes kann man auch versuchen, durch geeignete mathematische Operationen eine der Unbekannten zu eliminieren. Es gelingt z. B. die Elimination von ϑ durchzuführen, und man gelangt so zu einer Differentialgleichung für ξ, aus der man schließlich durch einen geeigneten Ansatz zu einer Gleichung kommt, die in sehr engem Zusammenhang mit der der Bennewitz-Rötgerschen Theorie zugrunde liegenden Haupt-

[1]) F. Emde, Tafeln elem. Funktionen, S. 130. Berlin-Leipzig, B. G. Teubner, 1941.

gleichung zu stehen scheint. Es waren bereits Ansätze gemacht worden, um die diesbezüglichen Zusammenhänge näher zu untersuchen und entsprechende Folgerungen daraus zu ziehen, als die bereits oben erwähnten Umstände dazu zwangen, die noch laufenden Untersuchungen vorzeitig abzubrechen. Die geplante Berechnung der thermischen Dämpfung in einem Kristall sowie die Prüfung des Zusammenhanges der Theorie von Bennewitz-Rötger und der hier entwickelten muß daher einer gesonderten Untersuchung vorbehalten bleiben, die nach Möglichkeit zu gegebener Zeit noch durchgeführt werden soll.

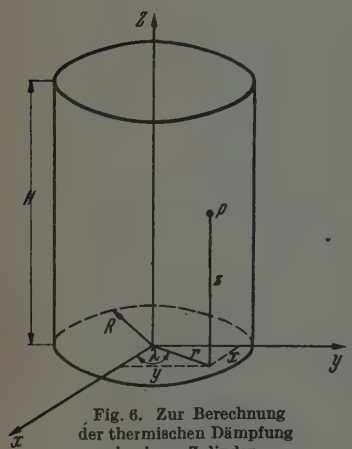


Fig. 6. Zur Berechnung der thermischen Dämpfung in einem Zylinder.

8. Der Zylinder. Als letztes Beispiel für die Bestimmung der thermischen Dämpfung eines Schwingers soll jene für einen schwingenden Zylinder berechnet werden (vgl. Fig. 6). Für diesen gelten[1])

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial \xi_r}{\partial r}, \qquad \varepsilon_{\lambda\lambda}=\frac{\xi_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial \xi_z}{\partial z},$$
$$\varepsilon_{rz}=\frac{\partial \xi_r}{\partial z}+\frac{\partial \xi_z}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\lambda}=0, \quad \varepsilon_{z\lambda}=0. \tag{8,1}$$

Der Einfachheit halber möge nur radiale Abhängigkeit vorausgesetzt werden, so daß nur $\xi_r = \xi$ und $\partial\xi/\partial r \neq 0$ ist. Dann ergibt sich auf genau die gleiche Weise, wie in Abschnitt 9, III angedeutet, für φ der Ausdruck

$$\varphi = u + v = G\left\{\frac{1-\mu}{1-2\mu}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\xi}{r}\right)^2+2\frac{\xi}{r}\frac{\partial\xi}{\partial r}\right]-2\frac{\xi}{r}\frac{\partial\xi}{\partial r}\right\} + \frac{E\alpha\vartheta}{1-2\mu}\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}+\frac{\xi}{r}\right) \tag{8,2}$$

und das Hamiltonsche Prinzip nimmt im vorliegenden Fall die Form an:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^R \left\{\frac{\varrho}{2} r\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 - G\left\{\frac{1-\mu}{1-2\mu}\left[r\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)^2+\frac{\xi^2}{r}+2\xi\frac{\partial\xi}{\partial r}\right]-2\xi\frac{\partial\xi}{\partial r}\right\} - \frac{E\alpha}{1-2\mu}\left(r\vartheta\frac{\partial\xi}{\partial r}+\xi\vartheta\right)\right\} dr + \int r_0\, d\tau = 0. \tag{8,3}$$

Hieraus erhält man als zugehörige Eulersche Gleichung

$$\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial\xi}{\partial r}+\frac{\xi}{r}\right\}+\frac{E\alpha}{1-2\mu}\frac{\partial\vartheta}{\partial r} = \varrho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \tag{8,4}$$

[1]) A. Timpe u. A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizitätstheorie, S. 169. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1907.

Die zur Berechnung von ϑ erforderliche Wärmeleitungsgleichung lautet in diesem Fall, wie sich aus (3, 15) unmittelbar ergibt, wenn man sie auf Zylinderkoordinaten transformiert

$$\eta\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)+p\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}+\frac{\xi}{r}\right)=\frac{\partial\vartheta}{\partial t}. \tag{8,5}$$

Ein Vergleich von (4) und (5) mit den entsprechenden Gleichungen des Kugelproblems (7, 3) und (7, 4) zeigt, daß sich vorliegende Gleichungen nur durch einen Faktor 2 unterscheiden. Man kann daher die Integration von (4) und (5) vermöge derselben Produktansätze wie in Abschnitt 7 durchführen und erhält dann über die erweiterte Bewegungsgleichung des Zylinders

$$\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}+\frac{\xi}{r}\right)+\frac{E\alpha p}{\alpha(1-2\mu)}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial t}\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}+\frac{\xi}{r}\right)=\varrho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \tag{8,6}$$

zur Berechnung des Dekrementes die mit (7, 10) formal übereinstimmende Gleichung

$$\varrho\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}t^2}+\frac{b^2Bp}{a}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}+b^2AG(t)=0. \tag{8,7}$$

Hierin ist noch a unbekannt und aus (5) wie in Abschnitt 7 zu bestimmen. Dies führt zu der Besselschen Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}+\lambda^2f(r)=0 \qquad \lambda=\frac{a-j\omega}{\eta}, \tag{8,8}$$

deren Lösung die Zylinderfunktion nullter Ordnung ist:

$$f(r)=J_0(\lambda r). \tag{8,9}$$

Die formal mit (7, 5) übereinstimmende Randbedingung liefert zur Bestimmung der Eigenwerte λ_n die transzendente Gleichung

$$\left(\frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r}\right)_{r=R}=-\lambda J_1(\lambda R)=0, \tag{8,10}$$

deren Wurzeln

$$\lambda_n=\frac{\pi}{R}\left(n+\frac{1}{4}-\frac{0{,}151\,982}{4n+1}+\cdots\right)=\frac{\bar{\lambda}_n}{R} \tag{8,11}$$

lauten[1]). Damit ergibt sich für

$$a=j\omega+\eta\lambda_n^2=j\omega+\eta\frac{\bar{\lambda}_n^2}{R^2} \tag{8,12}$$

[1]) W. Janke-Emde, Funktionentafeln, S. 143. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1938.

und man erhält schließlich für das Dekrement nach einiger Rechnung

$$\mathfrak{d} = \frac{\pi}{3} \frac{(1+\mu)(1-2\mu)(\gamma-1)}{1-\mu} \frac{\omega\eta \frac{\bar{\lambda}_n^2}{R^2}}{\omega^2 + \eta^2 \frac{\bar{\lambda}_n^4}{R^4}} \quad (8,13)$$

auch in formaler Übereinstimmung mit dem Dekrement bei Kugelschwingungen.

Vorstehende, unter sehr schwierigen äußeren Umständen entstandene Dissertation geht auf eine Anregung von Herrn Dozent Dr. Meixner zurück. Unter seiner Leitung wurden im wesentlichen die in Abschnitt 2 zusammengestellten Rechnungen durchgeführt. Herr Dr. Meixner brachte der Arbeit stets größtes Interesse entgegen, wofür ihm an dieser Stelle herzlich gedankt sei. Nach Herrn Dr. Meixners Einberufung zur Wehrmacht wurde Verf. bei der weiteren Abfassung der Arbeit von Herrn Prof. Dr. M. v. Laue betreut. Für eine Reihe wertvoller Vorschläge, Anregungen und Hinweise, die Verf. in mehreren Diskussionen mit Herrn Prof. v. Laue erhielt, sowie für das stets fördernde Interesse, das dieser vorliegender Arbeit entgegenbrachte, ist Verf. Herrn Prof. v. Laue zu tiefstem Dank verpflichtet, der hiermit zum Ausdruck gebracht sei.

Anhang. 9. Mathematische Zwischenrechnungen.

I. Integration von Gl. (5, 8). Normierte Eigenfunktionen des homogenen Problems:

$$\vartheta_n^0 = \sqrt{\frac{2}{h}} \sin(2n+1)\frac{\pi z}{h}. \quad (9,1)$$

Entwicklung der Störungsfunktion z nach ϑ_n^0 liefert für die Koeffizienten c_n mit dem Normierungsfaktor k:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{h}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \cdot \sin(2n+1)\frac{\pi z}{h}\, dz = \frac{2h^2 k}{\pi^3 (2n+1)^3}. \quad (9,2)$$

Der Ansatz

$$\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n e^{j\omega t} \sin(2n+1)\frac{\pi z}{h} \quad (9,3)$$

in Gl. (5, 8) eingeführt, führt nach einigen Umformungen zu

$$\beta_n = -\frac{p c_n e^{-j\omega t}}{j\omega + \eta (2n+1)^2 \cdot \frac{\pi^2}{h^2}} \cdot \frac{\partial^3 \xi_3}{\partial x^2 \partial t}, \tag{9, 4}$$

woraus leicht (5, 10) folgt.

II. Berechnung von Φ für die Platte. Unter Annahme der Gültigkeit der Kirchhoffschen Voraussetzungen liefert die Theorie der gebogenen Platte folgende Ausdrücke für die Komponenten des Verschiebungsvektors $\mathfrak{x}$[1]):

$$\xi_1 = (\alpha - \mu\beta)\, xz, \tag{9, 5}$$

$$\xi_2 = (\beta - \mu\alpha)\, yz, \tag{9, 6}$$

$$\xi_3 = -\tfrac{1}{2}(\alpha - \mu\beta)\, x^2 - \tfrac{1}{2}(\beta - \mu\alpha)\, y^2 - \tfrac{1}{2}\mu(\alpha^2 + \beta^2) z^2. \tag{9, 7}$$

Hierin bedeuten $\mu\beta - \alpha$ und $\mu\alpha - \beta$ die Hauptkrümmungen $1/R_1$ und $1/R_2$ der durch die Deformation entstehenden Fläche. Zwischen $1/R_1$ und $1/R_2$ und den ξ_i bestehen folgende benötigte Relationen[2])

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial y^2}, \tag{9, 8}$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x \partial y}\right)^2. \tag{8, 9}$$

Bildet man durch Differentiation von (5) bis (7) die Größen ε_i und geht mit ihnen in (3, 7) bzw. (3, 14) ein, so ergibt sich für das elastische Potential

$$u = \frac{1}{2} z^2 \frac{E}{1-\mu^2}\left\{\left(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\} \tag{9,10}$$

und für v:

$$v = r_0 + \frac{E\alpha\vartheta}{1-\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = r_0 - \frac{E\alpha\vartheta z}{1-\mu}\left(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial y^2}\right). \tag{9,11}$$

Addiert man (10) und (11) und integriert über die Platte, so führt dies zu Gl. (6, 2), q. e. d.

III. Berechnung von Φ für die Kugel. Die auf den Fall rein radialer Verschiebungen spezialisierten Komponenten des Verzerrungstensors lauten[3])

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial \xi}{\partial r}, \tag{9, 12}$$

$$\varepsilon_{\psi\psi} = \varepsilon_{\lambda\lambda} = \frac{\xi}{r}, \tag{9, 13}$$

$$\varepsilon_{r\lambda} = \varepsilon_{\lambda\psi} = \varepsilon_{\lambda r} = 0. \tag{9, 14}$$

[1]) Vgl. z. B. A. Timpe u. A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizitätstheorie, S. 156. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1907. — [2]) Cl. Schaefer, Theor. Phys. 1, 743. — [3]) Vgl. etwa A. Timpe u. A. E. H. Love, S. 167.

Mit diesen Werten ergibt sich für das elastische Potential, dessen Ausdruck Gl. (3, 7) im Falle krummliniger Koordinaten formal erhalten bleibt[1]),

$$u = G\left\{\frac{1-\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + 2\frac{\xi}{r}\right)^2 - 2\left(2\frac{\xi}{r}\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\xi^2}{r^2}\right)\right\}, \qquad (9, 15)$$

welcher Ausdruck nach geeigneter Umformung und anschließender Integration über die Kugel als deren potentielle Energie liefert:

$$U = \frac{2\pi E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\int_0^R \left\{(1-\mu)r^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)^2 + 4\mu\,\xi r\frac{\partial \xi}{\partial r} + 2\xi^2\right\} \mathrm{d}r. \qquad (9, 16)$$

Entsprechend liefert Gl. (3, 4) für v:

$$v = r_0 + \frac{E\alpha\vartheta}{1-2\mu}\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + 2\frac{\xi}{r}\right). \qquad (9, 17)$$

ntegration dieses Ausdrucks über die Kugel und anschließende Addition zu Gl. (16) liefert Φ in der Form, wie in Gl. (7, 1) angegeben.

---

[1]) Vgl. Handb. d. Phys. 6, 79.

Berlin, den 16. Juni 1942.

Die relativen Ausbeuten einiger $(n, 2n)$-Prozesse.

Von **Peter Jensen** in Heidelberg.

(Eingegangen am 11. August 1943.)

Die relativen β-Ausbeuten der $(n, 2n)$-Prozesse an verschiedenen Kernen wurden gemessen. Die Messungen wurden mit verschiedenen Neutronenquellen gemacht. Die Ergebnisse werden mit denen anderer Autoren verglichen. Die von Bothe und Gentner gemessenen (γ, n)-Ausbeuten werden den hier gefundenen $(n, 2n)$-Ausbeuten gegenübergestellt, und die Beziehungen zwischen den beiden Reaktionsarten werden diskutiert. Die Abhängigkeit des $(n, 2n)$-Wirkungsquerschnitts vom Element und von der Primärneutronen-Energie wird an Hand der Ausbeutemessungen und einer theoretischen Formel von Weisskopf und Ewing erörtert. Eine Zusammenfassung befindet sich am Schluß der Arbeit.

1. Ziel der Arbeit. Das Gebiet der Wirkungsquerschnitte und Anregungsfunktionen von Kernprozessen ist noch verhältnismäßig wenig bearbeitet. Besonders gilt dies für Kernumwandlungen durch schnelle Neutronen, also die $(n, 2n)$-Reaktionen, von denen diese Arbeit handelt, ferner die (n, p)- und die (n, α)-Reaktionen. Das liegt im wesentlichen an der Schwierigkeit, die Intensität von Neutronenstrahlen absolut zu bestimmen, und ferner daran, daß es vorläufig kaum möglich ist, hinreichend schnelle, homogene Neutronen von beliebig abstufbarer Energie in genügender Intensität zu erzeugen.

Erheblich weniger Aufwand ist aber erforderlich, wenn man sich zunächst einmal auf die *relativen* Wirkungsquerschnitte derartiger Prozesse für verschiedene Stoffe beschränkt, insbesondere solcher Prozesse, bei denen radioaktive Reaktionsprodukte entstehen. Denn dann braucht man im wesentlichen nur die relativen β-Aktivitäten dicker Schichten der bestrahlten Stoffe zu messen, um schon interessante Schlüsse ziehen zu können. Statt der Anregungsfunktion in Abhängigkeit von der Energie *homogener* schneller Neutronen kann man zunächst die experimentell viel einfachere Frage untersuchen, wie die relativen β-Aktivitäten sich verhalten, wenn man verschiedene kontinuierliche Neutronenspektren verwendet, deren *maximale* Energien man kennt.

Einige solcher Messungen sind schon an $(n, 2n)$-Prozessen gemacht worden; die Ergebnisse sind jedoch entweder mehr qualitativer Natur oder aber, soweit sie quantitativ sind, ziemlich widerspruchsvoll (vgl. Ziff. 4).

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war, die relativen Ausbeuten der $(n, 2n)$-Reaktionen an einigen Stoffen neu zu bestimmen, und zwar mit zwei Neutronenspektren von verschiedener Höchstenergie. Die Ergebnisse werden dann vom Standpunkt der heutigen Theorie diskutiert.

Aus dem folgenden Grunde besteht noch ein besonderes Interesse an Untersuchungen dieser Art. Die $(n, 2n)$-Prozesse führen ja von denselben Ausgangskernen über dieselben Zwischenkerne zu denselben Endkernen wie die (γ, n)-Prozesse (Kernphotoeffekte). Für diese sind die relativen Ausbeuten und ihre Energieabhängigkeit hauptsächlich von Bothe und Gentner[1]) für zahlreiche Elemente gemessen worden. Es ist nun für das Verständnis der beiden Reaktionsarten sicher förderlich, die Ausbeuten beider miteinander zu vergleichen, wie dies bereits Chang, Goldhaber und Sagane[2]) in einigen Fällen getan haben.

2. Messungen. Unter der relativen β-Ausbeute verstehen wir hier wie Bothe und Gentner[1]) die mit einem 0,1 mm-Al-Zählrohr gemessene Anfangsaktivität einer β-satten Schicht, bezogen auf das reine Ausgangsisotop, auf unendlich lange Bestrahlung, auf eine bestimmte Normalintensität der die Reaktion auslösenden Strahlung und auf eine unter denselben Bedingungen gemessene Bezugsaktivität, nämlich die des Cu^{62} ($T = 10$ min).

Die untersuchten Isotope und ihre Halbwertszeiten sind in den Spalten 1 und 2 der Tabelle 1 angegeben. Es wurden untersucht: Kohlenstoff als gereinigtes Paraffin, Stickstoff als Dicyandiamid ($C_2N_4H_4$) und $LiNO_3$, Sauerstoff als H_2O und $LiNO_3$, Fluor als LiF, Kupfer und Antimon als Metall, Silber als Ag_2O. Die Stoffe waren so ausgewählt, daß auch ohne chemische Trennungen jeweils die gewünschten Aktivitäten entweder allein oder in Begleitung anderer von sehr verschiedener Halbwertszeit auftraten, deren Beitrag daher eliminiert werden konnte. So waren für folgende langlebigen Begleitaktivitäten merkliche Korrektionen anzubringen: Bei Kupfer für Cu^{64} (12,8 h) und Ni^{63} (2,6 h), bei Silber für eine schwache, praktisch konstante Aktivität (wahrscheinlich das 8,2 *d*-Isomer des Ag^{106}), bei Antimon für Sb^{122} (63 h). Bei den kurzlebigen Begleitaktivitäten konnte jeweils die Abklingung abgewartet werden (wegen Cu^{66}, 5 min, vgl. Ziff. 3). Keine der untersuchten Aktivitäten konnte auch durch andere Neutronenprozesse, insbesondere (n, γ)-Prozesse, entstehen.

[1]) W. Bothe u. W. Gentner, ZS. f. Phys. **106**, 236, 1937; **112**, 45, 1939. — [2]) W. Y. Chang, M. Goldhaber u. R. Sagane, Nature **139**, 962, 1937.

Die schnellen Neutronen wurden durch Bestrahlung von Li-Metall mit Deuteronen erzeugt. Es kamen im wesentlichen die „Vorwärts"-Neutronen zur Wirkung. Die Deuteronenenergie und -stromstärke betrugen bei der ersten Versuchsreihe 0,85 e-MV und 20 bis 30 μA (Van de Graaff-Anlage), bei der zweiten 7,3 e-MV und 2 bis 5 μA (Zyklotron). Für die maximalen Neutronenenergien ergibt sich also 15,0 bzw. 22,2 e-MV, wenn man mit der von Stephens[1]) gemessenen und auch aus den genauen Massen[2]) folgenden Energietönung von 15,0 e-MV für den Prozeß $Li^7 (d, n) Be^8$ rechnet. Bei einer dritten Versuchsreihe wurde noch Beryllium mit Deuteronen von 7,3 e-MV bestrahlt. Da das Beryllium jedoch erhebliche Mengen Aluminium enthielt (10 bis 20%), läßt sich über die Höchstenergie der von ihm emittierten Neutronen nichts Genaues sagen. Den genauen Massen nach könnten die Al-Neutronen eine Höchstenergie von 16 e-MV haben. Natürlich wird die Zahl dieser Al-Neutronen viel kleiner als die der Be-Neutronen gewesen sein, deren Höchstenergie 11,5 e-MV betrug.

Die Anfangsaktivitäten und die relative Neutronenintensität wurden folgendermaßen bestimmt: Die Versuchssubstanzen, die durchweg in schüttbarer Form waren, wurden zur Bestrahlung in eine flache Küvette gefüllt, in deren Mittelebene ein dünnes Silberblech angebracht werden konnte, derart, daß die Neutronen erst eine Substanzschicht, dann das Silberblech (von derselben Fläche) und dann die zweite Substanzschicht durchdrangen. Nach der Bestrahlung wurde die Substanz der Küvette entnommen und durchgemischt, um etwaige Ungleichmäßigkeiten in der räumlichen Verteilung der Neutronen zu eliminieren. Hierauf wurde die Substanz in dicker Schicht in ein Schälchen von bestimmten Abmessungen gefüllt. Dieses wurde in gut definierter Lage unter ein liegend angeordnetes 0,1 mm-Al-Zählrohr geschoben, und der Aktivitätsabfall wurde verfolgt. Das mitbestrahlte Silberblech wurde, nachdem die kurzlebigen Ag-Aktivitäten abgeklungen waren, direkt um das Zählrohr herumgelegt, und seine 25 min-Aktivität wurde gemessen, die ja nur durch schnelle Neutronen entsteht. Die Breite des Bleches war erheblich geringer als die Länge des empfindlichen Zählrohrbereiches, daher war die Zählempfindlichkeit für alle Flächenelemente des Bleches gleich, und die beobachtete Aktivität war in der Tat ein Maß der mittleren relativen Intensität der schnellen Neutronen, wie sie während der Bestrahlung in der Küvette geherrscht hatte.

[1]) W. E. Stephens, Phys. Rev. **53**, 223, 1938. — [2]) Nach J. Mattauch u. S. Flügge, Kernphysikalische Tabellen. Berlin 1942.

Dieses Verfahren war erheblich sicherer als die Bestimmung der Mikroamperesekunden-Zahl des Deuteronenstrahles, mittels dessen die Neutronen erzeugt wurden.

Die Bestrahlungsdauer war fast immer *klein* gegen die Halbwertszeit des entstehenden aktiven Körpers und des Ag^{106} (25 min); zur Ermittlung der oben definierten relativen β-Ausbeute brauchte also nur die so erhaltene Anfangsaktivität mit der mittleren Lebensdauer multipliziert zu werden; Schwankungen der Neutronenintensität spielten keine Rolle. Nur in einigen Fällen sehr geringer β-Intensität wurde mit möglichst konstanter Neutronenintensität länger bestrahlt (bis zu einer Halbwertszeit) und auf unendlich lange Bestrahlung umgerechnet. Der Aktivitätsabfall wurde über 4 bis 8 Halbwertszeiten hin verfolgt. Die hieraus ermittelte Anfangsaktivität betrug im allgemeinen einige 10^2 bis 10^4 Stöße pro min.

3. Ergebnis der Messungen. Die Spalten 3 bis 5 der Tabelle 1 enthalten die nach Ziff. 2 definierten und gemessenen relativen Ausbeuten. In den Spalten 4 und 5 ist die Ausbeute des Kupfers gleich 100 gesetzt, in Spalte 3 die des Fluors gleich 1,3 (s. unten). Die Umrechnung auf das reine Ausgangsisotop wurde dem Massenverhältnis entsprechend vorgenommen; z. B. war der Umrechnungsfaktor beim Ag_2O (Isotopenhäufigkeit des Ag^{107} 52,5 %): $\frac{1}{0{,}525}\left(1+\frac{16}{2\cdot 108}\right)=2{,}05$, wobei der erste Faktor die Isotopenhäufigkeit und der zweite die chemische Verbindung

Tabelle 1. Relative β-Ausbeuten.

1	2	3	4	5	6
		Relative Ausbeuten mit			
Aktives Produkt	Halbwertszeit min	Neutronen von (Be + Al) + D $E_D = 7{,}3$ e-MV	Neutronen von Li + D $E_D = 0{,}85$ e-MV, $E_{n\,max} = 15{,}0$ e-MV	Neutronen von Li + D $E_D = 7{,}3$ e-MV, $E_{n\,max} = 22{,}2$ e-MV	γ-Strahlen [1] von Li + p $E_\gamma = 17$ e-MV
C^{11}	20,5	—	—	< 0,002	—
N^{13}	10	1,3	1,1	1,6	0,6
O^{15}	2,1	< 0,02 [2]	< 0,02	0,12	2
F^{18}	110	1,3	1,3	1,9	0,75
Cu^{62}	10	(50)	100	100	100
Ag^{106}	24,5	38	54	31	65
Sb^{120}	16	65	34	23	43

[1]) Nach W. Bothe u. W. Gentner, ZS. f. Phys. 112, 45, 1939; die Werte für N^{13} und F^{18} stammen von O. Huber, O. Lienhard, P. Scherrer, H. Wäffler, Helv. Phys. Acta 15, 312, 1942. — [2]) Dieser Wert ist mit Neutronen von *reinem* Be + D ($E_D = 7{,}3$ e-MV) gemessen, vgl. Ziff. 4.

berücksichtigt. Hierbei ist die Absorption der β-Strahlen als massenproportional vorausgesetzt. Die bei den leichten Elementen mit verschiedenen Verbindungen gemessenen und in dieser Weise umgerechneten Ausbeuten stimmten innerhalb der Meßfehler überein.

Die Ungenauigkeit der Ausbeuten mit den Li-Neutronen dürfte etwa 10% betragen. Die Messungen mit den (Be + Al)-Neutronen sind weniger genau, weil bei ihnen relativ viele langsamere Neutronen auftraten, so daß die Begleitaktivitäten stärker angeregt waren. Dies gilt besonders für das Kupfer, bei dem trotz Abschirmung der thermischen Neutronen durch Cadmium die 5 min- und die 12,8 h-Aktivität so stark waren, daß die 10 min-Aktivität des Cu^{62} schwer zu identifizieren war. Dagegen trat die 5 min-Aktivität bei den Versuchen mit den Li-Neutronen praktisch nicht in Erscheinung, was daraus folgt, daß schwach aktivierte, sofort gemessene Präparate dieselbe 10 min-Ausbeute ergaben wie stark aktivierte, abgelagerte Präparate. Wegen der Unsicherheit der Cu-Ausbeute mit den (Be + Al)-Neutronen sind die Werte der Spalte 3 von Tabelle 1 auf Fluor bezogen, dessen Ausbeute gleich 1,3 gesetzt ist.

Beim Kohlenstoff konnte keine sichere Aktivierung beobachtet werden. Es wurde „gereinigtes Paraffin" von Merck verwendet. Trotz 20 min dauernder Bestrahlung mit Li-Neutronen ($E_D = 7{,}3$ e-MV) zeigte das Paraffin nach 7 min nur eine Aktivität von 20/min. Dagegen gab z. B. Dicyandiamid ($C_2N_4H_4$) nach $^1/_2$ min Bestrahlung unter sonst gleichen Bedingungen eine N^{13}-Aktivität von 500/min. Die schwache Paraffinaktivität fiel mit einer Halbwertszeit ab, die zwischen der des N^{13} (10 min) und der des C^{11} (20,5 min) lag, und rührte vielleicht teilweise von gelöstem Stickstoff her. Zur Berechnung einer oberen Grenze für die Ausbeute wurde aber angenommen, die innerhalb 1 Stunde beobachtete Teilchenzahl sei allein dem C^{11} zuzuschreiben.

4. Vergleich mit älteren Messungen. Von anderer Seite liegen nur wenige Ergebnisse vor, die zum Vergleich mit den hier gefundenen geeignet sind.

Pool, Cork und Thornton[1]) vergleichen die Aktivitäten nicht bei verschiedenen Elementen, sondern bei verschiedenen Neutronenstrahlungen. Sie finden u. a. für N^{13}, Cu^{62} und Ag^{106} die Werte 0 für Neutronen von Be + D ($E_D = 6{,}3$ e-MV), wenn die Werte für Li + D-

[1]) M. L. Pool, J. M. Cork u. R. L. Thornton, Phys. Rev. **51**, 890, 1937.

Neutronen sämtlich gleich 100 gesetzt werden. Dies widerspricht unseren Resultaten nicht direkt, da unser Be mit Al verunreinigt war (s. oben). Dagegen ist es mit unseren Ergebnissen unvereinbar, daß die Verfasser bei derselben Normierung für O^{15} mit Be + D-Neutronen eine stärkere Aktivität finden als mit Li + D-Neutronen. Dieser Befund ist schon deshalb unverständlich, weil der O^{16} $(n, 2n)$-Prozeß mit den Neutronen aus Be + D energetisch unmöglich ist. Zur Klärung wurde noch ein Versuch mit Neutronen von einer Quelle aus Reinberyllium + Deuteronen von 7,3 e-MV gemacht, bei dem die spezifische Neutronenintensität besonders groß war. Trotzdem trat die 2,1 min-Aktivität des O^{15} nicht merklich auf [1]). Eine Erklärung für das abweichende Ergebnis von Pool, Cork und Thornton kann aus der Beschreibung ihrer Versuche nicht entnommen werden.

Auch andere energetisch unmögliche Prozesse geben Cork und Thornton [2]) als beobachtet an, nämlich N^{14} $(n, 2n)$ und O^{16} $(n, 2n)$, ausgelöst durch Neutronen von Be + D und D + D (E_D in allen Fällen = 6,3 e-MV). Die Schwellenenergie der ersten $(n, 2n)$-Reaktion ist 11,3, die der zweiten 16,5 e-MV (s. Tabelle 2); hingegen ist mit $E_D = 6{,}3$ e-MV die Höchstenergie der Be + D-Neutronen nur 10,5 e-MV und die der D + D-Neutronen nur 9,5 e-MV. Anscheinend ist bei diesen und ähnlichen Versuchen der Einfluß von Verunreinigungen nicht besonders beachtet worden, der sich aber gerade bei Versuchen mit den energieärmeren Neutronenspektren stark geltend macht. Um das Auftreten der 10 min-Aktivität (N^{13}) und der 2,1 min-Aktivität (O^{15}) zu erklären, genügt die Annahme einer Al-Verunreinigung in den Präparaten, denn Aluminium gibt mit mäßig schnellen Neutronen Mg^{27}, 10 min, und mit langsamen Neutronen Al^{28}, 2,3 min. In unserem Falle ist der beobachtete Stickstoffeffekt (Spalte 3 der Tabelle 1) wohl sicher auf die Al-Neutronen zurückzuführen.

Eine größere Zusammenstellung der durch schnelle Li + D-Neutronen erzeugten Radioaktivitäten von Pool, Cork und Thornton [3]) enthält nur qualitative Intensitätsangaben. Diese sind mit den Ausbeutewerten der Tabelle 1 im ganzen verträglich bis auf C^{11}. Hierfür geben die Verfasser eine meßbare Aktivität an, die sie als „sehr schwach" bezeichnen, ebenso wie für O^{15} und N^{13}; nach Tabelle 1 ist aber das

[1]) Die gefundene obere Grenze ist in Tabelle 1, Spalte 3 aufgenommen. — [2]) J. M. Cork u. R. L. Thornton, Phys. Rev. **53**, 866, 1938. — [3]) M. L. Pool, J. M. Cork u. R. L. Thornton, Phys. Rev. **52**, 239, 1937.

Ausbeuteverhältnis für $C^{11} : O^{15}$ höchstens $^1/_{60}$, für $C^{11} : N^{13}$ höchstens $^1/_{800}$. Dabei war die maximale Neutronenenergie bei Pool und Mitarbeitern noch um 1 e-MV kleiner als hier. Auch nach dem in Ziff. 5 Gesagten ist die Bildung von C^{11} (20,5 min) durch Neutronen von 21 e-MV sehr unwahrscheinlich, und man kann annehmen, daß die von Pool beobachtete Aktivität auf eine Verunreinigung zurückzuführen ist. Z. B. enthält auch sehr reiner Elektrographit u. a. noch merkliche Mengen Calcium, das mit schnellen Neutronen ein Kaliumisotop von 18 min Halbwertszeit liefert [1]).

In einer weiteren Arbeit untersucht Pool [2]) auch die Abhängigkeit der durch Li + D-Neutronen erregten Aktivitäten des Cu^{62} und Ag^{106} von der Deuteronenenergie im Bereich $E_D = 4{,}3$ bis 5,7 e-MV. Die Aktivität des Cu nimmt mit der Deuteronenenergie stärker zu als die des Silbers, was mit Tabelle 1 im Einklang ist. Es wird daraus geschlossen, daß Ag^{106} bereits mit weniger schnellen Neutronen erzeugt werden kann als Cu^{62}; vgl. dazu Ziff. 5.

Relative Ausbeuten, die mit denen der Tabelle 1, Spalte 4, unmittelbar zu vergleichen sind, geben Chang, Goldhaber und Sagane [3]) an. Sie finden mit Li + D-Neutronen ($E_D = 0{,}52$ e-MV) Null für O^{15}, 100 für Cu^{62}, 58 für Ag^{106}, aber 167 für Sb^{120}; mit Be + D-Neutronen in allen Fällen Null. Die Diskrepanz beim Antimon ist unklar.

Sagane [4]) mißt Schwellenenergien von $(n, 2n)$-Prozessen und findet u. a. die Schwelle für N^{13} und Sb^{120} zwischen den Neutronenenergien $E_n = 5{,}5$ und 7 e-MV, für Cu^{62} zwischen $E_n = 12$ und 13 e-MV, für Ag^{106} zwischen $E_n = 5$ und 7 e-MV. Der Wert für Cu^{62} erscheint plausibel, die anderen Werte sind erheblich niedriger, als man nach den theoretischen Kernmassen erwarten sollte, die ihrerseits wieder durch unsere Versuche gestützt werden (Ziff. 5).

5. Diskussion. Vergleich mit den (γ, n)-Prozessen. Der allgemeine Zug, der aus der Tabelle 1 hervortritt, ist eine auffallende Parallelität der relativen Ausbeuten bei den $(n, 2n)$-Prozessen einerseits und den (γ, n)-Prozessen andererseits. Diese ist unschwer zu verstehen: Der (γ, n)-Prozeß verläuft nach dem Schema

$$Z^A + h\nu \rightarrow Z^A \text{ (angeregt)} \rightarrow Z^{A-1} + n^1.$$

[1]) H. Walke, Phys. Rev. **52**, 663, 1937. — [2]) M. L. Pool, ebenda **53**, 707, 1938. — [3]) W. Y. Chang, M. Goldhaber u. R. Sagane, Nature **139**, 962, 1937. — [4]) R. Sagane, Phys. Rev. **53**, 492, 1938.

Der $(n, 2n)$-Prozeß spielt sich gemäß der allgemein angenommenen Vorstellung nach dem Schema ab:

$$Z^A + n^1 \rightarrow Z^{A+1} \text{ (angeregt)} \rightarrow Z^A \text{ (angeregt)} + n^1$$
$$\searrow Z^{A-1} + n^1.$$

In beiden Fällen tritt also als Zwischenkern der angeregte Ausgangskern auf, der dann unter Neutronenaussendung zerfällt. Der Unterschied besteht nur darin, daß die Anregung im ersten Falle durch Absorption eines γ-Quants, im zweiten dagegen durch unelastischen Neutronenstoß erfolgt. Die Parallelität der Ausbeuten ist am einfachsten so zu deuten, daß die Wirkungsquerschnitte für γ-Absorption und unelastische Neutronenstreuung ungefähr in ähnlicher Weise von der Ordnungszahl abhängen, und daß die Anregungszustände im großen ganzen dieselben bei beiden Reaktionsarten sind.

Im einzelnen ist jedoch die Parallelität nicht vollkommen. Die auffallendste Abweichung besteht darin, daß mit γ-Strahlen O^{15} deutlich stärker auftritt als N^{13} und F^{18}, während mit Neutronen N^{13} und F^{18} viel stärker auftreten als O^{15}. Die Abweichungen von der Parallelität hängen offenbar damit zusammen, daß die Zwischenkerne Z^A (angeregt) in beiden Fällen auf sehr verschiedenen Wegen entstehen. Insbesondere können die drei folgenden Umstände von Einfluß sein:

a) Es können bei etwa gleicher Anregungsenergie des Zwischenkernes Z^A (angeregt) je nach der Anregungsart verschiedene Spinwerte bevorzugt auftreten.

b) Die Höhe der Anregung dieses Kernes ist verschieden, wenn die Anregung einmal durch ein γ-Quant, das andere Mal durch unelastischen Stoß eines Neutrons von gleicher Energie erfolgt. Im ersten Falle wird die gesamte Energie des γ-Quants zur Anregung ausgenutzt, im zweiten Falle jedoch nur ein Teil der Neutronenenergie. Nach der Vorstellung von Weißkopf[1]) führt beim $(n, 2n)$-Prozeß das erste ausgesandte Neutron sogar durchschnittlich den größeren Teil der verfügbaren Energie wieder fort, so daß der Kern nur schwach „erhitzt" zurückbleibt.

c) Die benutzten Neutronenstrahlungen waren inhomogen. Wirksam ist aber nur der Teil des Neutronenspektrums, der oberhalb der Schwellenenergie des betreffenden $(n, 2n)$-Prozesses liegt. Daher war die Zahl der wirksamen Neutronen bei den verschiedenen Elementen

[1]) V. F. Weißkopf, Phys. Rev. 52, 295, 1937.

verschieden, nämlich um so kleiner, je höher die Schwellenenergie liegt. Die γ-Strahlen dagegen waren homogen, ihre wirksame Intensität war daher in allen Fällen dieselbe.

Die Punkte b) und c) werden besonders für die Fälle von Bedeutung sein, wo die Bindungsenergie eines Neutrons im ursprünglichen Kern besonders hoch ist, d. i. hier beim Sauerstoff. So wird es verständlich, daß nach Tabelle 1 gerade beim Sauerstoff die γ-Strahlen viel wirksamer sind als selbst die energiereichsten Neutronen [für die beiden energieärmeren Neutronenspektren ist der Prozeß O^{16} $(n, 2n)$ O^{15} energetisch überhaupt unmöglich].

Abhängigkeit der $(n, 2n)$-Ausbeute vom Element. Es soll jetzt geprüft werden, wieweit die Theorie nach ihrem heutigen Stande auch *quantitativ* Rechenschaft zu geben vermag von den Ergebnissen über die $(n, 2n)$-Prozesse. Weißkopf und Ewing[1]) haben eine umfassende Theorie der Wirkungsquerschnitte von Kernreaktionen entwickelt. Die Anwendbarkeit dieser Theorie ist zwar auf schwerere Kerne und so hoch liegende Anregungszustände beschränkt, daß sie als kontinuierlich verteilt angenommen werden können. Da jedoch für das Zustandekommen eines $(n, 2n)$-Prozesses in jedem Falle eine sehr hohe Anregung, wenigstens des ersten Zwischenkerns Z^{A+1} erforderlich ist, erscheint es nicht unvernünftig, die Theorie versuchsweise auch auf die hier untersuchten leichten Kerne anzuwenden.

Nach Weißkopf und Ewing soll der Wirkungsquerschnitt eines $(n, 2n)$-Prozesses angenähert gegeben sein durch

$$\sigma = \pi R^2 \left[1 - \left(1 + \frac{E-Q}{\tau}\right) e^{-\frac{E-Q}{\tau}}\right], \tag{1}$$

wobei $R = 1{,}47 \cdot 10^{-13}\ A^{1/3}$ cm der Radius[2]) des Ausgangskerns Z^A, E die Energie des primären Neutrons, $\tau = 2\sqrt{5\,E/A}$ die „Kerntemperatur", in e-MV gerechnet, und Q die Schwellenenergie des $(n, 2n)$-Prozesses ist, d. h. im wesentlichen die Bindungsenergie des Neutrons im Kern Z^A. Bei den leichten Kernen ist zu berücksichtigen, daß Q infolge der Schwerpunktsbewegung um den Faktor $1 + \frac{1}{A}$ größer als die Bindungsenergie ist. Der erste Faktor in Gleichung (1), πR^2, ist der Wirkungsquerschnitt für die erste Stufe der Reaktion, eine un-

[1]) V. F. Weißkopf u. D. H. Ewing, Phys. Rev. 57, 472, 1940. — [2]) Der Wert der Konstanten in dem Ausdruck für R ist noch nicht sehr sicher bekannt. Das ist hier aber bedeutungslos, da nur relative Wirkungsquerschnitte betrachtet werden.

elastische Streuung. Der Klammerausdruck gibt die relative Häufigkeit dafür an, daß die Anregungsenergie des Kerns Z^A nach der Emission des ersten Neutrons noch zur Emission eines zweiten ausreicht.

Um Gleichung (1) zum Vergleich mit den gemessenen Ausbeuten anwenden zu können, muß man die Q-Werte und die mittleren effektiven Neutronenenergien kennen, auf die die Ausbeuten zu beziehen sind. Die Neutronenbindungsenergien lassen sich, soweit sie nicht aus den Kernmassen bekannt sind, nach dem von Bohr und Wheeler angegebenen Verfahren [1]) näherungsweise berechnen. Für die mittleren effektiven Neutronenenergien der beiden Li + D-Spektren sollen hier jeweils die Mittelwerte zwischen Q und der maximalen Neutronenenergie genommen werden. Daß dies für die kleinere Deuteronenenergie einigermaßen begründet ist, läßt sich aus Messungen des Li + D-Neutronenspektrums [2]) entnehmen; die Mittelwerte für die größere Deuteronenenergie brauchen nur roh bekannt zu sein, da die Wirkungsquerschnitte in dem höheren Energiebereich nicht mehr so stark variieren (s. unten). Die berechneten Schwellenenergien Q [3]), ferner die mittleren effektiven Neutronenenergien E_1, E_2 der beiden Li + D-Spektren und die damit nach Gl. (1) berechneten Wirkungsquerschnitte σ sind in den Spalten 2 bis 6 der Tabelle 2 zusammengestellt.

Tabelle 2. Theoretische Wirkungsquerschnitte.

1	2	3	4	5	6	7	8
Isotop	Q e-MV	E_1 e-MV	$\sigma(E_1)$ 10^{-25} cm²	E_2 e-MV	$\sigma(E_2)$ 10^{-25} cm²	$\sigma_r(E_1)$	$\sigma_r(E_2)$
C^{11}	20,3	—	0	21,25	0,041	0	0,55 (0,07)
N^{13}	11,3	13,2	0,284	16,8	1,22	10,2 (1,2)	16,2 (1,9)
O^{15}	16,5	—	0	19,4	0,51	0	6,8 (0,8)
F^{18}	10,9	13,0	0,537	16,6	1,91	19,3 (2,3)	25,4 (3,0)
Cu^{62}	11,0	13,0	2,78	16,6	7,52	**100** (12)	**100** (12)
Ag^{106}	10,3	12,7	7,07	16,3	13,1	254 (31)	174 (21)
Sb^{120}	9,9	12,5	8,95	16,1	14,8	322 (39)	197 (24)

Um nun die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes vom Element zu prüfen, sind in Spalte 7 und 8 der Tabelle 2 die auf $\sigma_{Cu} = 100$ be-

[1]) N. Bohr u. J. A. Wheeler, Phys. Rev. **56**, 426, 1939. — [2]) W. E. Stephens, Phys. Rev. **53**, 223, 1938; H. T. Richards, ebenda **59**, 796, 1941. Diese Spektren sind unter 90° gegen den D-Strahl aufgenommen, ihre Grenze liegt deshalb ~ 1 e-MV tiefer als die der Vorwärtsneutronen. — [3]) Diese Werte sind auch für Cu^{62}, Ag^{106} und Sb^{120} relativ hoch, weil alle drei Kerne vom Typus A gerade, Z ungerade sind.

zogenen theoretischen relativen Wirkungsquerschnitte σ_r eingetragen. Diese müßten, wenigstens bei den schweren Kernen, annähernd mit den gemessenen relativen Ausbeuten übereinstimmen (Spalte 4 und 5 der Tabelle 1). Tatsächlich sind aber die auf Kupfer bezogenen beobachteten Ausbeuten in allen Fällen viel kleiner als die relativen theoretischen Wirkungsquerschnitte. Diese Abweichungen können nur zum kleineren Teil durch eine Verschiedenheit der Selbstabsorption der β-Strahlen infolge verschiedener β-Energie erklärt werden. Es ist auch unwahrscheinlich, daß bisher unbekannte K-Einfangprozesse mit der Positronenemission konkurrieren, zumal K-Einfang bisher fast nur bei viel längerlebigen Körpern beobachtet worden ist.

Bei den *leichten* Kernen sind diese Abweichungen aber nicht unerwartet. Denn Gleichung (1) soll ja nur für schwerere Kerne gelten, für die angenommen wird, daß die „Steckwahrscheinlichkeit" (sticking probability) des primären schnellen Neutrons[1]) nahezu 1 ist, und daß die Aussendung geladener Teilchen von beiden angeregten Zwischenkernen Z^{A+1} und Z^A sehr viel unwahrscheinlicher als Neutronenemission ist. Diese beiden Voraussetzungen brauchen bei den leichten Kernen durchaus nicht erfüllt zu sein. Bei den *schweren* Kernen sollten dagegen die gemessenen Ausbeuten schon eher mit den theoretischen relativen Wirkungsquerschnitten übereinstimmen. Aber auch hier gibt es noch einen Prozeß, der mit der Bildung der untersuchten aktiven Isotope konkurrieren kann, und über den Gl. (1) nichts aussagt, nämlich die Bildung von Isomeren des Endproduktes, die wegen extremer Lebensdauern oder sehr energiearmer Strahlung der Beobachtung entgehen. Die Möglichkeit, daß auf diese Weise die Ausbeute eines erwarteten Isotops verkleinert wird, diskutieren schon Bothe und Gentner beim Photoeffekt[2]). Beim Ag^{106} ist sogar bereits ein K-strahlendes Isomer von 8,2 Tagen Halbwertszeit bekannt. Pool[3]) schätzt hier ganz roh ab, daß durch schnelle Neutronen ungefähr 20mal mehr Kerne des langlebigen als des kurzlebigen Isomers entstehen, wodurch die Abweichung im Falle des Silbers überreichlich erklärt wäre. In den anderen Fällen kennt man allerdings noch keine Isomere. Da über den Anteil der elastischen Streuung und der sonstigen konkurrierenden Prozesse am Gesamtquerschnitt bei den sehr hohen Neu-

[1]) D. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Neutron bei einem Stoß den Zwischenkern Z^{A+1} bildet und nicht elastisch reflektiert wird. — [2]) W. Bothe u. W. Gentner, ZS. f. Phys. 112, 45, 1939. — [3]) M. L. Pool, Phys. Rev. 53, 116, 1938.

tronenenergien nichts Quantitatives bekannt ist, läßt sich über die absoluten $(n, 2n)$-Querschnitte noch nichts Näheres aussagen.

Es ist auch nicht ausgeschlossen, daß gerade das Kupfer, das wegen seiner besonders hohen Ausbeute als Bezugselement gewählt wurde, eine Ausnahmestellung einnimmt. Setzt man z. B. die theoretischen Wirkungsquerschnitte für Cu gleich 12 statt 100 (eingeklammerte Zahlen in Spalte 7 und 8 der Tabelle 2), so erhält man Übereinstimmung mit den beobachteten Ausbeuten innerhalb eines Faktors 2, mit Ausnahme des Kupfers selbst und des C^{11} und O^{15}. Bei den letzteren beiden aber ist die geringe Ausbeute leicht aus der hohen Reaktionsschwelle zu verstehen: Die Zahl der Primärneutronen mit Energien oberhalb der Schwellenenergie ist in diesen beiden Fällen viel kleiner als in den übrigen Fällen, wo die Schwellenenergien durchweg nur 10 bis 11 e-MV betragen.

Abhängigkeit von der Neutronenenergie. Zum Vergleich der Energieabhängigkeiten der gemessenen Ausbeuten a und der theoretischen Wirkungsquerschnitte σ_r bildet man für jedes Element die Quotienten $a(E_1)/a(E_2)$ aus Spalte 4 und 5 der Tabelle 1 und $\sigma_r(E_1)/\sigma_r(E_2)$ aus Spalte 7 und 8 der Tabelle 2. Sie müßten gleich sein, wenn Theorie und Experiment fehlerfrei wären. Die Werte sind in den Spalten 2 und 3 der Tabelle 3 eingetragen. Die Übereinstimmung ist überraschend

Tabelle 3. Energieabhängigkeit der gemessenen relativen Ausbeuten und theoretischen relativen Wirkungsquerschnitte.

1	2	3	4	1	2	3	4
Isotop	$\frac{a(E_1)}{a(E_2)}$	$\frac{\sigma_r(E_1)}{\sigma_r(E_2)}$	$\frac{a(E_2)}{\pi R^2}$	Isotop	$\frac{a(E_1)}{a(E_2)}$	$\frac{\sigma_r(E_1)}{\sigma_r(E_2)}$	$\frac{a(E_2)}{\pi R^2}$
C^{11}	—	0	0,01	Cu^{62}	1	1	0,70
N^{13}	0,69	0,63	0,31	Ag^{106}	1,74	1,46	0,86
O^{15}	$< 0{,}17$	0	0,12	Sb^{120}	1,48	1,63	0,89
F^{18}	0,68	0,76	0,40				

gut. Nimmt man an, daß die Bildung von Isomerenpaaren und die anderen konkurrierenden Prozesse eine große Rolle spielen (s. oben), so müßte man hieraus schließen, daß die Verzweigungsverhältnisse in dem hier untersuchten Energiebereich nicht merklich von der Energie der Primärneutronen abhängen; dann werden nämlich auch die partiellen Wirkungsquerschnitte der Gleichung (1) gehorchen.

Daß auch im Bereich der leichten Kerne gute Übereinstimmung besteht, zeigt deutlich, daß auch hier die in Betracht kommenden

hohen Anregungszustände schon so dicht liegen, daß Resonanzen keine merkliche Rolle spielen.

Schließt man aus den Ergebnissen für die zwei Primärneutronen-Energien E_1, E_2, daß die *ganze* Anregungsfunktion durch Gl. (1) richtig wiedergegeben wird, so kann man über die Grenzwerte des $(n, 2n)$-Querschnitts bei niedriger und hoher Primärenergie folgendes aussagen: 1. Der $(n, 2n)$-Querschnitt verschwindet, wenn die Primärenergie E sich der theoretischen Schwellenenergie Q nähert. Dies muß schon allein aus energetischen Gründen so sein, soll aber im Hinblick auf mehrere widersprechende experimentelle Ergebnisse von anderer Seite (s. Ziff. 4) hier noch einmal betont werden. 2. Bei hoher Primärenergie nähert sich der (totale) $(n, 2n)$-Querschnitt asymptotisch dem Grenzwert πR^2, dem geometrischen Kernquerschnitt. In Spalte 4 der Tabelle 3 ist angegeben, welchen Bruchteil ihres Höchstwertes πR^2 die einzelnen $(n, 2n)$-Querschnitte bei der Energie E_2 (Spalte 5 der Tabelle 2) nach der Theorie erreichen. Wie man sieht, erstreckt sich die Übereinstimmung zwischen Spalte 2 und 3 auf fast den ganzen Anstieg der theoretischen Anregungskurve, nicht nur auf den Anfangsteil, dessen Verlauf $[\sim (E - Q)^2]$ sich schon aus sehr allgemeinen Überlegungen herleiten läßt. Hierdurch wird nicht nur die Weißkopfsche Theorie gestützt, sondern auch die Bohr-Wheelersche Berechnung der Kernmassen, die für die Schwellenenergie Q maßgebend ist.

Zusammenfassung. Die relativen β-Ausbeuten der zu C^{11} (20,5 min), N^{13} (10 min), O^{15} (2,1 min), F^{18} (110 min), Cu^{62} (10 min), Ag^{106} (24,5 min) und Sb^{120} (16 min) führenden $(n, 2n)$-Prozesse wurden durch Messung der β-Aktivität unter definierten Bedingungen bestimmt.

Die Primärneutronen entstammten der Li + D-Reaktion. Zur Untersuchung der Energieabhängigkeit der Ausbeuten wurde mit zwei Deuteronenenergien, 0,85 e-MV und 7,3 e-MV gearbeitet. Die zugehörigen maximalen Neutronenenergien waren 15,0 bzw. 22,2 e-MV. Bei einigen Versuchen wurden auch Neutronen benutzt, die durch Bestrahlung von Al-haltigem Beryllium erzeugt wurden.

Die gemessenen, auf Kupfer bezogenen relativen Ausbeuten sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Eine sichere Aktivierung von Kohlenstoff konnte nicht beobachtet werden, von Sauerstoff nur mit den energiereichsten Neutronen. Anderslautende Ergebnisse anderer Autoren sind vermutlich auf Verunreinigungen der bestrahlten Stoffe zurückzuführen.

Die gefundenen $(n, 2n)$-Ausbeuten werden mit den von Bothe und Gentner gemessenen (γ, n)-Ausbeuten verglichen. Es besteht eine weitgehende Parallelität, die jedoch, besonders bei den leichten Kernen, nicht vollkommen ist. Dieser Befund ist auf Grund der geläufigen Vorstellungen vom (γ, n)- und $(n, 2n)$-Prozeß zu verstehen.

Die nach einer theoretischen Formel von Weißkopf und Ewing berechneten, auf Kupfer bezogenen relativen Wirkungsquerschnitte der hier untersuchten $(n, 2n)$-Prozesse (Tabelle 2) sind durchweg erheblich größer als die beobachteten relativen Ausbeuten. Die möglichen Ursachen hierfür werden diskutiert. Dagegen wird die Anregungsfunktion der $(n, 2n)$-Prozesse durch die Theorie anscheinend gut wiedergegeben (Tabelle 3). Die $(n, 2n)$-Querschnitte der schweren Kerne erreichen danach bei einer Primärneutronen-Energie von etwa 16 e-MV bereits fast ihren „Sättigungswert" πR^2, den geometrischen Kernquerschnitt.

Die Berechnung der Kernmassen nach Bohr-Wheeler erhält durch diese Ergebnisse eine gewisse Stütze.

Herrn Professor Bothe danke ich für den Hinweis auf die hier behandelten Fragen und für fördernde Diskussionen.

Heidelberg, Institut für Physik am Kaiser Wilhelm-Institut für medizinische Forschung, Juni 1943.

Trennung der Thalliumisotope.

I. Massenspektroskopische Trennung.

Von **W. Walcher** in Göttingen.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 28. August 1943.)

Mit dem früher beschriebenen Trennspektrographen werden die Thalliumisotope 203 und 205 (natürliches Gemisch 29% Tl^{203} und 71% Tl^{205}) entmischt. In etwa 20stündigen Versuchen werden auf Aluminiumfolien Thalliumbeläge von etwa 70 μg Gewicht hergestellt, die auf der schweren Seite etwa 25 μg eines Gemisches mit 97,5% Tl^{203} und auf der leichten Seite etwa 15 μg eines Gemisches mit 65% Tl^{203} enthalten. Diese Mischungsverhältnisse werden aus der Analyse bzw. aus der Synthese der Stromverteilungskurven geschlossen. Die Synthese wird ermöglicht durch Messung der Linienform am Reinelement Wismut Bi^{209}.

1. Einleitung. In einer früheren Arbeit[1]) über einen Massenspektrographen zur Isotopentrennung war gezeigt worden, daß es möglich ist, die Rubidiumisotope fast quantitativ zu trennen; als Ionenquelle hatte bei diesen Versuchen eine Glühanode gedient. Nachdem neuerdings[2]) eine Ionenquelle gebaut werden konnte, die die Ionisierung praktisch aller Elemente erlaubt, sollte untersucht werden, wieweit der Trennspektrograph in Verbindung mit dieser Ionenquelle fähig ist, auch die Isotope der *schwersten* Elemente zu entmischen. Als günstigstes Objekt zur Verwirklichung dieser Absicht bot sich das Thallium dar. Es besitzt die Isotope Tl^{203} und Tl^{205}, die um 2 Masseneinheiten voneinander entfernt liegen und im natürlichen Gemisch im Verhältnis $V_{203}^{205} = 2{,}44$ vorhanden sind. Auf einem Leuchtschirm in der Bildebene des Trennspektrographen beobachtet man demgemäß zwei Linien mit dem genannten Intensitätsverhältnis, deren Schwerpunkte einen Abstand von etwa 0,5 cm haben. Mit Hilfe dieses okular gut beobachtbaren Bildes vereinfacht sich die Justierung des Apparates auf maximale Intensität und beste Linienschärfe — durch Wahl der Spannungen am Immersionssystem der Ionenquelle — außerordentlich und ist eine laufende Kontrolle der Trennschärfe während der Trennung möglich. Ein weiterer Vorzug des Thalliums liegt in dem bequemen Nachweis der Trennung durch Untersuchung der Hyperfeinstruktur seiner Spektrallinien[3]).

---

[1]) W. Walcher, ZS. f. Phys. 108, 376, 1938. — [2]) W. Walcher, ebenda 122, 62, 1944. — [3]) Vgl. hierzu die folgende Arbeit.

2. Gang der Trennung. Zur Beobachtung und Messung der Stromverteilung sowie zur Sammlung der Isotope war in der Bildebene des Spektrographen (am Ausgang des Viertelkreises) die in Fig. 1 skizzierte Anordnung angebracht. P ist ein drehbarer Leuchtschirm[1]), der isoliert gehaltert und über ein Galvanometer G geerdet ist. Ein Sektor der Platte P ist von Leuchtstoff frei gemacht und mit zwei Bohrungen von 1 mm Durchmesser im Abstand von 20 mm (1 und 1′ in Fig. 1) versehen.

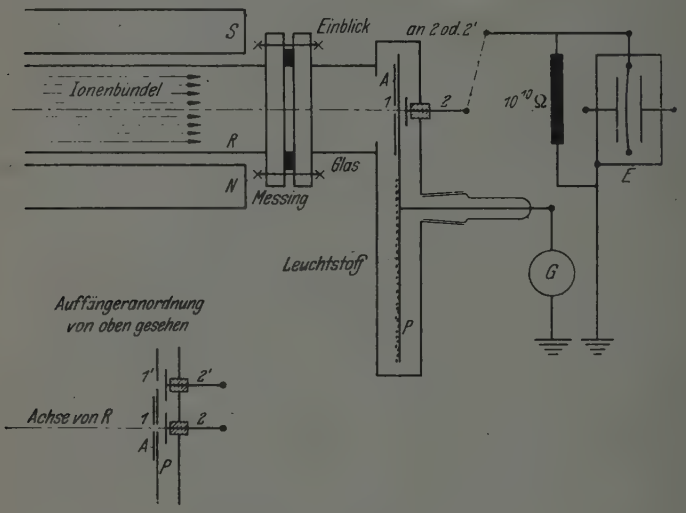


Fig. 1. Schema der Auffanganordnung.

Hinter diesen Bohrungen sitzen zwei isoliert durch das Gehäuse geführte Meßelektroden 2 und 2′, die wahlweise über die Elektrometeranordnung E geerdet werden können; sie erlauben die Messung der Strom*dichte* im Ionenbündel, während G dessen *Gesamt*strom mißt. Vor dem Loch 1 ist — ebenfalls durchbohrt — als eigentlicher Auffänger eine Aluminiumfolie von 0,05 mm Dicke, 20 mm Breite und 30 mm Höhe angebracht.

Zur Erzeugung der Thalliumionen wird der Ofen der Atomstrahlionenquelle (l. c.) mit metallischem Thallium gefüllt und seine Temperatur, d. h. also die Dichte des Atomstrahls im Stoßraum, so ein-

[1]) Zink—Cadmium—Sulfid auf Metallplatte. Da alle Leuchtstoffe durch Ionenbeschuß ihre Fluoreszenzfähigkeit mehr oder weniger rasch einbüßen, ist es vorteilhaft, durch Verdrehen mehrmals eine noch nicht zerstörte Stelle des Schirmes zur Beobachtung verwenden zu können.

gestellt, daß das durch Stoßelektronen und Ionen erzeugte Raumladungsfeld zusammen mit dem Ziehfeld gerade beste Linienschärfe ergibt, was zunächst visuell auf dem Leuchtschirm festgestellt wird. Dann wird die Platte P so gedreht, daß Loch 1 mit der Achse des Rohres R zusammenfällt. Durch Veränderung des Magnetstromes wird nun zunächst das Ionenbündel über Loch 1′ geführt und der Strom zur Meßelektrode 2′ in Abhängigkeit vom Magnetstrom aufgenommen. Fig. 2 zeigt die auf solche Weise erhaltene Stromverteilungskurve bei der Linienschärfe[1]), wie sie während des Dauerbetriebes eingehalten werden konnte. Für den eigentlichen Trennversuch wird das dem Tl^{205} entsprechende Maximum der Stromverteilungskurve auf Loch 1 verschoben; dabei trifft das Ionenbündel auf die Auffangfolie.

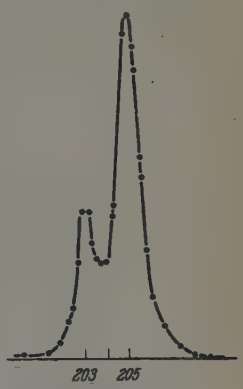


Fig. 2. Stromverteilung in der Auffängerebene.

Zur Erzielung eines möglichst guten Trennergebnisses muß die Lage der Stromverteilung auf dem Auffänger während der ganzen Trenndauer scharf fixiert werden; dies wird dadurch erreicht, daß der Strom durch Loch 1 durch jeweilige Nachregelung des Magnetstromes stets auf dem Maximum Tl^{205} gehalten wird[2]). Daneben muß die Form der Stromverteilung während der Trennzeit möglichst günstig gehalten werden (vgl. Fig. 2); sie wird in geeigneten Zeitabständen am Loch 1′ über Meßelektrode 2′ geprüft bzw. auf dem hereingedrehten Leuchtschirm betrachtet und nachgestellt.

Fig. 3. Photographie des Auffängers; das in der Mitte der Figur sichtbare Loch entspricht Loch 1 der Fig. 1.

3. Ausbeute. Durch die beste Form der Stromverteilungskurve war von vornherein die Ausbeute der Trennung festgelegt, indem eine Steigerung des Ionenstroms sowohl durch Erhöhung der Thalliumdampfdichte als durch

[1]) Der Eintrittsspalt des Massenspektrographen hatte hierbei eine Breite von 5 mm; durch Verringerung dieser Breite hätte die Auflösung ohne weiteres verbessert werden können, jedoch auf Kosten der Intensität und damit der Trennleistung. — [2]) Infolge von ungewollten Schwankungen der Betriebsbedingungen: Stoßstrom, Stoßspannung, Hochspannung, Ziehspannung, Dichte des Dampfes, Restgasdruck, Magnetfeld, Erwärmung der Maschinen und Spulen führt die Stromverteilung ohne diese Nachregelung eine langperiodige Wackelbewegung aus, die natürlich einer Isotopenmischung gleichkommt.

Vergrößerung des Stoßelektronenstromes in jedem Falle die Linienschärfe und damit die Trennung verschlechterte. Auf diese Weise betrug der fokussierbare Ionenstrom beim Thallium nur etwa 1 μA, was einer Menge von etwa 8 μg Tl pro Stunde entspricht. In einem 20stündigen Betrieb, unterbrochen durch fünf Ofenfüllungen mit den zugehörigen Pumpzeiten, konnten etwa 70 μg Tl aufgefangen werden; dabei entsteht auf der Aluminiumfolie ein deutlich sichtbarer Spiegel mit einer der Fig. 2 entsprechenden Metallbelegung, von der Fig. 3 eine photographische Wiedergabe zeigt. Derartige Proben wurden im Laufe der Untersuchung in größerer Zahl hergestellt.

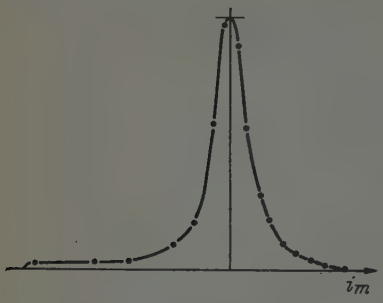


Fig. 4. Linienform, gemessen mit Wismut (209).

Teil:	Tl 203	Tl 205
1	65%	35%
2	60	40
3	11	89
4	2,5	97,5
nat.	29	71

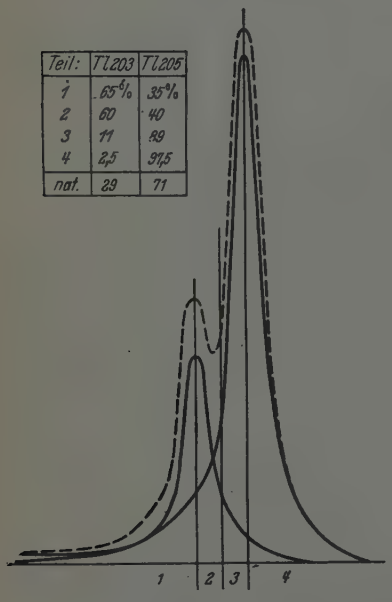


Fig. 5. Synthese der Stromverteilung aus der bekannten Linienform.

Durch geeignetes Zerschneiden der Aluminiumfolie können Thalliumgemische verschiedenen Mischungsverhältnisses gewonnen werden. Wie jedoch ein Blick auf Fig. 2 zeigt, ist zu erwarten, daß wegen der Überlappung der Linienflügel die Isotope nicht rein erhalten werden können. Um trotzdem eine Aussage über das Mischungsverhältnis der Thalliumisotope in den verschiedenen Gebieten des Auffängers machen zu können, war es notwendig, die Linienform genau zu messen.

4. Linienform und Synthese der Stromverteilung. Zur Messung der Linienform wurde die Ionenquelle mit dem Reinelement Wismut, Massenzahl 209, beschickt und in üblicher Weise die Stromverteilung durch Loch 1 gemessen. Fig. 4 zeigt das Ergebnis. Die Linie ist un-

symmetrisch; sie zeigt einen überhöhten Flügel bei kleinem Magnetfeld, der durch langsame Ionen hervorgerufen ist. Sie entstehen durch Streuelektronen auf der dem Immersionssystem zugekehrten Seite des Stoßraumes; die entsprechenden Ionen auf der anderen Seite des Stoßraumes gelangen wegen des parabolischen Verlaufs des Potentials im Stoßraum nicht ins Ionenbündel[1]). Unter Zugrundelegung dieser

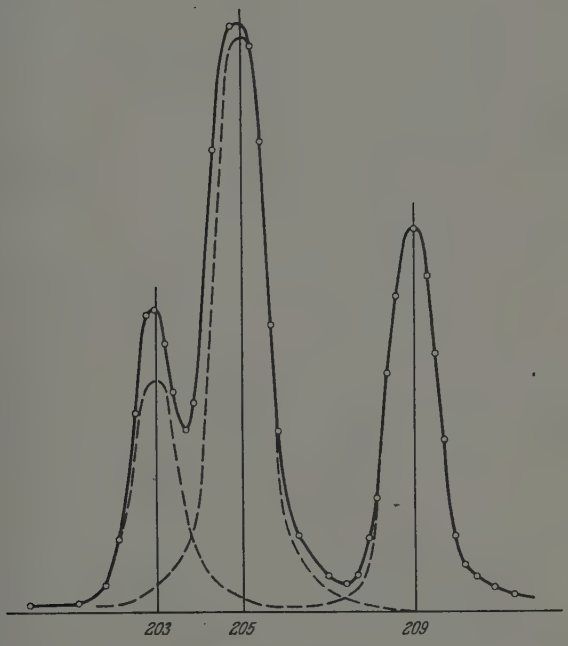


Fig. 6. Analyse der gemessenen Stromverteilung Thallium—Wismut.

Linienform und mit Hilfe des bekannten Abstandes der Linienschwerpunkte und des natürlichen Mischungsverhältnisses ist in Fig. 5 die im Auffänger zu erwartende Stromverteilung konstruiert; sie gestattet durch Vergleich der Flächen unter den beiden Linien unmittelbar die Angabe des mittleren Mischungsverhältnisses für die Gebiete *1*, *2*, *3*, und *4*. In der Tabelle, die Fig. 5 beigefügt ist, sind diese Mischungsverhältnisse aufgeschrieben. Demnach ist zu erwarten, daß in den

[1]) Vgl. hierzu ZS. f. Phys. **122**, 62, 1944.

Proben *1* bzw. *4* ein „leichtes“ Gemisch mit 65% Tl^{203} und ein „schweres“ Gemisch mit 97,5% Tl^{205} vorliegen.

5. Analyse der gemessenen Ionenstromverteilung. Zur weiteren Bestätigung dieses Befundes ist in Fig. 6 die Stromverteilung der Thalliumisotope zusammen mit der des Wismuts aufgenommen. Zur Erzeugung dieser Verteilung war der Ofen der Ionenquelle mit einer Legierung aus Thallium und Wismut gefüllt. Fig. 6 erlaubt eine angenäherte Analyse, jedoch kann diese nicht in allen Bestimmungsstücken in Übereinstimmung gebracht werden, so daß ihre Ergebnisse, die eine größere Reinheit der Gemische *1* und *4* erwarten lassen, nicht das gleiche Gewicht haben wie die in Fig. 5 angegebenen Mischungsverhältnisse.

Zum Resonanzverhalten elektromagnetisch erregter Hohlräume.

Von **F. Borgnis** in Graz.

(Eingegangen am 9. August 1943.)

Der theoretische Verlauf der Resonanzkurve eines elektromagnetisch erregten Hohlraums wird untersucht und gezeigt, daß derselbe unter gewissen, im allgemeinen erfüllten Voraussetzungen in der Umgebung einer Resonanzfrequenz den nämlichen Charakter aufweist, wie die Resonanzkurve eines „konzentrierten" Schwingungskreises.

Elektromagnetische Hohlräume, unter denen wir allseitig von metallischen Leitern begrenzte dielektrische Räume verstehen, finden als Resonanzkreise bei sehr kurzen elektrischen Wellen Verwendung. Sie weisen ein diskretes Spektrum von Eigenfrequenzen auf; die zugehörigen Eigenwellenlängen sind durch die Linearabmessungen der Hohlraumresonatoren (HR) bestimmt. Über die Eigenschwingungen, d. h. die freien Schwingungszustände solcher Systeme liegen für die praktisch interessierenden geometrischen Formen ausführliche Untersuchungen vor; sie liefern die Verteilung der elektrischen und magnetischen Feldstärken sowie die Eigenfrequenzen der möglichen Schwingungszustände.

Im folgenden soll die Frage behandelt werden, wie sich ein solcher Resonator in der *Umgebung* einer Eigenfrequenz ω_{0n} verhält, wenn er in irgendeiner Weise periodisch mit der Frequenz ω erregt wird. Die Absicht ist dabei, ein experimentelles Ergebnis zu bestätigen, dem bei der praktischen Verwendung solcher HR als Resonanzkreise eine besondere Bedeutung zukommt: Daß nämlich die „Resonanzkurve" eines HR in der Umgebung einer Resonanzfrequenz ω_{0n} unter einigen, weiter unten zu erörternden Voraussetzungen die gleiche Gestalt aufweist wie diejenige eines gewöhnlichen „konzentrierten" Schwingkreises, der aus (verlustbehafteten) Selbstinduktionen und Kapazitäten aufgebaut ist. Die Resonanzkurve schwach gedämpfter Kreise pflegt man in Resonanznähe durch die Beziehung

$$A = \frac{A_{res}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{d}\right)^2}} \qquad (1)$$

zu beschreiben, wobei v die „Verstimmung“ $\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega$ und d die „Dämpfung“ bedeutet[1]). Denkt man sich den konzentrierten Kreis beispielsweise mit einer entfernten metallischen Hüllfläche umgeben, so wird die erwähnte Tatsache physikalisch leicht verständlich, da der konzentrierte Kreis zusammen mit der Hüllfläche nur einen speziellen HR darstellt, der die besondere Eigenschaft hat, daß für die „niederen“ Eigenfrequenzen das elektrische und magnetische Feld praktisch im Kondensator bzw. in der Selbstinduktion konzentriert sind. Es ist daher zu erwarten, daß Schwingkreis und HR ein ähnliches Resonanzverhalten aufweisen.

Wir werden zeigen, daß die Beziehung (1) für HR in der Umgebung einer Eigenfrequenz Gültigkeit besitzt, wobei wir folgende Annahmen zugrundelegen: Der HR sei gleichmäßig mit einem Dielektrikum (ε, μ) erfüllt, dem eine gewisse kleine Leitfähigkeit σ zukommt. Die metallische Begrenzung sei unendlich gut leitend $(\sigma = \infty)$, was für das elektrische Feld die Randbedingung $\mathfrak{E}_t = 0$ (Verschwinden der Tangentialkomponente auf der Berandung) nach sich zieht. Die äußere Erregung denken wir uns durch eingeprägte Ströme j_e und Ladungen ϱ_e hervorgerufen, deren Verteilung im übrigen beliebig angenommen werden kann. Die Kopplung zwischen dem erregenden System und dem HR sei schwach, so daß eine Wechselwirkung zwischen beiden Systemen außer acht gelassen werden kann.

Die Maxwellschen Gleichungen schreiben wir gemäß den gemachten Annahmen im praktischen Maßsystem:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \sigma \mathfrak{E} + j_e \tag{2a}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}. \tag{2b}$$

Weiterhin

$$\varepsilon \operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho_e; \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \tag{2c}$$

Durch Differentiation von (2a) nach der Zeit erhält man in Verbindung mit (2b) in bekannter Weise für die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ die Differentialgleichung

$$\Delta \mathfrak{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \mu \frac{\partial j_e}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \varrho_e. \tag{3a}$$

---

[1]) Bei kleinen Dämpfungen kann man sich auf das erste Glied der Entwicklung von v nach Potenzen von $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ beschränken und setzt $v = 2\Delta\omega/\omega_0$.

Für periodische Vorgänge folgt unter Abspaltung des Zeitfaktors $e^{i\omega t}$:

$$\Delta \mathfrak{E} + (\omega^2 \varepsilon \mu - i\omega \mu \sigma)\, \mathfrak{E} = i\omega \mu j_e + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \varrho_e. \qquad (3b)$$

Die weiteren Rechnungen denken wir uns stets in kartesischen Koordinaten durchgeführt, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Die rechte Seite von (3b) stellt die Erregung dar, wir betrachten sie als ein vorgegebenes Vektorfeld $\mathfrak{G}(x, y, z)$, über dessen Komponenten $G_i(x, y, z)$ wir die Annahme machen, daß sie stückweise glatte Funktionen in x, y, z sind. Setzen wir

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - i\omega \mu \sigma, \qquad (4)$$

so folgt für $\mathfrak{E}$ die Gleichung

$$\Delta \mathfrak{E} + k^2 \mathfrak{E} = \mathfrak{G}(x, y, z), \qquad (5)$$

deren Lösung wir in bekannter Weise durch Entwicklung von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E}$ nach den Eigenfunktionen der freien Schwingungen des HR gewinnen. Für letztere gilt

$$\Delta \mathfrak{E} + k_0^2 \mathfrak{E} = 0. \qquad (6)$$

Aus der Theorie der freien Schwingungen übernehmen wir folgende bekannte Ergebnisse: In Verbindung mit der Randbedingung $\mathfrak{E}_t = 0$ liefert (6) die Eigenschwingungen und die Eigenwerte k_{0n}[1]). Irgendeine Feldkomponente der n-ten Eigenschwingung, die wir mit E_n bezeichnen, genügt der Gleichung

$$\Delta E_n + k_{0n}^2 E_n = 0 \quad \text{mit} \quad k_{0n}^2 = \omega_{0n}^2 \varepsilon \mu, \qquad (7)$$

wobei ω_{0n} die Eigenfrequenz der n-ten Eigenschwingung ist. Die E_n bilden ein vollständiges orthogonales Funktionensystem; wir nehmen außerdem an, daß sie bereits normiert sind. Es gilt also

$$\left.\begin{aligned} \int_v E_n E_m^* \, \mathrm{d}\tau &= 0 \quad (n \neq m) \\ \int_v |E_n|^2 \, \mathrm{d}\tau &= 1, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

wenn E_n und E_m zwei zu verschiedenen Eigenwerten k_{0n} und k_{0m} gehörige Eigenfunktionen sind[2]).

Sowohl die Komponenten der Erregung $\mathfrak{G}$ als auch des gesuchten Feldes $\mathfrak{E}$ lassen sich (in den Fällen, in denen eine geeignete Greensche Funktion existiert) in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach den

[1]) Die Eigenwerte werden im allgemeinen dreifach indiziert sein; aus Gründen der Zweckmäßigkeit denken wir sie uns nach irgendeinem Schema in eine einfach indizierte Reihe angeordnet. — [2]) Vgl. z. B. F. Borgnis, Ann. d. Phys. (V) **35**, 359, 1939; E. Ledinegg, ebenda **41**, 537, 1942.

Eigenfunktionen E_n entwickeln. Es genügt, wie man einsieht, daß wir uns auf irgendeine der rechtwinkligen Komponenten von $\mathfrak{E}$ (mit E bezeichnet) beschränken; die zugehörige Komponente von $\mathfrak{G}$ sei G. Es besteht also:

$$G = \sum_n g_n E_n \tag{9}$$

mit

$$g_n = \int_v G E_n \, \mathrm{d}\tau. \tag{10}$$

Ebenso

$$E = \sum_n a_n E_n. \tag{11}$$

Nach (5) gilt

$$\Delta E + k^2 E = G. \tag{12}$$

Mit den Ansätzen (9) und (10) folgt

$$\sum_n a_n (\Delta E_n + k^2 E_n) = \sum_n g_n E_n. \tag{13}$$

Unter Berücksichtigung von (7) ergibt sich daraus

$$a_n = \frac{g_n}{k^2 - k_{0n}^2}. \tag{14}$$

Damit lautet die gesuchte Lösung für eine Feldkomponente E

$$E = \sum_n \frac{g_n E_n}{k^2 - k_{0n}^2}. \tag{15}$$

Die Koeffizienten g_n sind mit (10) durch die Art der Anregung bestimmt. Mit Einführung von k^2 und k_{0n}^2 aus (4) und (6) erhält man, wenn keine Dispersion vorliegt, mit $\varepsilon \mu c^2 = 1$ (c Lichtgeschwindigkeit):

$$E = c^2 \sum_n \frac{g_n E_n}{\omega^2 - \omega_{0n}^2 - i \frac{\omega \sigma}{\varepsilon}}. \tag{16}$$

Der Übergang zur reellen Schreibweise liefert mit Einführung der periodischen Zeitfunktion

$$E = c^2 \sum_n \frac{|g_n| \cdot |E_n|}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_{0n}^2)^2 + \left(\frac{\omega \sigma}{\varepsilon}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi_n). \tag{17}$$

Gl. (17) zeigt, daß man jeweils „Resonanz" erhält, wenn sich die erregende Frequenz ω einer Eigenfrequenz ω_{0n} des HR nähert. In der Umgebung einer Eigenfrequenz ω_{0n} wird bei kleinen Dämpfungen (kleinem σ) das n-te Summenglied die übrigen überwiegen. Falls der Koeffizient g_n der Anregung in der Umgebung von ω_{0n} eine in ω langsam veränderliche Funktion ist und der Wert von ω_{0n} einer benachbarten Eigenfrequenz $\omega_{0n \pm 1}$ nicht zu nahe liegt (was z. B. bei Oberschwingungen hoher Ordnung oder bei „leicht aufgespaltenen" mehrfachen

Eigenwerten eintreten kann), läßt sich das Verhalten der Feldkomponente E in Resonanznähe beschreiben durch

$$E_{\omega \approx \omega_{0n}} \approx \frac{c^2 \,|\, g_n(\omega_{0n}) \,|\cdot|\, E_n \,|}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_{0n}^2)^2 + \left(\frac{\omega\,\sigma}{\varepsilon}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi_n). \tag{18}$$

Die Resonanzamplitude ($\omega = \omega_{0n}$) ist umgekehrt proportional der Leitfähigkeit σ. Bezeichnen wir die Resonanzamplitude einer Feldkomponente allgemein mit A_{res}, so erhalten wir unter den angegebenen Voraussetzungen in der Umgebung einer Resonanzstelle für die Amplitude A_n irgendeiner Feldkomponente nach (18)

$$A_n \approx \frac{A_{n\,res}}{\sqrt{1 + \frac{(\omega^2 - \omega_{0n}^2)^2}{\left(\frac{\omega\,\sigma}{\varepsilon}\right)^2}}}. \tag{19}$$

Führt man eine „Dämpfung"

$$d_n = \frac{\sigma}{\varepsilon\,\omega_{0n}} \tag{20}$$

ein, so ergibt sich in Resonanznähe, wenn man die Verstimmung $v_n = \omega/\omega_{0n} - \omega_{0n}/\omega$ einführt, aus (19)

$$A_n \approx \frac{A_{n\,res}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_n}{d_n}\right)^2}}, \tag{21}$$

d. h. derselbe Ausdruck wie in (1) für einen aus Kapazitäten und Selbstinduktionen aufgebauten Resonanzkreis. Die „Halbwertsbreite" des mit einem Dielektrikum der DK ε gleichmäßig erfüllten HR ist an der Resonanzstelle ω_{0n} damit durch den Ausdruck $d_n = \sigma/\varepsilon\omega_{0n}$ gegeben, wenn entsprechend unseren Voraussetzungen von den Stromwärmeverlusten in der metallischen Begrenzung abgesehen wird. Das Resonanzverhalten nach (21) steht in Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen[1]).

Die voranstehenden Betrachtungen lassen sich auch anwenden, wenn Dispersion [$\varepsilon(\omega)$ oder $\mu(\omega)$] vorliegt. An Stelle von (19) tritt dann, wie man aus (15) herleitet, mit $\varepsilon_{0n} = \varepsilon(\omega_{0n})$ und $\mu_{0n} = \mu(\omega_{0n})$

$$A_n = \frac{A_{n\,res}}{\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{\varepsilon\,\mu}{\varepsilon_{0n}\,\mu_{0n}}\,\omega^2 - \omega_{0n}\right)^2}{\left(\frac{\omega\,\sigma}{\varepsilon}\right)^2}}}. \tag{19a}$$

[1]) Siehe z. B. F. Borgnis, Phys. ZS. 43, 284, 1942.

Beschränkt man sich auf die beiden ersten Glieder der Entwicklung

$$\omega \sqrt{\varepsilon \mu} = \omega_{0n} \sqrt{\varepsilon_{0n} \mu_{0n}} + \frac{d(\omega \sqrt{\varepsilon \mu})}{d\omega} (\omega - \omega_{0n}) + \cdots \qquad (22)$$

und führt in bekannter Weise Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

$$V_{gr} = \frac{d\omega}{d(\omega \sqrt{\varepsilon \mu})}, \quad V_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{0n} \mu_{0n}}} \qquad (23)$$

ein, so folgt in Resonanznähe bei kleinem σ ebenfalls die Beziehung (21), jedoch mit[1])

$$d_n = \frac{\sigma}{\omega_{0n} \varepsilon_{0n}} \frac{V_{gr}}{V_{ph}}. \qquad (24)$$

Zusammenfassung. Unter der „Resonanzkurve" eines elektromagnetisch erregten Hohlraums (HR) wird der Verlauf der Amplitude irgendeiner Feldkomponente im HR in Abhängigkeit von der erregenden Frequenz in der Umgebung einer Eigenfrequenz bei konstanter äußerer Erregung verstanden. Betrachtet wird ein HR mit unendlich gut leitender Begrenzung, der gleichmäßig von einem Dielektrikum mit der kleinen Leitfähigkeit σ erfüllt ist. Es wird gezeigt, daß die Resonanzkurve durch denselben analytischen Ausdruck wiedergegeben wird, der von „konzentrierten" Kreisen her bekannt ist, wobei sich entsprechende Ausdrücke für die Dämpfung d (Halbwertsbreite) einführen lassen. Die Resonanzamplitude ist bei konstanten äußeren Verhältnissen umgekehrt proportional der Leitfähigkeit σ.

Graz, I. Physikalisches Institut der Universität.

[1]) Vgl. hierzu auch J. Müller, Hochfr.-Techn. u. Elektr. Ak. **54**, 157, 1939, wo sich eine zu (24) analoge Beziehung bei der Berechnung des nach außen wirksamen Zweipolwiderstandes eines HR in unmittelbarer Umgebung einer Resonanzfrequenz ergibt.

Das zweite Maximum der Rossi-Kurve.

Von **Z. Ozorai** in Budapest.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 16. August 1943.)

In der Arbeit wird gezeigt, daß in der Rossi-Kurve unter bestimmten Bedingungen ein zweites Maximum auftritt, und zwar dann, wenn zwischen die Zählrohre eine Protonen enthaltende Zwischenschicht gelegt wird.

Die Existenz des zweiten Maximums in der Rossi-Kurve wurde verschiedentlich untersucht. Nach den ersten Messungen von Ackemann[1]) und Hummel[2]) wurde ein mehr oder weniger großes zweites Maximum von Drigo[3]), Priebsch[4]) und Clay, Gemert und Wiersma[5]) gefunden, wogegen Schwegler[6]) und Morgan und Nielsen[7]) es nicht fanden. Nach Bothe und Schmeiser[8]) tritt ein zweites Maximum dann auf, wenn zu den Versuchen nur Schauer mit kleinem Divergenzwinkel (4^0) herangezogen werden. Dieses Ergebnis ist aber von den neueren Messungen[9]) nicht unterstützt worden. Nielsen, Morgan und Morgan[10]) sind der Ansicht, daß das zweite Maximum durch Seitenschauer hervorgerufen sein dürfte. Entsprechend den neuesten Messungen von George, Jánossy und Mc Caig[11]) soll das Auftreten des zweiten Maximums bei Bothe und Schmeiser durch die von den genannten Autoren verwendeten speziellen Abmessungen des Sekundärstrahlers bedingt sein. Da die Frage, wie das Maximum bei Bothe und Schmeiser zustande kam, noch immer nicht endgültig geklärt ist, habe ich im Zeitraum August 1937 bis April 1942 die folgenden Versuche ausgeführt.

Fig. 1 zeigt die Meßanordnung. Verwendet wurden Zählrohre von 4 cm innerem Durchmesser und 20 cm (Rohre 1 und 2), 51 cm (Rohr 3) und 56,5 cm (Rohr 4) Länge. Die Ansprechwahrscheinlichkeit

[1]) M. Ackemann, ZS. f. Phys. **94**, 303, 1935. — [2]) J. N. Hummel, Naturwiss. **22**, 170, 1934. — [3]) A. Drigo, Ric. Scient. **88**, 5, 1934. — [4]) J. Priebsch, Wien. Ber. **101**, 145, 1936. — [5]) J. Clay, A. van Gemert u. J. T. Wiersma, Physica **7**, 627, 1936. — [6]) A. Schwegler, ZS. f. Phys. **101**, 93, 1936. — [7]) J. E. Morgan u. W. M. Nielsen, Phys. Rev. **52**, 564, 1937. — [8]) K. Schmeiser u. W. Bothe, Ann. d. Phys. **5**, 32, 161, 1938. — [9]) G. O. Altmann, H. N. Walker, V. F. Hess, Phys. Rev. **58**, 1011, 1940; C. Clay, Rev. Mod. Phys. **11**, 287, 1939; B. Rossi u. L. Jánossy, ebenda **11**, 281, 1939; M. Forró u. Z. Ozorai, Naturwiss. **31**, 140, 1943. — [10]) W. M. Nielsen, J. E. Morgan u. K. Z. Morgan, Phys. Rev. **55**, 995, 1939. — [11]) E. P. George, L. Jánossy und M. Mc Caig, Proc. Roy. Soc. London (A) **219**, 981, 1942.

der Zählrohre betrug $96 \pm 0{,}6\,\%$. Die Anordnung war in allen ihren Abmessungen sehr ähnlich derjenigen, welche Schmeiser[1]) in Weiter-

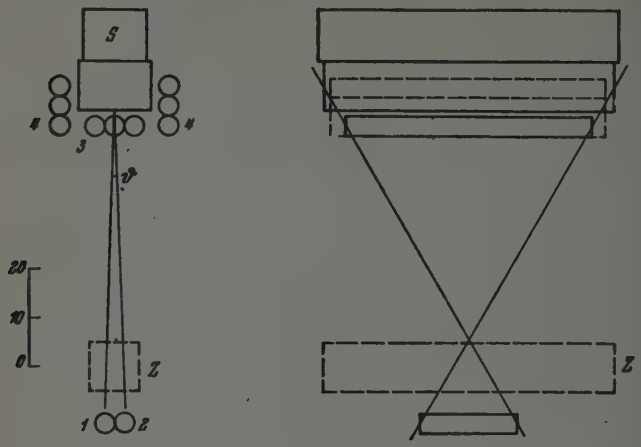


Fig. 1.

führung der Bothe-Schmeiserschen Versuche verwendet hat ($\vartheta = 4^0$). Zur Aussiebung der Seitenschauer habe ich den Sekundärstrahler entlang seiner Längsseite mit je drei parallelgeschalteten Zählrohren umgeben (Rohr 4) und durch eine erweiterte Barnóthysche Koinzidenzanordnung

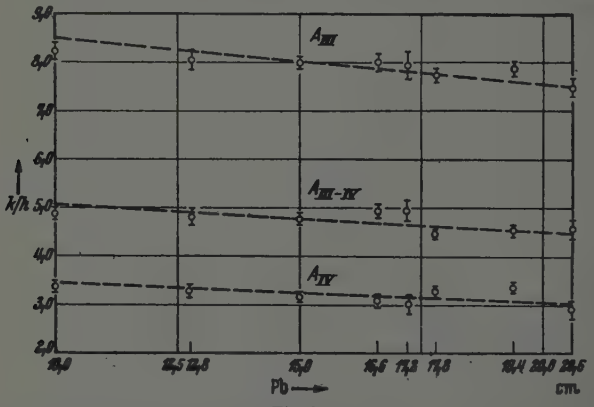


Fig. 2.

gleichzeitig die Zahl der dreifach (1, 2, 3) und die der vierfach (1, 2, 3, 4) Koinzidenzen registriert. Die gleichzeitige Registration ermöglichte eine größere Meßgenauigkeit und Verwendung kürzerer Meßzeiten.

[1]) K. Schmeiser, ZS. f. Phys. 112, 501, 1936.

. In Fig. 2 sind die Meßergebnisse für den Fall, daß an der Stelle Z keine Zwischenschicht liegt, zusammengefaßt. Kurve „A_{III}" zeigt den Verlauf der Dreifach-Koinzidenzen, „A_{IV}" den der Vierfach-Koinzidenzen und „A_{III-IV}" den ihrer Differenz, den Verlauf der Intensität nach Abzug der Seitenschauer, d. h. den der harten Schauer. Die Kurven III und III—IV verlaufen vollkommen gleichsinnig, so daß ich mich des weiteren nur auf die Abbildung der Kurven III beschränken werde. In den Kurven sind jeweils die statistischen Fehler angegeben. Die gestrichelten Linien entsprechen der Gleichung $J(h) = c\, e^{-h\mu}$, wobei c und μ mit der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt wurden. Wie ersichtlich, kann auf keinen der Kurven ein reelles, die Fehlergrenzen dreifach überschreitendes Maximum wahrgenommen werden, trotzdem, daß allein an der Stelle, wo das Maximum zu erwarten war, 6383 Koinzidenzen in 559 Stunden registriert wurden, und dadurch eine fünffache Meßgenauigkeit gegenüber den Messungen von Bothe und Schmeiser erreicht wurde. Aus der Übereinstimmung der Kurven III und III—IV folgt, daß das Auftreten des zweiten Maximums nicht — wie Nielsen, Morgan und Morgan angenommen hatten — durch Seitenschauer verursacht wird.

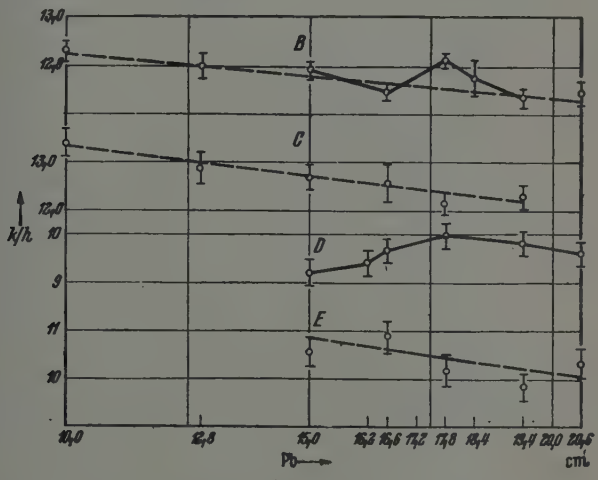


Fig. 3.

In den weiteren Meßreihen habe ich an Stelle Z verschiedene Materialien von jeweils 7 g/cm² Absorberdicke als Zwischenschicht angebracht, und zwar 16 cm Holz, 0,6 cm Blei, 7 cm Wasser und 15 m grobkörnigen Koks. Wie aus Fig. 3 ersichtlich ist, tritt zwischen 15

und 20 cm Pb Sekundärstrahlerdicke bei den Materialien Holz (Kurve *B*) und Wasser (Kurve *D*) ein die Fehlergrenzen dreifach übersteigendes Maximum auf, wogegen bei Blei (Kurve *C*) und Koks (Kurve *E*) keines zu bemerken ist.

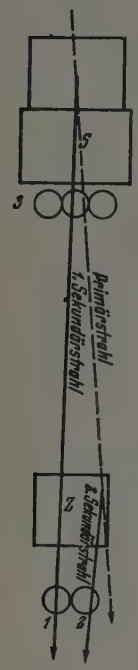


Fig. 4.

Zur Deutung dieser Befunde möchte ich den folgenden Entstehungsmechanismus vorschlagen (Fig. 4): Eine nicht ionisierende Primärstrahlung löst im Sekundärstrahler einen „harten Sekundärstrahl" [siehe Maass[1])] aus, der jedoch nur eines der beiden unteren Rohre (1 oder 2) zum Ansprechen bringen kann, also keine Dreifach-Koinzidenz auslöst. Liegt jedoch eine entsprechende Absorberschicht an der Stelle *Z*, so kann der nicht ionisierende Primärstrahl in ihr einen zweiten Sekundärstrahl auslösen und eine Dreifach-Koinzidenz entstehen. Aus dem Befund, daß die Erhöhung der Koinzidenzzahl nur dann erfolgte, wenn Holz oder Wasser, also freie Protonen enthaltende Substanzen zwischengelegt wurden, kann man folgern, daß die nicht ionisierende Primärstrahlung eine Neutronenstrahlung sein dürfte, welche eventuell bei dem Zerfall sehr energiereicher Mesonen in Protonen und Neutronen[2]) entstehen.

Zur Feststellung, ob tatsächlich die Auslösung des zweiten Strahles in der Zwischenschicht erfolgt oder nicht, habe ich noch folgende Versuchsreihen ausgeführt.

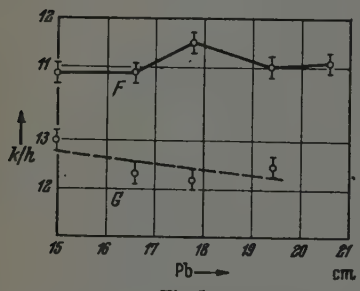


Fig. 5.

Einmal wurde über der 16 cm dicken Holzschicht in *Z* (Kurve *F* in Fig. 5) und ein anderes Mal unter der Holzschicht (Kurve *G*) 0,6 cm Pb aufgelegt. Im Falle Blei über Holz konnte das zweite Maximum wieder beobachtet werden, während es in der Kurve *G* fehlt: Die in der Holzschicht entstehende Sekundärstrahlung wird also durch die darunterliegende Bleischicht absorbiert. Weiter folgt aus dem Ergebnis, daß in Kurve *F* das Maximum an derselben Stelle, bei

[1]) H. Maass, Ann. d. Phys. **27**, 507, 1936. — [2]) R. C. Majomdar u. D. S. Kothari, Nature **143**, 796, 1939; J. Barnóthy, ZS. f. Phys. **115**, 140, 1940.

17,8 cm Pb, liegt, wie in Kurve *B*, daß die Sekundärstrahlen von einer nicht ionisierenden Primärstrahlung ausgelöst werden; denn wäre der Primärstrahl ionisierend, so würde das Anbringen der Bleischicht über der Holzschicht lediglich gleichbedeutend sein mit der Erhöhung der Dicke des Sekundärstrahlers und man würde das Maximum bei der Gesamtdicke 17,8 cm Pb, also bei 17,2 cm Pb Dicke des Sekundärstrahlers erwarten.

Ich möchte auch an dieser Stelle Frau M. Forró und Herrn J. Barnóthy meinen besonderen Dank aussprechen für die Anregung zu diesen Versuchen und für ihre wertvollen Ratschläge und Diskussionen im Laufe dieser Arbeit. Ich danke dem Leiter des Physikalischen Instituts, Herrn Prof. Dr. I. Rybár, für die Ermöglichung der Ausführung dieser Arbeit, der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Szechenyi Wissenschaftlichen Gesellschaft für die gewährten Mittel.

Über ein absolutes Manometer zur Messung niedrigster Gasdrucke.

Von H. Klumb und H. Schwarz.

Mit 15 Abbildungen. (Eingegangen am 21. August 1943.)

Es wird ein nach dem Radiometerprinzip arbeitendes Druckmeßgerät für den Druckbereich von 10^{-2} bis 10^{-8} Torr beschrieben, auf seine Brauchbarkeit untersucht und hinsichtlich seiner Angaben mit Ionisationsmanometern, Kompressionsmanometern und Hitzdrahtmanometern verglichen. Die Versuche zeigen, daß es bei geeigneter Wahl der Meßsysteme möglich ist, solche Drehmomente bei niedriger Schwingungsdauer und geringer Erschütterungsempfindlichkeit zu erzielen, daß unter Verwendung eines elektrodynamischen Kompensationsverfahrens Druckmessungen über einen Druckbereich von mindestens 5 Zehnerpotenzen vorläufig bis auf Drucke der Größenordnung 10^{-7} Torr reproduzierbar möglich sind und daß eine Verwendung solcher Geräte, die eine absolute Auswertung zulassen, bis zu wesentlich geringeren Drucken (10^{-8} Torr und weniger) möglich ist. Das Verhalten der Geräte wird im Druckbereich von 1 Torr bis 10^{-7} Torr untersucht.

Die Messung von Gas- und Dampfdrucken unterhalb 10^{-2} Torr geschieht, abgesehen von der Verwendung von Reibungsmanometern[1]) und Kompressionsmanometern, vorwiegend mit thermischen Manometern [Hitzdrahtmanometern[2]), Bimetallmanometern[3])] bzw. Ionisationsmanometern[4]).

---

[1]) W. Sutherland, Phil. Mag. **43**, 83, 1897; P. E. Shaw, Proc. Phys. Soc. **29**, 171, 1917; I. Langmuir, Journ. Amer. Chem. Soc. **35**, 1907, 1913; F. Haber u. W. Kerschbaum, ZS. f. Elektrochem. **20**, 296, 1914. — S. L. Hoog, Proc. Amer. Akad. **42**, 115, 1906; **45**, 3, 1909; I. Nicliborc, Acta Phys. Polon. **4**, 85, 1935; G. Wetterer, ZS. f. techn. Phys. **20**, 281, 1939; Wiss. Veröff. a. d. Siemenswerken **19**, 68, 1940. — [2]) P. Pirani, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **8**, 686, 1906; W. Voege, Phys. ZS. **7**, 498, 1906; W. Rohn, ZS. f. Elektrochem. **20**, 539, 1914; H. Murmann, ZS. f. Phys. **86**, 14, 1933; ZS. f. techn. Phys. **14**, 538, 1933; Th. Haase, G. Klages u. H. Klumb, Phys. ZS. **37**, 440, 1936; H. Seemann, Phys. ZS. **37**, 446, 1936; M. Schérer, Compt. rend. **208**, 426, 1939; W. Hunsmann, ZS. f. Elektrochem. **44**, 540, 1938; W. I. H. Moll u. H. C. Burger, ZS. f. techn. Phys. **21**, 199, 1940; St. v. Friesen, Ark. Mat. Astr. och Fys. (B) **27**, Nr. 11, Heft 4, 1941; W. Bartholomeyczyk, ZS. f. techn. Phys. **22**, 25, 1941; E. Weise, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. (3) **23**, 77, 1942. — [3]) H. Klumb u. Th. Haase, Phys. ZS. **37**, 27, 1936. — [4]) H. Simon, ZS. f. techn. Phys. **5**, 221, 1924; G. Spiwak u. A. G. Ignatow, Phys. ZS. d. UdSSR. **6**, 53, 1934; N. Morgulis, ebenda **5**, 407, 1934; M. I. Copley, T. E. Phipps u. J. Glasser, Rev. Scient. Instr. **6**, 371, 1935; R. D. Huntoon u. A. Ellett, Phys. Rev. **49**, 381, 1936; F. M. Penning, Physica **4**, 71, 1937; J. B. H. Kuper, Rev. Scient. Instr. **8**, 394, 1937; C. G. u. D. D. Montgomery, ebenda **9**, 58, 1938; R. S. Morse u. R. M. Bowie, ebenda **11**, 91, 1940; L. N. Ridenour, ebenda **12**, 134, 1941; W. E. Parkins u. W. A. Higinbotham, ebenda **12**, 366, 1941; St. van Friesen, l. c.

Die thermischen Manometer sind vorzugsweise im Druckgebiet von 10^{-1} bis 10^{-5} Torr verwendbar (Verwendbarkeit für höhere Drucke siehe z. B. Klumb, Haase, l. c.). Bei Drucken unterhalb 10^{-3} Torr werden sie unempfindlich, die untere Grenze ihrer Verwendbarkeit liegt praktisch bei 10^{-4} Torr.

Die Ionisationsmanometer finden Verwendung im Druckgebiet unterhalb 10^{-3} Torr. Ihre Anwendung ist nach tiefen Drucken durch die Empfindlichkeit des benutzten Galvanometers begrenzt, also für ein Galvanometer der Empfindlichkeit 10^{-8} A/Skalenteil bei 10^{-6} Torr. Durch Anwendung empfindlicher Meßgeräte bzw. Verwendung der Elektronenpendelung[1]) sowie durch das Aufspulen von Elektronen in magnetischen Feldern[2]) (Magnetronmanometer) kann der Meßbereich nach niedrigen Drucken bis 10^{-7} Torr und weiter ausgedehnt werden. Die auf dem Gebiet der Messung niedrigster Gasdrucke vorliegenden eigenen Erfahrungen sprechen jedoch dafür, daß angesichts der Anwesenheit hoch erhitzter Metallteile (Kathoden, Gitter) und angesichts des Ablaufes von Ionisations- und Anregungsprozessen (Dissoziationen und chemische Aktivierung der Gas- und Dampfreste) im Gasraum infolge der hiermit verbundenen unkontrollierbaren Gasabgabe und -aufzehrungen Druckmessungen und Druckangaben unterhalb 10^{-4} Torr notwendig unsicher werden und in ihrer physikalischen Bedeutung in jedem Einzelfalle einer sehr sorgfältigen Kritik bedürfen, Druckangaben unterhalb 10^{-5} Torr sind vollends fragwürdig[3]).

Im Gegensatz zu den beiden erstgenannten Manometerklassen haben die nach dem Radiometerprinzip[4]) arbeitenden Manometer in ihren verschiedenen Ausführungsformen[5]) bisher nur in einzelnen

[1]) W. Gaede, ZS. f. techn. Phys. **15**, 664, 1934. — [2]) H. Klumb u. Th. Haase, Phys. ZS. **37**, 27, 1936. — [3]) H. Schwarz, ZS. f. Phys., erscheint demnächst. — [4]) M. Knudsen, Ann. d. Phys. **31**, 633, 1910; M. Czerny u. G. Hettner, ZS. f. Phys. **30**, 258, 1914; G. Hettner, Ergebn. d. exakten Naturwiss. **7**, 209, 1928; S. Weber, Medd. Kopenhagen **14**, Nr. 13, 1937. — [5]) E. v. Angerer, Ann. d. Phys. **41**, 1, 1913; M. Knudsen, ebenda **44**, 525, 1914; J. W. Woodrow, Phys. Rev. **4**, 491, 1914; I. E. Shrader u. R. G. Sherwood, ebenda **12**, 70, 1918; L. F. Richardson, Proc. Phys. Soc. **31**, 270, 1919; H. Riegger, ZS. f. techn. Phys. **1**, 66, 1920; L. Dunoyer, La technique du vide, S. 85, Paris 1924; E. Fredlund, Ann. d. Phys. (5) **14**, 617, 1932; G. Spiwak, ZS. f. Phys. **77**, 123, 1932; W. Gaede, ZS. f. techn. Phys. **15**, 664, 1934; J. W. M. Mond u. W. M. Pichels, Rev. Scient. Instr. **6**, 362, 1935; P. Bonét-Maury, Compt. rend. **203**, 839, 1936; E. Fredlund, Ann. d. Phys. (5) **30**, 99, 1937; A. L. Hughes, Rev. Scient. Instr. **8**, 409, 1937; A. E. Lockenvitz, ebenda **9**, 417, 1938; E. Fredlund, Phil. Mag. (7) **26**, 987, 1938; S. Werner, ZS. f. techn. Phys. **20**, 13, 1939.

Fällen bei wissenschaftlichen Untersuchungen Verwendung gefunden, wofür ihre große Empfindlichkeit gegenüber den in der experimentellen Praxis unvermeidlichen mechanischen Erschütterungen und ihre Empfindlichkeit gegenüber elektrischen und thermischen Beeinflussungen verantwortlich zu machen sind.

Bei sorgfältiger kritischer Würdigung der einzelnen Meßverfahren für niedrigste Drucke gelangt man zu der Auffassung, daß die zuverlässige Messung von Drucken der Größenordnung 10^{-5} Torr etwa die untere Grenze des mit praktisch verwendbaren Geräten heute physikalisch zuverlässig beherrschbaren Druckbereiches darstellt, ein Bereich, der wahrscheinlich mehrere Zehnerpotenzen höher liegt als die tiefsten mit modernen Evakuierungsverfahren technisch erreichbaren Druckgebiete.

Dieser Tatbestand legt den Wunsch nach der Schaffung von zuverlässigen Meßgeräten und Meßverfahren für das Druckgebiet unterhalb 10^{-5} Torr nahe.

Die hinsichtlich der Messung niedrigster Gas- und Dampfdrucke vorliegenden Erfahrungen[1]) ergeben folgende grundsätzlichen Bedingungen für zuverlässig arbeitende Meßverfahren:

1. Die im Meßgerät vorhandenen Metallmengen müssen so klein wie möglich sein und ein Entgasen auf etwa 800° C zulassen.

2. Es dürfen im Meßgerät keine heißen Metallteile mit großer Oberfläche vorhanden sein.

3. Es dürfen im Meßgerät keine glühenden Metalle oder Metalloxyde, z. B. Glühkathoden, vorhanden sein.

4. Es dürfen im Meßgerät keine Potentialdifferenzen vorhanden sein, die größer sind als die Dissoziationsenergie bzw. Anregungs- oder Ionisierungsspannung der vorhandenen Restgase.

Diese Bedingungen schließen eine Anzahl von Meßverfahren — die Verwendung als qualitativer Druckindikator bleibt hiervon unabhängig bestehen — zur Messung niedriger Drucke aus. Erhalten bleiben neben den nach Art des Quarzfadenmanometers arbeitenden Reibungsmanometern die nach dem Radiometerprinzip arbeitenden Geräte.

Da die Radiometergeräte zugleich den großen Vorzug besitzen, daß ihre Angaben vom Molekulargewicht weitgehend unabhängig sind, so bieten sie die Möglichkeit, brauchbare Geräte zur Messung gerade

[1]) Siehe H. Klumb und Mitarbeiter, loc. cit.

der niedrigsten Gasdrucke zu schaffen, wenn es gelingt, Formen zu finden, die folgende Merkmale besitzen:

1. Große Drehmomente bei kleinen Trägheitsmomenten.
2. Unempfindlichkeit gegen Erschütterungen und andere Störungen.
3. Linearität der Ausschläge mit dem Druck.
4. Ein Meßbereich von mindestens 4, besser 6 Zehnerpotenzen.
5. Die Möglichkeit einer Benutzung als absolutes Gerät.

Im folgenden werden Untersuchungen an solchen Geräten beschrieben.

Die Apparatur.

Die verwendete Apparatur zeigt Fig. 1, P und Q ist ein Öldampfpumpenaggregat, F_1 die erste Ausfrierfalle, H_1 und H_2 Hochvakuum-

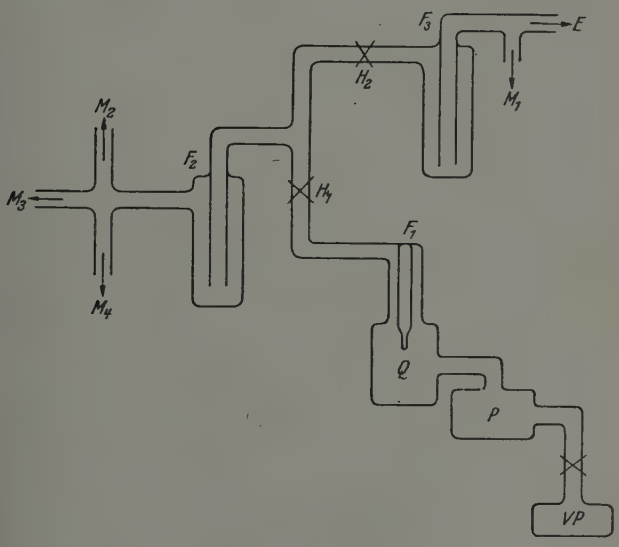


Fig. 1.

hähne mit Apiezonfett, F_2 die zweite Ausfrierfalle, M_1 ein mit Ausfrierfalle F_3 versehenes MacLeod von 200 cm³ Volumen, E der Gaseinlaß mit Dosierungsgerät. An die Ansätze M_2, M_3 und M_4 wurden die zu untersuchenden bzw. zu vergleichenden Druckmeßgeräte angeschmolzen. Die Rohrweiten betrugen 25 bis 35 mm. Die Pumpleitungen wurden beim Evakuieren mit einem Brenner erhitzt und entgast. Bei Verwendung von Trockeneis-Acetongemisch als Kühlmittel wurden hierbei

Endvakua von 1,2 bis $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ Torr, bei Verwendung von flüssiger Luft 2 bis $3 \cdot 10^{-7}$ Torr erreicht und dauernd gehalten.

Die Pumpleitungen waren tunlichst kurz gehalten, gefettete Schliffe wurden in der Apparatur selbst vermieden. Kittungen mit weißem Siegellack wurden verwendet, wo die Kittung im Betrieb völlig kalt blieb. Auch wurden eventuelle Kittdämpfe an verschiedenen Stellen ausgefroren.

Als Füllgase dienten: Luft, Wasserstoff, Stickstoff, Argon und Kohlensäure. Wasserstoff und Kohlensäure wurden ungereinigt aus Stahlflaschen entnommen. Stickstoff und Argon waren reine Präparate mit weniger als 1% Verunreinigung.

Druckmeßgeräte.

Es wurden folgende Druckgeräte untersucht und gegenseitig verglichen:

1. Radiometer[1]) der unten genannten Bauart.
2. Ionisationsmanometer verschiedener Typen[2]) in der üblichen Bremsfeldschaltung.
3. Magnetronmanometer[3]) mit ungeschlitzter Anode, Seitenplatten und kathodenparallelem Magnetfeld.
4. Hitzdrahtmanometer verschiedener Bauart.

Als Vergleichsgerät diente bis zu Drucken von 10^{-5} Torr ein MacLeod von 200 cm^3 Volumen, für Drucke zwischen 10^0 und 10^{-1} Torr ein U-förmiges Quecksilbermanometer mit Widerstandsablesung[4]).

Es wurde ein systematischer Vergleich der Empfindlichkeit und der sonstigen Meßeigenschaften der verschiedenen Manometer für verschiedene Gase im Druckbereich von 10^0 bis 10^{-7} Torr durchgeführt.

Das neue Manometer.

Unter Berücksichtigung der eingangs genannten Bedingungen für die Messung niedriger Gasdrucke wurde ein thermisches Molekularmanometer entwickelt, dessen Arbeitsschema Fig. 2 angibt.

---

[1]) Im folgenden werden wir alle unter Ausnutzung der kinetischen Energie der Molekülstöße arbeitenden Manometer als Molekularmanometer bezeichnen, und zwar als thermische oder mechanische Molekularmanometer, je nachdem auf welchem Wege den Molekülen eine erhöhte kinetische Energie erteilt wurde. Die Radiometer sind hiermit thermische Molekularmanometer, mechanische Molekularmanometer, z. B. das Molekularmanometer nach Langmuir-Dushman. — [2]) H. Klumb u. H. Schwarz, erscheint demnächst. — [3]) H. Klumb u. Th. Haase, Phys. ZS. 37, 27, 1936. — [4]) H. Klumb u. Th. Haase, ZS. f. techn. Phys. 13, 392, 1932.

Im Innern eines Hohlraumes G ist ein zylindrischer Körper H, der sogenannte Heizkörper, von der Temperatur T_1 so angeordnet, daß zwischen den beiden Wandungen ein ringförmiger freier Raum entsteht. In diesem Raum ist ein leichtes und leicht drehbares Meßsystem R angebracht. Das Meßsystem besteht aus einem Zylinder, der

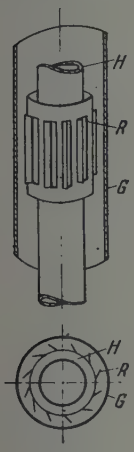


Fig. 2.

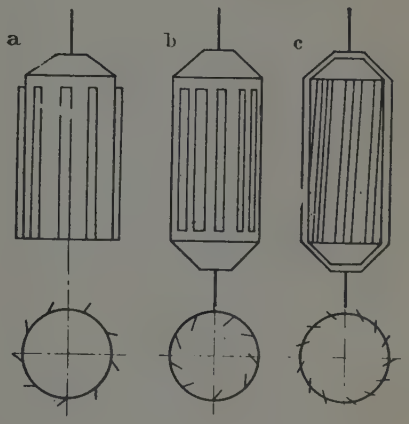


Fig. 3.

mit schiefgestellten Längsschaufeln versehen ist und unter der Wirkung von Radiometerkräften ein Drehmoment erfährt. Fig. 3 zeigt einige Systemformen, die an Quarzfäden oder Wolframfäden aufgehängt bzw. nach Art der Spannbandlagerung zwischen Wolframdrähten gespannt gelagert werden. Die Systeme haben Radien von 0,5 bis 1,2 cm bei Mindestlängen von 2 bis 3 cm.

Tabelle 1 zeigt eine Zusammenstellung einiger untersuchter Systeme für Fadenaufhängung und Spannbandaufhängung mit Angaben ihrer

Tabelle 1. Mechanische Daten zu den benutzten Manometersystemen.

	Durchmesser des W-Fadens in cm	Länge des W-Fadens in cm	Schwingungsdauer ungedämpft in sec	Trägheitsmoment in g · cm²	Direktionskraft in Dyn · cm	
System I	0,002	7,5	8,2	0,482	0,283	
„ II	0,002	8,0	8,5	0,485	0,265	
„ III	0,002	8,0	11,2	0,842	0,266	mit Induktionsring
„ IV	0,001	8,0	45,0	0,850	0,0166	mit Induktionsring
„ V	0,002	8,0	11,0	0,813	0,266	mit Induktionsring
„ VI	0,002	oben 3,6 unten 6,6	5,4	0,435	0,59	

Trägheitsmomente, Direktionskräfte und Schwingungsdauern. Ein zusammengebautes Meßsystem zeigt Fig. 4. Hier bedeutet R das System, T den Systemträger, S den Ablesespiegel oder Ablesezeiger, J den sogenannten Induktionsring (s. unten), F den Aufhängefaden.

Fig. 4.

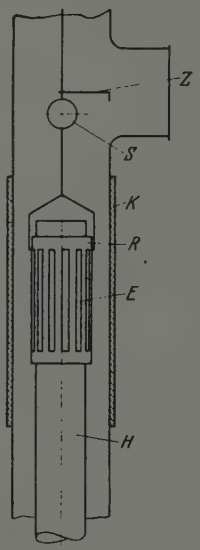


Fig. 5.

Fig. 5 zeigt ein System im Gehäuse einmontiert. Die Drehung des Meßsystems wird mit Fernrohr und Skala abgelesen, doch läßt sich angesichts der Größe der Effekte auch Lichtzeigerablesung und normale Zeigerablesung verwenden.

Durch die hier gewählte Form des Meßsystems werden eine Reihe wichtiger Vorteile erreicht:

1. Die Empfindlichkeit ist unabhängig vom Ausschlag.

2. Die symmetrische Bauart und kleine seitliche Ausladung der Systeme ergeben eine gute Stabilität gegen mechanische Erschütterungen.

3. Es lassen sich bei kleinen Trägheitsmomenten sehr große Drehmomente erzielen.

4. Die Aufhängung des Systems in dem weitgehend geschlossenen Ringspalt vermindert die Möglichkeit von äußeren (thermischen oder elektrischen) Störungen.

Die Heizkörper.

Die Temperaturverteilung am Manometer wurde so gewählt, daß der zentral liegende Heizkörper auf Temperaturen T_1 von 290° K bis maximal 470° K beheizt wird. Der äußere Mantel des Ringspaltes wird durch Wasserkühlung auf einer Temperatur T_2 von etwa 283° K gehalten, bei Versuchsgeräten wurde mit fester Kohlensäure oder flüssiger Luft auf 200° K bzw. auf 90° K gekühlt. Da für die Brauchbarkeit des Gerätes die Konstanz der gegenseitigen Lage der beheizten und gekühlten Fläche von Wichtigkeit ist und an den Heizkörpern Sorptionserscheinungen und katalytische Prozesse weitgehend vermieden

werden müssen, so werden als Heizkörper starkwandige Glasrohre verwendet, in deren Innerem elektrisch beheizte Heizwicklungen angeordnet sind. Fig. 6 zeigt zwei typische Heizkörperformen:

a) für Geräte mit Torsionsaufhängung,
b) für Geräte mit Spannband- oder Spitzenlagerung.

Abgesehen davon, daß durch diese Wahl der Heizkörper die im Manometer vorhandenen Metallmengen auf ein Minimum reduziert werden, hat die Form a den Vorteil, daß die elektrische Heizwicklung leicht entfernt und ausgetauscht werden kann.

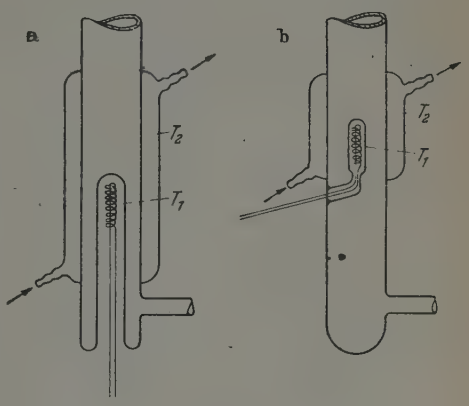


Fig. 6.

Die Dämpfung.

Alle Radiometer, wie alle Manometer mit beweglichen Systemen, werden bei niedrigen Drucken infolge des Wegfalls der Dämpfung durch Gasreibung stark erschütterungsempfindlich, so daß die an sich großen Meßempfindlichkeiten bei der Verwendung an normalen Pumpapparaturen und bei normaler Aufstellung durch den sehr hohen mechanischen Störspiegel oft bereits bei 10^{-5} Torr natürlich begrenzt werden. Es ist daher notwendig, eine kräftige druckunabhängige Zusatzdämpfung zu schaffen. Dies wurde durch eine elektromagnetische Dämpfung erreicht. Das Meßsystem selbst, oder ein am Systemträger vorgesehener Kurzschlußbügel von einer oder mehreren Windungen wird der Einwirkung eines kräftigen magnetischen Feldes ausgesetzt (als Magnet wurde ein Leyboldscher Elektromagnet verwendet).

Tabelle 2 zeigt die Resultate von Dämpfungsmessungen am Manometersystem Nr. 2 mit Aufhängung an Wolframdraht von 0,02 mm Durchmesser und 8,5 sec Schwingungsdauer. Der große elektrische Aufwand zur Erzielung der notwendigen Dämpfung (eisengeschlossener Magnet, Ströme bis 2 Amp.) ist dadurch verursacht, daß die bisher ohne Rücksicht auf die Verwendung eines äußeren Magnetfeldes durchgeführte Bauart des Manometergehäuses zur Verwendung von Luftspalten von 40 bis 60 mm zwang, ein Mangel, der sich ohne weiteres

Tabelle 2. Elektromagnetische Dämpfung des Systems Nr. 2 bei 60 mm Abstand der Polschuhe.

(Als Induktionsring diente das System R selbst.)

Spulenstrom in A: / Feldstärke in Gauß:	0,5 / 400	1,0 / 750	1,5 / 1150	2,0 / 1550	2,5 / 1950
1. Amplitude α_1 ...	105	48	30	219	44
2. „ α_2 ...	89	28	23	27	1
3. „ α_3 ...	75	16	7	4	
4. „ α_4 ...	63	9	3		
5. „ α_5 ...	45	5,5			
6. „ α_6 ...	38				
Dämpfungsverhältnis.					
$k = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$	1,4	3,0	4,3	55	aperiodisch
$\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$	1,41	3,1	7,7		
$\frac{\alpha_5}{\alpha_6}$	1,66	2,9			
$\frac{\alpha_4}{\alpha_6}$	1,66				

beseitigen läßt. Fig. 7 zeigt ein Konstruktionsbeispiel für ein Manometer mit geringem magnetischem Aufwand bei dem nach dem von H. Klumb angegebenen und für Magnetronröhren erprobten Prinzip die Polspitzen des magnetischen Kreises durch die Wandung des Manometergehäuses hindurchgeführt sind, womit sich erfahrungsgemäß eine Senkung des Gewichts- und Leistungsaufwandes von etwa einer Zehnerpotenz erreichen läßt.

Auf dem angegebenen Weg ließen sich befriedigende Dämpfungen erzielen.

Die Kompensation.

Ein für die Praxis brauchbares Druckmeßgerät soll einen Meßbereich von mindestens 4, besser 5 bis 6 Zehnerpotenzen besitzen. Mit Lichtzeiger oder Spiegelablesung lassen sich Meßbereiche von mehr als 3 Zehnerpotenzen nicht erreichen. Bei den vorliegenden Versuchen wird daher neben den üblichen Spiegelablesungen ein Kompensationsverfahren verwendet, bei dem der Ausschlag des Manometers durch ein von außen aufgeprägtes, genau meßbares Gegendrehmoment kompensiert wird und das kompensierende Drehmoment als Maß für die Größe des Druckes benutzt wird. Da sich eine Verwendung magnetischer Drehmomente unter Anwendung von Magnet- oder Weicheisenstäbchen

am Meßsystem wegen der dadurch bedingten magnetischen Störanfälligkeit von selbst verbot, wurde das Drehmoment auf induktivem Wege hergestellt. Eine am Systemträger vorgesehene eisenfreie Kurzschlußwicklung wurde der Einwirkung eines äußeren elektromagnetischen Wechselfeldes (Frequenzen oberhalb 25 Hertz) ausgesetzt. Die Größe des zur Kompensation des Manometerausschlages notwendigen induktiven Drehmomentes (Größe der notwendigen Wechselströme) dient als Maß für den Druck. Die Kompensation läßt sich mit der Dämpfung vereinigen, indem dem Gleichstrom der Dämpfungsmagnete ein Kompensationswechselstrom überlagert wird oder ein Kompensationswechselfeld durch Anbringen einer Hilfswicklung auf dem Elektromagneten dem Dämpfungsfeld überlagert wird. Bezeichnet man mit dem Ausdruck S/i^2 die sogenannte Kompensationsempfindlichkeit eines Manometersystems, wobei S den Ausschlag in mm-Skalenteilen bei 100 cm Skalenabstand, i die Stromstärke des Kompensationswechselstromes bedeutet, so gibt Tabelle 3 die bisher bei Versuchsgeräten erreichten Kompensationsempfindlichkeiten. Bei Verwendung kräftiger Wechsel-

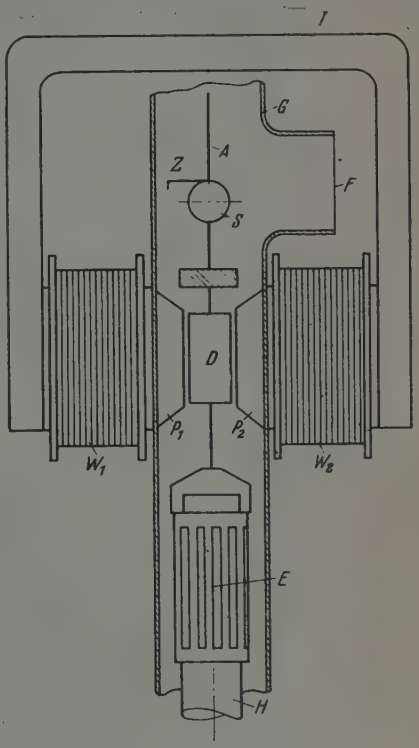


Fig. 7.

Tabelle 3. Kompensationsempfindlichkeit der einzelnen Systeme.

System-Nr.	Kompensationsempfindlichkeit $S : i^2$	System-Nr.	Kompensationsempfindlichkeit $S : i^2$
1	128	3	393
2	80	4	6290

felder gelang es trotz der noch sehr ungünstigen Anordnung der Felder (Luftspalte 35 bis 60 mm) Ausschläge bis zur Größenordnung 10^5 Skalenteile zu kompensieren, so daß damit ein Meßbereich von mindestens 5 Zehnerpotenzen erreicht und laufend verwendet wurde.

Störanfälligkeit.

Die mechanische Störanfälligkeit des Manometers ist bei Verwendung eines gut angepaßten Dämpfungsfeldes entsprechend der eines Spiegelgalvanometers oder Spannbandgalvanometers ähnlicher Systemgröße und Schwingungsdauer, so daß auch bei laufenden Pumpen mit Skalenabständen von 100 bis 200 cm gemessen werden kann.

Die thermische Störanfälligkeit durch Strahlung heißer Körper im Außenraum ist praktisch vernachlässigbar.

Bei Glasinstrumenten ergaben Bunsenbrenner in 20 cm Abstand keine erkennbaren Störausschläge. Bei guter Kompensation des magnetischen Eigenmomentes des Meßsystems sind die Beeinflussungen durch äußere magnetische Störfelder praktisch gleich Null. Bei unvollkommener magnetischer Kompensation ist der Einfluß der im Laboratorium normalerweise vorhandenen Streufelder (Gleich- und Wechselfelder) meist zu vernachlässigen.

Beim Anlegen von Hochspannung (Spannungen oberhalb 3000 Volt) oder von Hochfrequenzspannungen (Hochfrequenzentladungen eines Vakuumprüfers) an die Apparatur treten bei Instrumenten mit Glasgehäuse Störausschläge bis zum zeitweisen Festkleben des Systems auf. Beim häufigen Vorkommen solcher starken Störungen empfiehlt sich die Verwendung von außen metallisierten Glas- und Keramik- oder von Metallgehäusen. Beim Arbeiten mit den üblichen im Laboratorium verwendeten Spannungen wurden keine Störungen beobachtet.

Gaskinetische Störungen.

Gaskinetische Störungen sind zu erwarten durch Gasabgaben und plötzliche Gasausbrüche an Teilen des Systems und des Gehäuses. Derartige Störungen wurden bisher nicht beobachtet. Es tritt lediglich beim ersten Entgasen nach längerem Stehen an Luft ein negativer Ausschlag auf — wahrscheinlich infolge von Gasabgabe des Meßsystems —, der rasch zurückgeht.

Die zu messenden Größen.

Der Nullpunkt des Manometers ist definiert durch seine Ruhelage für den Fall $T_1 = T_2$. Bei unempfindlichen Geräten, die nur zur Druckmessung oberhalb 10^{-6} Torr verwendet werden sollen, kann unter gewissen Vorsichtsmaßnahmen als Nullpunkt des Instruments seine Ruhelage bei einem unterhalb 10^{-6} Torr liegenden Grenzvakuum benutzt werden. Diese muß mit der Ruhelage für $T_1 = T_2$ praktisch zusammenfallen.

Für das Manometer gilt die Beziehung:

$$D \cdot \varphi = c \cdot p,$$

wobei D die Direktionskraft, φ den Winkelausschlag, p den Druck in Torr und c eine Konstante des Manometers bedeuten, in die das Temperaturverhältnis, Größe, Form und Lage der Prallflächen eingehen.

Die Größe $C_0 = D/c$ wird dann als der Reduktionsfaktor des Manometers bezeichnet und in Torr je Winkeleinheit gemessen. Die Größe $1/C_0 = E_0$, gemessen in Winkelausschlag je Torr bei einem gegebenen Temperaturverhältnis T_1/T_2 wird als die Manometerempfindlichkeit bezeichnet.

Für die Praxis bequemer wird die Empfindlichkeit E_d des Manometers bei einem gegebenen Temperaturverhältnis definiert als der bei einem Druck von $1 \cdot 10^{-5}$ Torr und 1000 Skalenteilen Skalenabstand gemessenen Ausschlag in Skalenteilen. Der entsprechende praktische Reduktionsfaktor C ist dann definiert als der Druck $C = \frac{1 \cdot 10^{-5}}{E_d}$, den ein Skalenteil bei 1000 Skalenteilen Abstand anzeigt.

Die Größe der Empfindlichkeit ist gegeben durch die Beziehung:

$$E_d = k\left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right),$$

wobei der Wert der Konstanten k von Größe, Form und Lage der Prallflächen, der Direktionskraft und eventuell von dem Akkomodationskoeffizienten des verwendeten Gases abhängt.

Die Einfachheit und Symmetrie des Temperaturfeldes und der Meßsysteme legten den Versuch nahe, den Reduktionsfaktor eines gegebenen Systems bei einem gegebenen Temperaturverhältnis zu berechnen. Für ein handgefertigtes, d. h. relativ roh hergestelltes System mit 14 Prallflächen von einer wirksamen mittleren Länge und Breite von $2{,}6 \cdot 0{,}2$ cm ergab sich bei einem mittleren Anstellwinkel

der Prallflächen von etwa 30° ein berechneter Reduktionsfaktor von $5{,}4 \cdot 10^{-7}$. Die experimentelle Nachprüfung ergab einen Wert von $7{,}2 \cdot 10^{-7}$. Angesichts der am System vorhandenen Ungenauigkeiten, vor allem der etwa $\pm 20\,\%$ betragenden Streuungen der Anstellwinkel sowie der Tatsache, daß die Größe der Prallflächen nicht groß gegenüber dem Abstand der Flächen war[1]), ist diese Übereinstimmung durchaus befriedigend und deutet auf die Möglichkeit hin, bei mäßigen Genauigkeitsansprüchen das Instrument als absolutes Manometer zu benutzen.

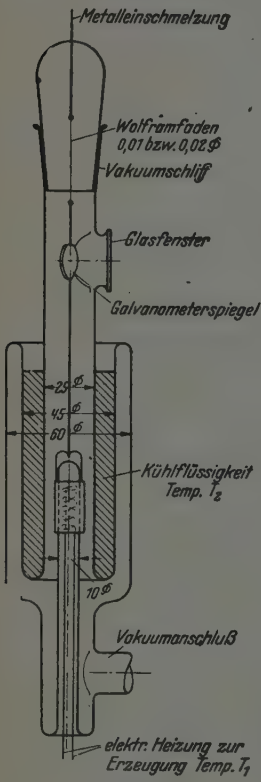


Fig. 8.

Fig. 8 zeigt ein Versuchsmanometer in Glasbauweise, das mit Trockeneis-Acetongemisch bzw. mit flüssiger Luft auf Temperaturen bis -200 bzw. 90° K gekühlt und bei diesen Temperaturen untersucht werden kann.

Die Messungen.

Die Messungen wurden in folgender Weise durchgeführt. Nach gutem Entgasen der Apparatur wurde mit dem Dosierungsgerät unter mehrfachem Spülen das zum Versuch zu verwendende Füllgas eingelassen. Der Druck des Füllgases wurde einmal mit einem MacLeod-Manometer von 200 cm^3 Kugelvolumen, zum anderen mit einem Ionisationsmanometer gemessen. Das Ionisationsmanometer, eine Triode, die in üblicher Bremsfeldschaltung mit negativer Anode geschaltet war, hatte folgende Daten:

1. Anodendurchmesser 20 mm; Anodenlänge 30 mm.
2. Gitterdurchmesser 7,5 mm; Windungszahl 18.
3. Kathodendurchmesser 0,2 mm; Kathodenlänge 50 mm.

Es wurde dafür Sorge getragen, daß die Elektroden des Ionisationsmanometers mit dem Versuchsgas absorptiv gesättigt waren und daß alle Gasabgabe- und Gasaufzehrungserscheinungen unter Berück-

[1]) G. Spiwak, ZS. f. Phys. 77, 123, 1932.

sichtigung spezieller Untersuchungen des einen von uns[1]) über gaskinetische Vorgänge in Ionisations- und Magnetronmanometern weitgehend vermieden wurden. Infolge dieser Vorsichtsmaßnahmen dürften die Druckangaben des mit dem McLeod geeichten Ionisationsmanometers als leidlich zuverlässig angesehen werden und lassen angesichts des guten Entgasungszustandes der Apparatur und der guten absorptiven Sättigung des Manometers mit dem zu messenden Gas in engen Grenzen noch eine Extrapolation nach niedrigeren Drucken zu.

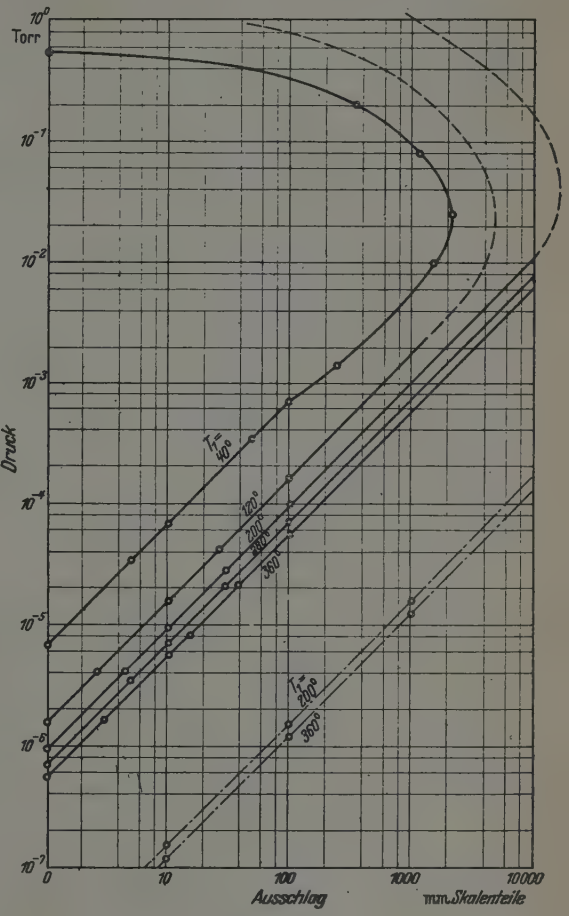


Fig. 9.

Bei den in dieser Weise bestimmten Drucken wurden die Ausschläge des nach dem Radiometerprinzip arbeitenden Manometers als Funktion der Temperatur, der Gasart, der Systemmaße, des Durchmessers des Aufhängefadens usw. bestimmt. Fig. 9 zeigt die Ausschläge des Manometers als Funktion des Druckes für Luftfüllung und für verschiedene Temperaturen T_1 des Heizkörpers. Die ausgezogenen Kurven gelten für ein Gerät mit 0,02 mm Aufhängefaden und einer Gehäusetemperatur von 13° C (Wasserkühlung), die strichpunktierten Kurven für ein Gerät

[1]) H. Schwarz, ZS. f. Phys., erscheint demnächst.

mit 0,01 mm Aufhängefaden und einer Außentemperatur von — 180° C (Kühlung mit flüssiger Luft). Man erkennt, daß die Angaben des Manometers im Druckbereich $1 \cdot 10^{-2}$ bis 10^{-7} Torr in sehr guter Näherung druckproportional sind. Unterhalb eines Druckes von je nach Heiztemperatur 3 bis $5 \cdot 10^{-2}$ Torr nimmt der Ausschlag mit wachsendem Druck ab. Bei Drucken von etwa 10^{0} Torr treten sogar negative Ausschläge auf, die auf Gleitungseffekte[1]) zurückzuführen sind. Die Angaben des Manometers sind also nur dann eindeutig, wenn bekannt ist, ob der zu messende Druck unterhalb oder oberhalb von $3 \cdot 10^{-2}$ Torr liegt. Steht dies fest, so können die Manometer bis zu Drucken von etwa 1,0 Torr verwendet werden.

Man erkennt ferner, daß bereits mit recht robusten Systemen Drucke bis zur Größenordnung 10^{-6} Torr meßbar sind. Die empfindlicheren Ausführungen erreichen unschwer das Druckgebiet von 10^{-8} Torr. Eine weitere Erhöhung der Empfindlichkeit um mindestens eine Zehnerpotenz — ein Versuch, der weiteren Untersuchungen vorbehalten bleibt — liegt durchaus im Bereich des technisch Möglichen.

Einen besonderen Vorzug stellt die strenge Linearität der Ausschläge im Bereich niedriger Drucke insofern dar, als sie eine Extrapolation der Anzeigen eines bei höherem Druck geeichten Instrumentes nach niedrigen Drucken hin zuläßt.

Die in der beschriebenen Weise mit den verschiedenen Manometern gewonnenen Druckmessungen wurden nun in folgender Weise ausgewertet:

1. Aus den gemessenen Druckwerten wird der mittlere Reduktionsfaktor C für beliebige Temperaturverhältnisse T_1/T_2 berechnet.

2. Aus den mittleren Reduktionsfaktoren bzw. den mittleren Empfindlichkeiten wird unter Benutzung der Beziehung:

$$k = \frac{E_d}{\left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right)}$$

die Konstante k des Radiometers berechnet.

3. Für den so für ein bestimmtes Manometersystem gewonnenen Wert für k wird der Reduktionsfaktor bzw. die Empfindlichkeit in Abhängigkeit von T_1/T_2 errechnet und in Kurven aufgetragen.

4. Es werden nachträglich die nach 1. berechneten mittleren Reduktionsfaktoren für verschiedene Werte des Verhältnisses T_1/T_2 und für verschiedene Gasarten in die Abbildungen eingetragen.

---

[1]) M. Czerny u. G. Hettner, ZS. f. Phys. 47, 499, 1928; G. Hettner, Ergebn. d. exakten Naturwiss. 7, 209, 1928.

Die Empfindlichkeit des Manometers als Funktion der Betriebstemperatur.

Fig. 10 zeigt den Reduktionsfaktor C als Funktion der Heizkörpertemperatur T_1 in °C bei einer konstanten Außentemperatur von $T_2 = 13^0$ C (Wasserkühlung). In die beobachtete Kurve sind einige für Luft (×) nachträglich gemessene Kontrollwerte sowie je ein Kontrollwert für Stickstoff (▽), Argon (⊙) und Wasserstoff (⊡) eingetragen[1]).

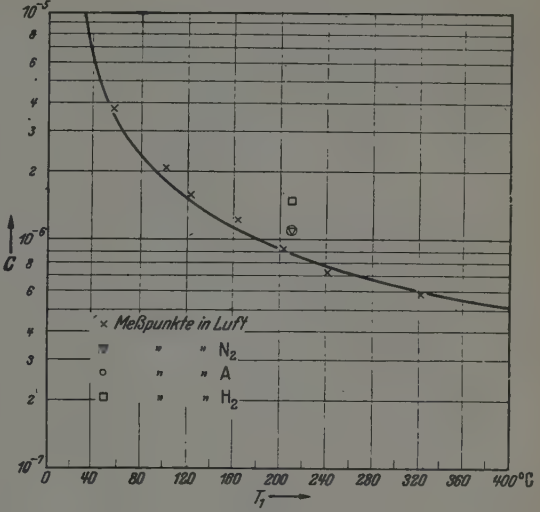


Fig. 10.

Fig. 11 gibt dieselbe Abhängigkeit für den Fall, daß die Außentemperatur 80° K beträgt (flüssige Luft-Kühlung).

Fig. 12 zeigt dasselbe für ein empfindlicheres System (Nr. 4 der Tabelle 1), Fadendurchmesser 0,01 mm. Wie man hieraus erkennt, betragen die kleinsten Werte des Reduktionsfaktors, d. h. die maximalen Empfindlichkeiten, $1{,}4 \cdot 10^{-7}$ Torr pro Skalenteil und $1{,}15 \cdot 10^{-8}$ Torr pro Skalenteil.

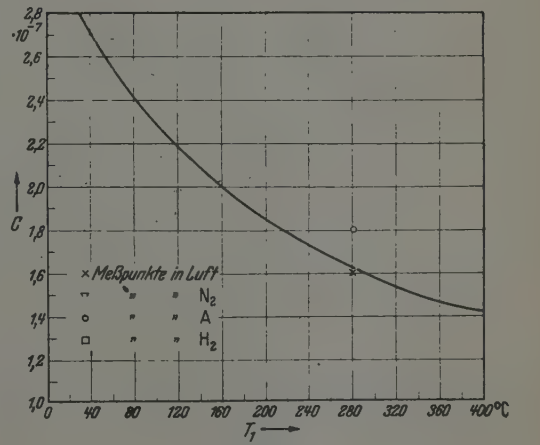


Fig. 11.

[1]) Der Wert für Wasserstoff wurde allein mit Hilfe des 200 cm³ McLeod-Manometers ermittelt, da wegen starker Aufzehrung des Wasserstoffs nicht mit dem Ionisationsmanometer gemessen werden konnte. Die Meßgenauigkeit ist daher gering, so daß dieser Punkt stark von der Kurve abweicht.

Fig. 13 gibt die Druckempfindlichkeit E_d als Funktion der Wurzel aus dem Temperaturverhältnis $\tau = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$ an, und zwar gelten die Dreiecke (△) für Messungen in Luft, wobei die Flüssigkeit im Kühler ruhte, d. h. im Laufe der Zeit bildete sich ein Temperaturgefälle aus, so daß die im Innern des Kühlers gemessene Temperatur geringer war als die einzusetzende Temperatur T_1. Man sieht, daß die übrigen Punkte recht gut auf einer nach der Radiometertheorie zu erwartenden Geraden liegen.

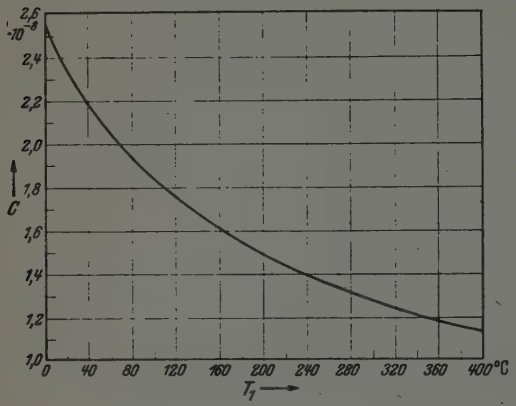


Fig. 12.

Fig. 14 zeigt dieselbe Abhängigkeit für ein Manometersystem mit Spannbandlagerung (System Nr. 6, siehe Tabelle 1) für verschiedene Gase (Luft ×, Wasserstoff ⊡, Stickstoff ▽, Argon ⊙, Kohlendioxyd +). Die Meßpunkte für die verschiedenen Gase liegen recht gut auf Geraden. Innerhalb der hier verwendeten Meßgenauigkeit fallen die Geraden für die einzelnen Gase praktisch zusammen.

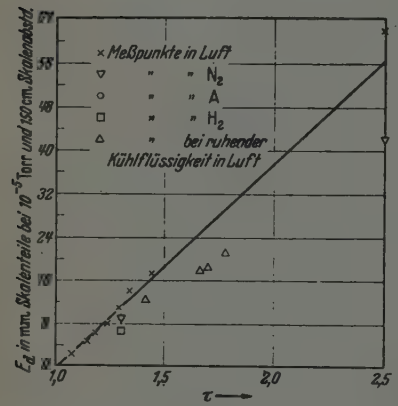


Fig. 13.

Fig. 15 gibt den Reduktionsfaktor desselben Manometersystems als Funktion der Heizkörpertemperatur für verschiedene Gase. Auch hieraus ist zu erkennen, daß das Gerät praktisch unabhängig von der Gasart ist.

Zusammenfassung.

Die Versuche zeigen, daß es möglich ist, durch Wahl der beschriebenen zylindersymmetrischen Meßsysteme thermische Molekularmanometer für Gas- und Dampfdrucke unterhalb $5 \cdot 10^{-2}$ Torr zu schaffen,

die bei relativ guter mechanischer Ruhelage und geringer Empfindlichkeit gegenüber elektrischen und thermischen Störungen so große und gut definierte Drehmomente liefern, daß sie eine bequeme Druckmessung bis zu Drucken der Größenordnung 10^{-7} bis 10^{-8} Torr ermöglichen. Die Geräte befinden sich in mehreren Exemplaren seit etwa einem Jahr in Benutzung.

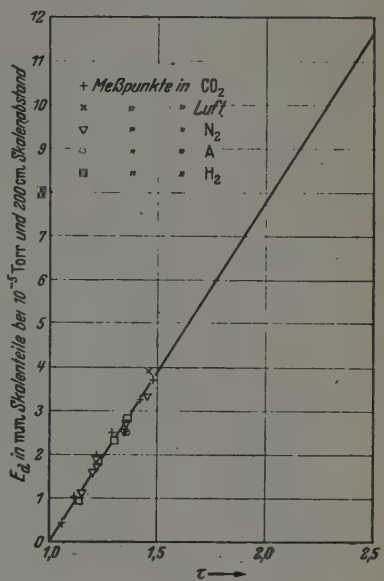


Fig. 14.

Die Anzeige der Manometer ist streng druckproportional. Infolge der guten Definition der gegenseitigen Lage der Heizflächen und des Meßsystems ist die Empfindlichkeit über beliebige Zeit praktisch konstant. Die Anzeigen sind weitgehend unabhängig von der Natur des im Manometer enthaltenen Gases. Wenn ein Einfluß der Gasart überhaupt vorhanden sein sollte (z. B. infolge der Verschiedenheit der Akkomodationskoeffizienten), so liegt er für die Molekulargewichtsunterschiede der üblichen, permanenten Gase wesentlich unterhalb 10% des Ausschlages, d. h. ist bei der in Druckgebieten unterhalb 10^{-5} Torr erreichbaren Genauigkeit in den meisten Fällen vernachlässigbar.

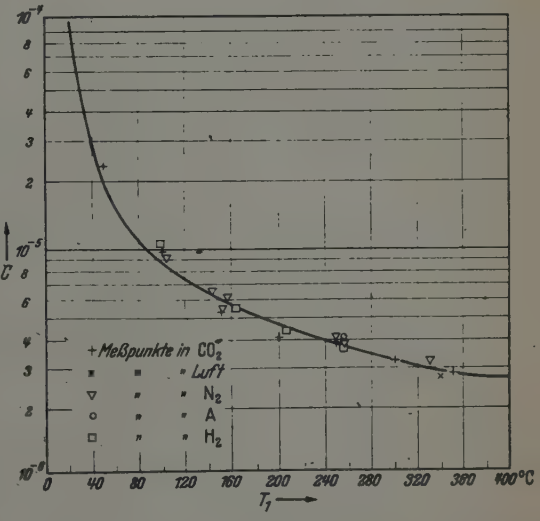


Fig. 15.

Die Tatsache, daß in den Manometern keine heißen Metalle vorhanden sind und die noch vorhandenen wenigen Metallteile zum Teil durch keramische Stoffe ersetzbar sind, zum Teil durch Schutz-

überzüge gegen korrodierende Gase und Dämpfe geschützt werden können, macht die Geräte zur Dampfdruckmessung und in Kombination mit einem mechanischen Molekularmanometer entsprechend älteren Vorschlägen zur Molekulargewichtsbestimmung von organischen und anorganischen Dämpfen besonders geeignet.

Die Größe der auftretenden Drehmomente ermöglicht den Bau robuster Zeiger- und Lichtzeigerinstrumente für den Druckbereich von 10^{-2} bis 10^{-6} Torr. Die induktive Kompensation gestattet die Verwendung über Meßbereiche von 4 bis 6 Zehnerpotenzen.

Die Linearität der Ausschläge und die weitgehende Unabhängigkeit der Anzeigen von der Gasart sowie die Überschaubarkeit der gaskinetischen Bedingungen machen es möglich, die Anzeige der bei höheren Drucken geeichten Geräte nach tieferen Drucken hin zu extrapolieren.

Da erfahrungsgemäß im Druckgebiet unter 10^{-5} Torr eine Druckangabe mit einer Genauigkeit von $\pm 50\,\%$ für die meisten Zwecke völlig ausreicht, so daß die einige Prozent betragende Genauigkeit eines geeichten Instrumentes praktisch nur in den seltensten Fällen benutzt wird, besteht durchaus die Möglichkeit, das Gerät für viele Aufgaben mit hinlänglicher Genauigkeit als absolutes Manometer zu benutzen.

Da die Dämpfung aperiodisch gewählt werden kann, so liegt je nach Wahl des Systems die Einstellgeschwindigkeit zwischen 2 und 20 Sekunden für den Vollausschlag von Null aus, d. h. die Geräte zeigen Druckänderungen praktisch sofort an.

Störausschläge durch absorptive Austauschvorgänge oder Reaktionen an der Oberfläche der Meßsysteme wurden bisher nicht beobachtet.

Im ganzen gesehen hat sich das Verfahren der Messungen gerade des so schwer zugänglichen Druckgebietes unterhalb 10^{-5} Torr in den beschriebenen zylindrisch-symmetrischen Radiometern als zuverlässig erwiesen und verspricht brauchbare Meßgeräte für den ganzen Bereich von 10^{-2} bis 10^{-8} Torr und wahrscheinlich noch bis zu viel niedrigeren Drucken.

Gasaufzehrung und Gasaustausch bei der Messung niedrigster Drucke im Ionisationsmanometer.

Eine kritische Untersuchung in H_2, N_2 und Ar.

Von **Helmut Schwarz**, Berlin-Gatow.

Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1943.)

Es wird gezeigt, daß das Ionisationsmanometer als Manometer exakt nicht brauchbar ist, da es entweder die Gasart verändert (Gasaustausch) oder den Druck durch elektrische Gasaufzehrung erniedrigt. Meist erfolgt beides zugleich: Änderung der Gasart und Druckverminderung. Je mehr man die Ionisation durch Verbesserung der Röhrenkonstruktion steigert, um so unbrauchbarer wird das Ionisationsmanometer. Je besser die Röhren vakuumtechnisch vorbehandelt werden und je kleiner das Apparaturvolumen ist, um so größer ist der Fehler der Druckmessung.

Jeder, der Drucke unter 10^{-4} Torr mit dem Ionisationsmanometer mißt, muß seiner Messung mehr oder weniger skeptisch gegenüberstehen. Dieser Skepsis soll experimentell auf den Grund gegangen werden. Es stellt sich heraus, daß selbst in einem normalen Ionisationsmanometer elektrische Gasaufzehrung den Druck erniedrigt. Alle elektrischen Entladungsmanometer zeigen diese Eigenschaft. Es seien einige solcher Manometertypen genannt, bei denen der Verf. selbst schon früher den Aufzehrungseffekt beobachtet hat:

1. Gewöhnliches Ionisationsmanometer der Type RE 11[1]).
2. Telefunkenröhre Type RV 70.
3. Philips-Manometer nach Penning.
4. Ionisationsmanometer mit zur Hauptrichtung der Elektronenbahnen parallelem Magnetfeld (zur Fokussierung und zum verstärkten Pendeln der Elektronen) nach Gaede[2]) [3]) [1]).

Je empfindlicher man das Ionisationsmanometer gestaltet, d. h. je größer man bei einem Druck unter 10^{-4} Torr die Ionenausbeute macht, etwa durch Erweitern des Stoßraumes der Elektronen[4]) oder Verlängern des Elektronenweges mit Hilfe eines Magnetfeldes[2]) [4]) [5]), um so intensiver wird die elektrische Aufzehrung. Der Verf. fand bereits eine weitgehende Klärung des Mechanismus der elektrischen Gasaufzehrung unterhalb 10^{-4} Torr[1]) im Gaedeschen Ionisationsmanometer[2]). Mit den nachstehenden Untersuchungen war zunächst beab-

[1]) H. Schwarz, ZS. f. Phys. **117**, 23, 1940; ZS. f. techn. Phys. **21**, 381, 1940. — [2]) W. Gaede, ZS. f. techn. Phys. **15**, 664, 1934. — [3]) W. v. Meyeren, ZS. f. Phys. **84**, 531, 1933; **91**, 727, 1934. — [4]) H. Klumb u. H. Schwarz, erscheint demnächst. — [5]) H. Klumb u. Th. Haase, Phys. ZS. **37**, 27, 1936 (Magnetfeld senkrecht zu den Elektronenbahnen nach Art eines Magnetrons).

sichtigt, zu untersuchen, ob und wieweit ein solcher Effekt bei einem gewöhnlichen Ionisationsmanometer eine Rolle spielt und ob dadurch das Ionisationsmanometer als exaktes Druckmeßgerät auszuschließen ist.

Die kritischen Untersuchungen wurden ermöglicht durch Anwendung eines nach Angaben von H. Klumb konstruierten Manometers[1]), das den Druck auf Grund des Knudsenschen Radiometereffektes anzeigt und im folgenden stets als thermisches Molekularmanometer oder einfach Molekularmanometer bezeichnet wird.

Die Anzeige dieses Manometers ist, wie die Versuche auch zeigten[1]), weitgehend unabhängig von der Gasart. Es kann damit der Druck für jede Gasart mit in jedem Druckbereich stets der gleichen Empfindlichkeit etwa auf einer Spiegelskala linear abgelesen werden, ohne den Druck selbst irgendwie zu beeinflussen. Das Ionisationsmanometer hingegen ist wegen des unterschiedlichen Wirkungsquerschnitts der Ionisierung von der Gasart abhängig.

Bekanntlich besteht bei Drucken unterhalb 10^{-4} Torr unter geeigneten elektrischen Bedingungen die Beziehung:

$$p = C \cdot \frac{i_+}{i_-};$$

i_+ bedeutet den durch den Elektronenstrom i_- hervorgerufenen positiven Ionenstrom, p den Druck in Torr, C eine nur von der Gasart abhängige Größe. Es lassen sich also aus gleichzeitigen Messungen mit dem Ionisationsmanometer und dem thermischen Molekularmanometer mit Hilfe des Faktors C Schlüsse auf die Gasart und deren Veränderung während des Meßvorganges ziehen.

Die durch einen bestimmten Elektronenstrom i_- hervorgerufene Ionisierung von Gasmolekülen ist ein Maß für die Zahl der Gasmoleküle in der Apparatur, und sollte es also auch für den Druck im Apparaturvolumen sein. Die erzeugten positiven Ionen gelangen mit bestimmten Geschwindigkeiten auf Innenteile der Röhre, auf Elektroden und die Glaswand, überwiegend auf die negative Auffangelektrode, wo sie als positiver Ionenstrom i_+ gemessen werden, der dann in die genannte Formel eingeht.

Verschiedene Meßzustände des Ionisationsmanometers.

Die Versuche haben nun gezeigt, daß man das Ionisationsmanometer nach zwei verschiedenen Meßzuständen einteilen kann, in einen

[1]) H. Klumb u. H. Schwarz, ZS. f. Phys. 122, 418, 1944.

druckkonstanten Meßzustand dk, wobei der Druck in der Meßröhre also konstant bleibt, und in einen druckvermindernden Meßzustand dv, wobei der Druck durch elektrische Gasaufzehrung abnimmt. Den Fall, daß die Röhre durch ihre erhöhte Betriebstemperatur noch gast, schließe ich selbstverständlich aus. Die Meßzustände hängen von der Güte der vakuumtechnischen Vorbehandlung ab. Sie gehen ineinander über. Im dk-Meßzustand ist das Ionisationsmanometer als Druckmeßgerät unterhalb 10^{-4} Torr nur bedingt brauchbar, im dv-Meßzustand überhaupt nicht.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein positives Ion in das Metall bzw. in die Glaswand eindringt, um dort als Atom oder Molekül steckenzubleiben (dv-Meßzustand), hängt in erster Linie davon ab, wie gut diese Teile vakuumtechnisch entgast sind. Es kann auch der Fall eintreten, daß das Ion ein bereits sich im Metall bzw. Glas befindendes Gasatom „herausschlägt", um dessen Stelle einzunehmen (dk-Meßzustand). Beide Fälle wurden beobachtet, das Verschwinden von Ionen aus dem Gasraum unter Abnahme des Druckes und der Platzwechsel von Gasatomen aus dem Gasraum mit solchen in den festen Teilen der Röhre meist unter Veränderung der Gasart.

Es läßt sich nun aus den Versuchen schließen, daß in den meisten Fällen, in denen mit dem Ionisationsmanometer gemessen wurde, der dk-Meßzustand vorliegen muß.

Es kann z. B. der Fall eintreten, daß bei nicht äußerst sorgfältigem Entgasen der Röhrenteile im von außen her unbeeinflußten abgeschlossenen Volumen unter einem Druck von 10^{-4} Torr die Beziehung $p = C \frac{i_+}{i_-}$ sich mit der Meßdauer des Ionisationsmanometers ändert. Bleibt z. B. i_+ konstant, und zeigt das Molekularmanometer eine Druckänderung an, so muß C, das Kriterium für die Gasart, einen anderen Wert angenommen haben; die Gasart hat sich also geändert. Eine Änderung des Druckes ist eingetreten, ohne daß dies das Ionisationsmanometer anzeigen kann. Allein mit seiner Hilfe würde man keine Veränderung in der Apparatur wahrgenommen haben. Der soeben beschriebene Sachverhalt liegt oft in den Fällen vor, wo man glaubt, in einem abgeschlossenen Volumen von einem Druck unterhalb 10^{-4} Torr mit dem Ionisationsmanometer eine Kontrolle über die Konstanz des Druckes vornehmen zu können. In einem kleineren Apparaturvolumen kann es einem aber in einem solchen Fall passieren, daß zuletzt die Apparatur ein ganz anderes Gas enthält als man eingefüllt hat, nämlich allein Verunreinigungsgas,

das sich noch in den Röhrenteilen des Ionisationsmanometers befand und nun herausgetreten ist.

Man kann dies wohl dadurch vermeiden, daß man die Röhrenteile extrem entgast. Dann aber tritt der elektrische Gasaufzehrungseffekt auf (dv-Meßzustand), der um so mehr den Druck erniedrigt, je besser man die Röhrenteile entgast hat und je kleiner das Apparaturvolumen ist. Zu einer direkten sauberen Messung von tiefen Drucken erscheint das Ionisationsmanometer ungeeignet. Es ist nur für den einzigen Fall einigermaßen exakt verwendbar, wenn man in einem bestimmten Volumen ein Edelgas unter einem bestimmten Druck unter 10^{-4} Torr einlassen will. Man muß dann so verfahren, daß man unter dauerndem Pumpen im höchsten Vakuum die Ionisationsmanometerröhre mit einem Hochfrequenzglühsender auf hellste Rotglut bringt. Daraufhin läßt man so oft Gas bis etwa zu dem gewünschten Druck ein, bis der Ionenstrom bei abgeschlossenem Volumen nicht mehr weiter abnimmt, d. h. bis die Röhrenteile mit dem eingefüllten Edelgas gewissermaßen „absorptiv gesättigt" sind. Auf diese Art kann man auch nur den Faktor C der Ionisationsmanometerformel für eine bestimmte Gasart durch Vergleich mit einem anderen Manometer exakt ermitteln.

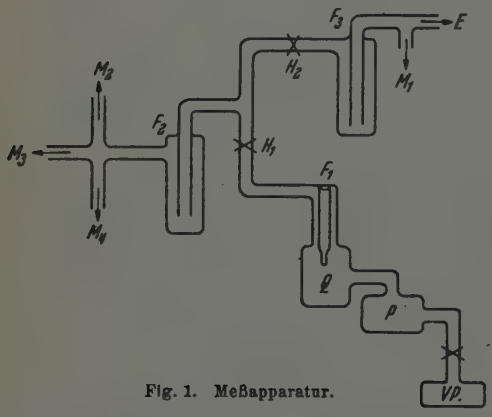


Fig. 1. Meßapparatur.

Apparatur (vgl. Fig. 1).

Als Hochvakuumpumpe diente ein Öldampfpumpenaggregat P und Q (Leybold). H_1 und H_2 sind Hochvakuumhähne mit Apiezonfett; F_1, F_2 und F_3 sind Ausfrierfallen für flüssige Luft. An M_1 war ein 200 cm³-McLeod-Manometer, an E ein Gaseinlaß mit Dosierungsgerät (Fig. 2), an M_2 das Molekularmanometer und an M_3 und M_4 die zu prüfenden Ionisationsmanometer angeschmolzen. Die Rohrweiten betrugen 25 bis 35 mm. Das mit den Hochvakuumhähnen H_1 und H_2 abzuschließende Apparaturvolumen betrug etwa 3 Liter. Bei Verwendung von flüssiger Luft wurde ein Grenzvakuum von 2 bis $3 \cdot 10^{-7}$ Torr mit dem Molekularmanometer gemessen und dauernd gehalten. Die

Apparatur wurde beim Evakuieren zum Teil mit elektrischen Widerstandsöfen mehrere Stunden auf 450° C gehalten, zum Teil mit Brennern erhitzt und entgast.

Als Füllgase dienten: Wasserstoff, Stickstoff und Argon. Wasserstoff wurde ungereinigt aus den Stahlflaschen entnommen. Stickstoff und Argon waren reine Präparate mit weniger als 1% Verunreinigung.

Die Füllung erfolgte mit Hilfe des Gaseinlasses (s. Fig. 2), das sich besonders bei den geringen Drucken sehr gut bewährte.

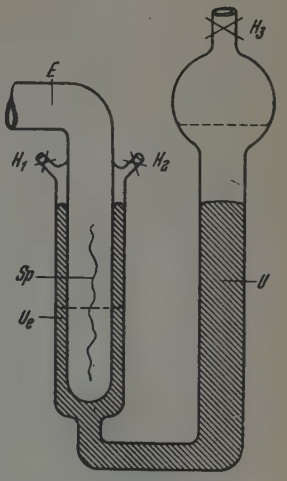


Fig. 2.
Gaseinlaß mit Dosierungsgerät.

Es besteht aus einem U-förmigen, mit Quecksilber gefüllten Glasrohr mit den beiden Schenkeln U und U_e. In dem linken Schenkel U_e ist ein am unteren Ende geschlossenes Glasrohr E eingeschmolzen, das mit der Apparatur verbunden ist. Es hat einen feinen Längssprung Sp, der keinen Quecksilberdampf, wohl aber die Versuchsgase durchläßt. Das Versuchsgas wird über den Hahn H_1 mit geringem Überdruck in den Schenkel U_e eingelassen und zunächst bei geöffnetem Hahn H_2 längere Zeit durchgespült. Daraufhin wird H_2 geschlossen, wonach der Quecksilberspiegel wegen des unter Überdruck einströmenden Gases im Schenkel U_e etwa bis zur gestrichelten Linie absinken mag, so daß nun Gas durch den Längssprung Sp in die Apparatur eindringen kann. Durch Saugen bei H_3 kann auch ohne besonderen Überdruck nach Schließen von H_1 und H_2 Gas durch Sp eingelassen werden.

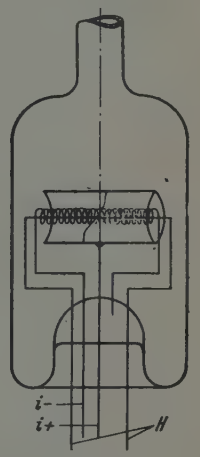


Fig. 3.
Normales Ionisationsmanometer.

$$p = C\frac{i_+}{i_-}.$$

Gasart	Argon	Stickstoff	Luft
C	0,082	0,11	0,10

Erst nach mehrfachem Spülen der gesamten Apparatur mit dem zu untersuchenden Gas wurde mit den Messungen begonnen.

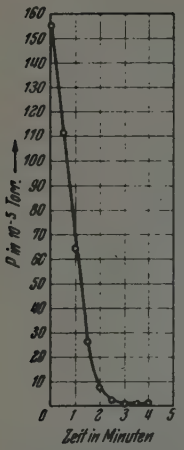


Fig. 4. Normales Ionisationsmanometer. Aufzehrung von Wasserstoff ohne Anoden- und Gitterspannung. Kathodenheizung wie bei 1,0 mA Elektronenstrom und 100 Volt Anodenspannung.

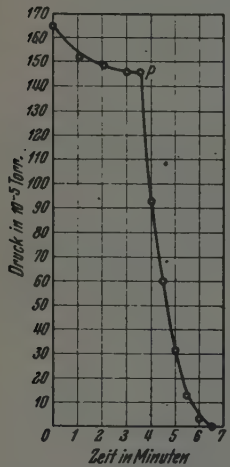


Fig. 5. Bis P nur Anodenspannung 110 Volt, von P an Heizung eingeschaltet für $i_- = 1{,}5$ mA.

Zur Untersuchung gelangte zunächst ein Ionisationsmanometer mit folgenden Abmessungen (vgl. Fig. 3):

1. Anode A: Nickelzylinder, Durchmesser 20 mm, Länge 30 mm, Blechstärke 0,1 mm.
2. Gitter G: Nickelwendel, Durchmesser 7,5 mm, Länge 30 mm, Drahtdicke 0,3 mm, Windungszahl 18.
3. Kathode K: Wolframdraht in der gemeinsamen Achse des Zylinders A und der Gitterspiralen G. Durchmesser 0,2 mm, Länge 50 mm.

Der äußere Nickelzylinder erhielt bei den Druckmessungen normalerweise eine Spannung von -5 Volt, die Gitterspirale $+110$ Volt gegenüber dem negativen Ende der Glühkathode. Die Kathodenheizung wurde so reguliert, daß der Elektronenstrom Werte zwischen 1 und 2 mA annehmen konnte.

Die Messungen.

Bei alleinigem Brennen der Kathode, ohne an die übrigen Elektroden irgendwelches Beschleunigungspotential anzulegen, trat nur bei Wasserstoff und in sehr geringem Maße auch bei Stickstoff Druckverminderung ein.

Wasserstoff. Bei einer Kathodenheizung, die den nachher erwähnten Messungen einer Elektronenemission von 1,0 mA entspricht, erkennen wir aus Fig. 4, daß Wasserstoff auch ohne Ionisierung durch beschleunigte Elektronen verschwinden kann. Der Wasserstoffdruck nimmt von $1{,}55 \cdot 10^{-3}$ in 3 Minuten auf $1{,}5 \cdot 10^{-5}$ Torr ab. Bekanntlich dissoziiert das Gas in Gegenwart des heißen Wolfram-Drahtes der Glühkathode zu atomarem Wasserstoff. Die Atome werden dann von den Glaswänden adsorbiert.

Diese Erklärung konnte durch Ausheizen der Glaswände nach den Sorptionsversuchen bestätigt werden.

Aus Fig. 5 ist zu ersehen, daß auch bei kalter Kathode und Anlegen von 110 Volt Anodenspannung eine geringe Aufzehrung von $1{,}64 \cdot 10^{-3}$ bis $1{,}4 \cdot 10^{-3}$ Torr einsetzt, die dann aber wegen Erlöschen einer wahrscheinlich schwachen Glimmentladung aufhört. Beim Zuschalten der Kathodenheizung im Punkte P erfolgt wieder ein starker Druckabfall bis unter $5 \cdot 10^{-6}$ Torr[1]). Die Voraussetzungen waren sonst dieselben wie beim Versuch der Fig. 4. Das Restgas, welches dort verblieben war und nicht mehr Wasserstoff zu sein braucht, verschwindet bei diesem Versuch (Fig. 5) auch noch. Diese Erscheinungen in Wasserstoff sind allgemein bekannt und auch untersucht. Das Ionisationsmanometer schließt also eine Messung von Wasserstoffdrucken aus.

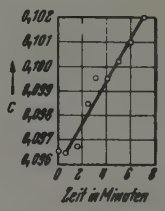


Fig. 6. Normales Ionisationsmanometer. Messung in Argon bei konstantem Druck von 4,21 · 10⁻⁴ Torr. Druckschwankung während der Messung = < ± 0,7 %.

Stickstoff und Argon. Bei Argon war nur dann eine meßbare Abnahme des Druckes unter 10^{-4} Torr zu beobachten, wenn bei glühender Kathode Anodenspannung angelegt wurde. Für Stickstoff war bei starker Kathodenheizung ohne Anodenspannung in extrem sauberer Röhre nur eine geringe Druckabnahme zu bemerken: Im besonderen Falle innerhalb 10 min von $1{,}0 \cdot 10^{-4}$ auf $8 \cdot 10^{-5}$ Torr.

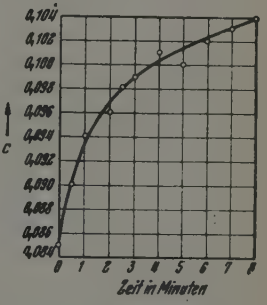


Fig. 7. Wie Fig. 6 bei konstantem Druck von 2,49 · 10⁻⁴ Torr. Druckschwankung = < ± 0,9%.

dk-*Meßzustand.* Im dk-Meßzustand ändert sich der Druck im Ionisationsmanometer nicht. Es ist entweder eine Sättigung der Aufzehrung eingetreten — dann spreche ich vom dk_1-Meßzustand, von einer „absorptiven Sättigung" des Ionisationsmanometers — oder die Röhre war noch nicht genügend entgast, dk_2-Meßzustand. In beiden Fällen, dk_1 und dk_2, wird an den Auftreffstellen der Ionen ein Austausch von Gasatomen erfolgen. Im Falle einer absorptiven Sättigung, die stets durch dieselbe Gasart hervorgerufen wird, läßt sich ein solcher Gasaustausch natürlich experimentell kaum feststellen. Er läßt sich

[1]) Das Molekularmanometer war nur auf eine Empfindlichkeit von $5 \cdot 10^{-6}$ Torr/mm Skalenteile eingestellt.

aber aus dem dk_2-Meßzustand — ungenügende Entgasung — oder auch aus einem Sättigungszustand schließen, der mit verschiedenen Gasen erreicht wurde. Als Beispiel für den dk_1-Meßzustand sind auf den Fig. 6 und 7 zwei gemessene Kurven aufgetragen, bei denen die Abszisse die Zeit in Minuten nach Beginn der Messung, die Ordinate den Wert C der Ionisationsmanometerformel darstellen. C ist aus Messungen des Ionenstromes i_+, dem konstant gehaltenen Wert für den Elektronenstrom i_- und dem Druck p, mit dem Molekularmanometer ermittelt, berechnet worden. Die Vorgeschichte zu den Versuchen dieser Abbildungen ist kurz folgende: Die extrem gut entgaste Röhre wurde bei dauerndem Betrieb mehrfach mit Stickstoff bis zu einigen 10^{-4} Torr so oft gefüllt, bis keine meßbare Gasaufzehrung mehr eintrat. Dann wurde nach gründlicher Evakuierung Argon bis zu einem Druck von $4{,}21 \cdot 10^{-4}$ Torr eingelassen. Der Druck blieb bis auf eine Schwankung von $\pm 0{,}7\,\%$ konstant. Obwohl also der Druck mit dem Molekularmanometer ermittelt, sich nicht ändert, steigt der Faktor C an. Dies wird nur dadurch verständlich, daß man einen Gasaustausch an den Auftreffstellen der Ionen annimmt. Wir erinnern uns (s. Fig. 3), daß die Konstanten für Argon 0,082, für Stickstoff 0,11 gemessen worden waren. Die C-Werte nähern sich also bei diesem Versuch dem Wert von Stickstoff. Im Gasraum werden wir also zuletzt überwiegend Stickstoff haben.

Nachdem das Gas wieder fortgepumpt worden war, wurde frisches Argon bis zu einem Druck von $2{,}49 \cdot 10^{-4}$ Torr eingefüllt. Auf der Fig. 7 ist eine Wiederholung des soeben beschriebenen Versuchs aufgezeichnet. Der Druck blieb auch hierbei bis auf $\pm 0{,}9\,\%$ konstant. Die C-Werte nehmen wiederum mit der Zeit zu. Diese Kurve unterscheidet sich allerdings etwas von der in der Fig. 6. Die C-Werte bleiben hier zu Anfang etwas länger in der Nähe des Argonwertes als im Versuch der Fig. 6. Dies läßt sich wohl damit deuten, daß bereits Argonatome von der vorangegangenen Messung her sich in den Elektroden bzw. Glaswänden der Röhre befinden.

dv-*Meßzustand.* Der Druck in der Meßröhre nimmt ab. Man kann auch hier wieder zwei Fälle unterscheiden:

dv_1, die Röhre wird allein durch äußerst starkes Elektronenbombardement ausgeglüht;

dv_2, die Elektroden wurden mit einem Hochfrequenzglühsender entgast.

Die beiden Vorbehandlungsarten unterscheiden sich wesentlich darin, daß im Falle dv_1 verhältnismäßig noch viele Ionen durch Elektronenstoß entstehen, wohingegen im Falle dv_2 keine nennenswerte Ionenbildung eintritt.

dv_1-*Meßzustand. Aufzehrung von Stickstoff* (vgl. Fig. 8). Bei normaler Schaltung der Ionisationsmanometerröhre ist im Falle dv_1 während des Messens Gasaufzehrung zu beobachten, jedoch im Augenblick, wo der Anodenzylinder mit der Beschleunigungselektrode kurzgeschlossen wird, also auch die Beschleunigungsspannung von $U_i = U_a = +110$ Volt erhält — auf der Fig. 8 in der 36. Minute — stieg der

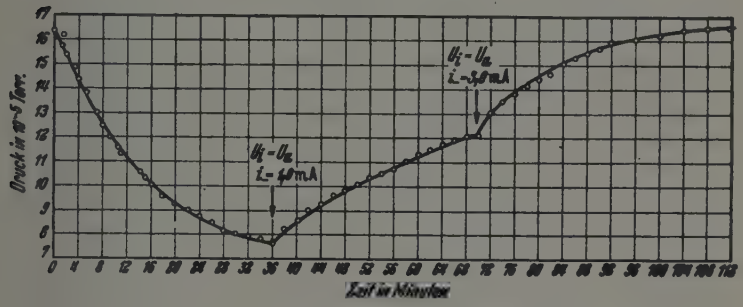


Fig. 8. Aufzehrung von Stickstoff.
Druck in 10^{-5} Torr. $U_a = 110$ Volt, $U_i = -5$ Volt, $i_- = 1$ mA.

Druck wieder an, das Gas trat also wieder heraus. Es konnte bei der Messung nicht so tief in die Elektroden bzw. Glaswände eindringen, da wahrscheinlich bei der vakuumtechnischen Vorbehandlung noch Gas dort verblieben bzw. sogar durch die verhältnismäßig starke Ionisierung neu und tiefer eingedrungen war. In der 70. Minute wurde die Kathodenheizung bis zu einem Elektronenstrom von 3 mA gesteigert, wodurch der Druck in der 100. Minute den Anfangswert wieder erreichte[1]).

dv_2-*Meßzustand.* Im Falle dv_2 (Entgasen durch Hochfrequenzsender) läßt sich das Gas, das nach mehreren Aufzehrungen in die Elektroden bzw. Glaswände eingedrungen ist, nicht mehr durch Kurzschließen der beiden Elektroden A und G wie im Falle dv_1 herausholen. Im Gegenteil wird oft sogar die Gasaufzehrung noch anhalten.

Aufzehrung von Argon, C größer werdend. Vor dem Versuch, der auf der Fig. 9 dargestellt ist, wurde die mit dem Hochfrequenzsender

[1]) Das ausgetretene Gas braucht natürlich nicht mit dem ursprünglich eingelassenen identisch zu sein.

vorbehandelte Ionisationsmanometerröhre mehrfach mit Stickstoff betrieben, ohne daß es jedoch zur absorptiven Sättigung kam. Daraufhin wurde Argon bis zu einem Druck von $1{,}94 \cdot 10^{-4}$ Torr eingelassen. Im unteren Teil der Fig. 9 ist die zeitliche Druckabnahme dargestellt, im oberen das gleichzeitige Verhalten der Größe C. Die Größe C nimmt mit der Dauer der Aufzehrung zu und nähert sich dem Wert für Stickstoff, nämlich $C = 0{,}11$, sehr genau. Daraus können wir also schließen, daß im verbliebenen Restgas überwiegend nur noch Stickstoff anzutreffen ist. Daß es sich bei dem Restgas nicht um eine Verunreinigung handelt, dafür spricht die nächste Fig. 10[1]).

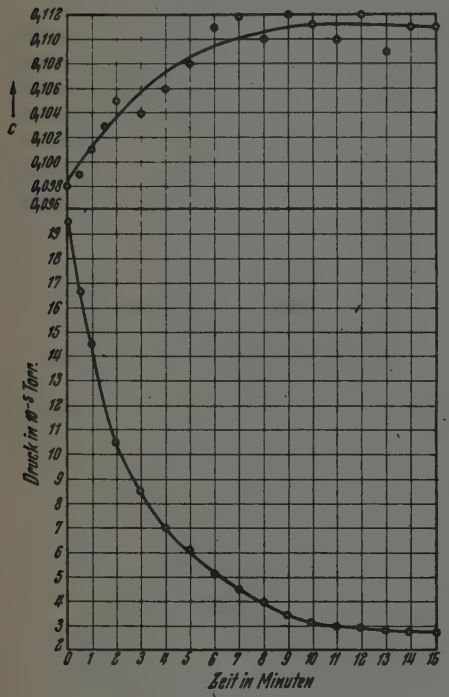


Fig. 9. Normales Ionisationsmanometer. Aufzehrung von Argon nach vorhergehendem Betrieb in Stickstoff.

Aufzehrung von Argon, C kleiner werdend. Die extrem entgaste Röhre wurde diesmal mehrfach mit Argon betrieben, ohne daß eine Sättigung der Aufzehrung eingetreten wäre. Nach mehreren solchen Versuchen wurden die Kurven der Fig. 10 aufgenommen. Die Größe C nimmt ab und nähert sich dem Wert $C = 0{,}082$ für Argon. Der anfänglich größere Wert von C tritt wohl nur scheinbar auf, denn der im Molekularmanometer gemessene Druck ist wegen der anfänglich großen Aufzehrungsgeschwindigkeit nicht derselbe wie an der Stelle, wo der Ionenstrom gemessen wird. Dort wird er wegen des Druckgefälles zum Ionisationsmanometer hin höher sein als hier.

Übergänge zwischen den Meßzuständen dk *und* dv.

Aufzehrung von Stickstoff, C kleiner werdend. Beim Versuch, der in Fig. 11 dargestellt ist, scheint fast wieder der dk_1-Meßzustand,

[1]) Ein Verunreinigungsgas würde durch elektrische Gasaufzehrung wohl eher verschwinden als das Edelgas.

absorptive Sättigung, erreicht zu sein. Es findet allerdings noch geringe Aufzehrung des Stickstoffs statt. Vor diesem Versuch war mehrfach mit Argon gemessen worden, so daß in die Elektroden bzw. Glaswände Argon hineingeschossen wurde. Aus der Abnahme der Größe C erkennt man, daß Argon wieder hervorkommt, denn C nähert sich dem Wert für Argon $C = 0{,}082$. Demnach ist ein Austausch von Stickstoffatomen aus dem Gasraum mit Argonatomen in den Elektroden bzw. Glaswänden eingetreten.

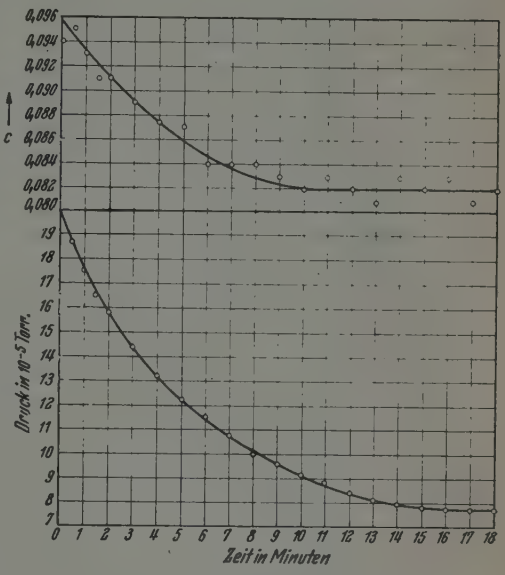


Fig. 10. Normales Ionisationsmanometer. Aufzehrung von Argon.

Andere Ionisationsmanometertypen.

Es wurden noch andere Ionisationsmanometertypen[1]) auf ihre Gasaufzehrung hin näher untersucht. Da der Aufzehrungseffekt sich mit der Vergrößerung der Ionisation verstärken wird[2]), wurde bei diesen Röhren, die zur Verstärkung der Ionenbildung entwickelt wurden, der störende Einfluß der Druckverminderung im erhöhten Maße beobachtet. Da die Ergebnisse aber sonst ganz analog verliefen, kann ich mich auf die Wiedergabe eines Versuchsbeispiels in Argon (s. Fig. 12) bei einem Ionisationsmanometer nach Art einer Magnetronröhre beschränken[1]).

Diskussion und Folgerungen.

Es ist allgemein bekannt, daß selbst vakuumgeschmolzene Metalle noch große Gasmengen enthalten. Als vakuumtechnisch einwandfrei wird erst dann das Metall bezeichnet, wenn es durch starkes Erhitzen im Hochvakuum weitgehend gasfrei gemacht worden ist. Dadurch entstehen aber „Löcher", freie Adsorptionsvalenzen in der Metallober-

[1]) H. Klumb u. H. Schwarz, erscheint demnächst. — [2]) H. Schwarz, l. c.

fläche. Es ist durchaus plausibel, daß diese „Löcher" wieder durch Gasatome gefüllt werden können, besonders dann, wenn sie in Gestalt von Ionen elektrisch beschleunigt auf das Metall treffen. Dort werden sie neutralisiert und als Atome adsorbiert bzw. dringen infolge ihrer mitbekommenen Geschwindigkeit ins Metallinnere ein. Sie nehmen damit die Stellen der vorher durch **Erhitzen** ausgetriebenen Gasatome bzw. -moleküle ein. Auf diese Weise läßt sich in groben Zügen die elektrische Aufzehrung des Ionisationsmanometers im dv-Meßzustand erklären.

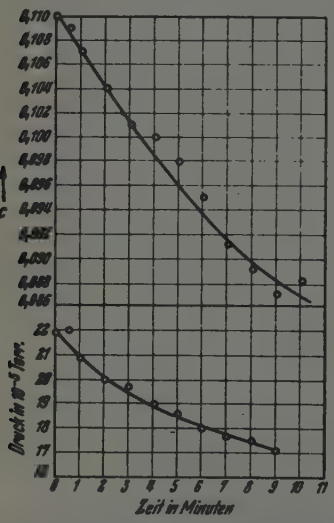


Fig. 11. Normales Ionisationsmanometer. Aufzehrung von Stickstoff nach mehrmaligem Betrieb in Argon.

Durchaus verständlich erscheint auch, daß ein Gasion ein anderes Gasatom verdrängen und dessen Stelle im Metall einnehmen kann, wie es im dk-Meßzustand vorkommt, ein Platzwechsel. Im dk-Meßzustand verändert das Ionisationsmanometer meist die Gasart in der Apparatur. Nur für den Fall, daß das Ionisationsmanometer absorptiv gesättigt ist, sich im dk_1-Zustand befindet, ist es in engen Grenzen exakt verwendbar. Diesen Zustand erreicht man dadurch, daß man die Röhre extrem entgast, die Elektroden mit einem Hochfrequenzsender ausglüht, darauf so oft das Gas, das man messen will, bis etwa zu dem gewünschten Druck einläßt, bis bei abgeschlossenem Volumen der Ionenstrom konstant bleibt.

Da die Anzahl der aufgezehrten Gasmoleküle wesentlich von der vakuumtechnischen Vorbehandlung der Röhre abhängt, diese aber bei den geringen Drucken nicht reproduzierbar ist, lassen sich darüber quantitative Aussagen nur schwer machen. Die aus dem Apparaturvolumen verschwindende Gasmenge hängt nicht allein vom Druck in der Röhre ab. Auch wird der druckabhängige Teil nur in bestimmten Fällen den Druck linear enthalten. Besonders bei tiefen Drucken und hierfür ungenügender vakuumtechnischer Vorbehandlung wird es überhaupt keinen druckabhängigen Teil geben. Es wird dann der

wahre Druck p, der vor Einschalten des Ionisationsmanometers in der Apparatur herrschte, gleich sein:

$$p = p_0 + a,$$

wo p_0 der Restdruck ist, den das Ionisationsmanometer „anzeigt", und a eine Konstante, die von der Oberflächenbeschaffenheit der Röhrenteile allein abhängt, wieviel Platz gewissermaßen noch für Gasmoleküle auf der Oberfläche vorhanden ist. Je kleiner nun der wahre Druck p in der Apparatur ist, um so größer wird der Fehler der Druckmessung sein; denn dadurch fällt der unerfaßte Summand a immer stärker ins Gewicht. Es ist also durchaus unzulässig, bei Vakuummessungen mit dem Ionisationsmanometer lineare Extrapolationen nach tiefen Drucken hin aus Vergleichsmessungen etwa mit einem McLeod-Manometer vorzunehmen.

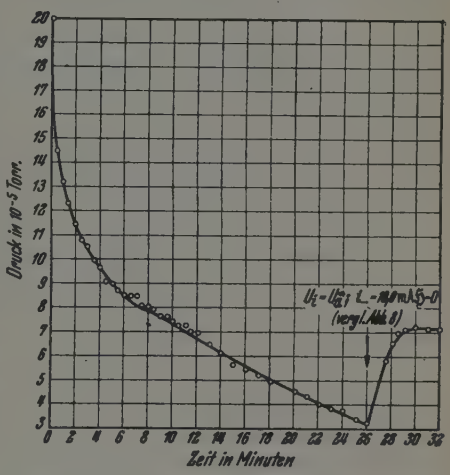


Fig. 12. „Magnetron" - Ionisationsmanometer. Aufzehrung von Argon mit Magnetfeld (auf jeweils maximalen Ionenstrom eingestellt). $\mathfrak{H} = 600$ bis 700 Gauß. $U_a = 435$ Volt, $U_i = -100$ Volt, $i_- = 4{,}0$ mA.

Grenzvakuummessung mit dem Ionisationsmanometer. Ganz besonders sind Grenzvakuummessungen von Hochvakuumpumpen mit dem Ionisationsmanometer unzuverlässig. Dabei wird man ja meist im kleinsten Volumen messen, die Elektroden weitgehend entgasen und dadurch gute Möglichkeiten für eine intensive Gasaufzehrung schaffen. In den meisten Fällen wird zuletzt nicht mehr die Hochvakuumpumpe pumpen, sondern das Ionisationsmanometer. Dieses bestimmt dann den Grenzdruck im dynamischen Gleichgewicht mit der Gasabgabe der Innenwandteile der Apparatur und der Freigabe von Gasen, die in den Treibstoffen der Diffusionspumpen gelöst sind. Meist wird erst in zweiter Linie der Dampfdruck des Treibmittels der Pumpe in Betracht zu ziehen sein.

Eine Dampfdruckmessung von Treibstoffen für Öldiffusionspumpen mit dem Ionisationsmanometer erscheint im höchsten Maße unsicher: Entweder mißt man in der Hauptsache einen Gasdruck, der sich etwa

im soeben beschriebenen Sinne als Gleichgewichtszustand einstellt, oder man mißt den Druck eines durch Stromdurchgang hervorgerufenen Zerfallsproduktes des Treibstoffs. In Wirklichkeit werden beide Faktoren mehr oder weniger je nach Art und Temperatur des Treibstoffs zugleich im Ionisationsmanometer wirksam sein. Erwähnt sei, daß R. S. Morse[1]) eine Vorrichtung angibt, die statt einer flüssigen Luftfalle die Öldämpfe durch Zersetzung durch Elektronenstoß an dem Eindringen ins Hochvakuum hindert. — Im Grenzvakuum von Öldiffusionspumpen wird als Zersetzungsprodukt bestimmt Wasserstoff entstehen, gerade die Aufzehrung von Wasserstoff im Ionisationsmanometer ist besonders stark; es ist also eine Grenzvakuummessung an Öldiffusionsspumpen mit dem Ionisationsmanometer besonders kritisch aufzunehmen, insbesondere auch, da eine Zersetzung der Öldämpfe zur Abscheidung von Kohlenstoff führt, der als feine Schicht an den Elektroden eine besonders gute Aktivierung der Absorption hervorrufen wird. Alle bisherigen Grenzvakuum- und Dampfdruckmessungen mit dem Ionisationsmanometer sind also sehr kritisch aufzunehmen.

Herrn Dozent Dr. H. Klumb danke ich für die Bereitstellung der Institutsmittel zu den Untersuchungen.

Berlin-Gatow, den 4. August 1943.

[1]) R. S. Morse, Rev. Scient. Instr. 11, 277, 1940.

(Aus dem Röntgen-Forschungs-Institut der Universität Bonn.)

Das Problem der Fokussierung beim Zyklotron.

Von Werner Wiebe in Bonn.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 23. Juni 1943.)

Es wird ein Überblick über die verschiedenen fokussierenden Kräfte gegeben, die auf den Ionenstrahl im Zyklotron einwirken. Ihre Abhängigkeit von der Höhe der Hochfrequenzspannung und dem Verlauf des Magnetfeldes wird angegeben. Die Vertikalbewegungen der Ionen und die daraus sich ergebende Größe der erforderlichen fokussierenden Kräfte werden diskutiert. Für das Beispiel eines kleineren Zyklotrons werden die Fokussierungskräfte quantitativ angegeben, das Magnetfeld für ein 80-Millionen-Volt-Zyklotron wird berechnet.

Einleitung.

Die im Zyklotron beschleunigten Ionen haben einen Weg von rund 100 m oder mehr zurückzulegen. Wenn eine meßbare Ausbeute an schnellen Ionen erzielt werden soll, müssen fokussierende Kräfte vorhanden sein, die den Ionenstrahl auf dieser langen Bahn zusammenhalten. Diese fokussierenden Kräfte, die zuerst von Rose[1]) und Wilson[2]) eingehend untersucht worden sind, müssen durch das elektrische Feld zwischen den Beschleunigungselektroden und durch das Magnetfeld geliefert werden. Bei einem kleineren Zyklotron ist es meist leicht möglich, durch passende Justierung des Magnetfeldes ausreichende fokussierende Eigenschaften zu erzielen. Bei einem sehr großen Zyklotron jedoch, insbesondere wenn die relativistische Massenvergrößerung schon merklich wird, treten die Erfordernisse der Fokussierung teilweise in Widerspruch zu denen der Resonanz. Die Grenze der mit dem Zyklotron überhaupt erreichbaren Energie hängt im wesentlichen davon ab, wieweit es gelingt, bei großen Ionenenergien das Problem der Fokussierung zu lösen.

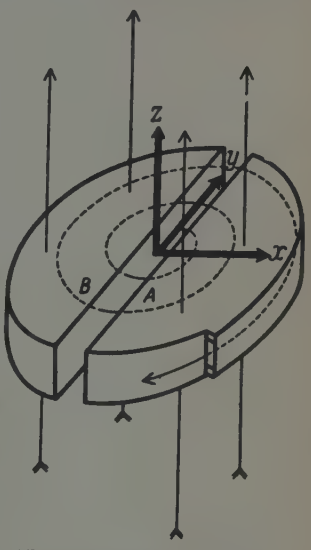


Fig. 1. Prinzip des Zyklotrons. Eingezeichnet ist das Koordinatensystem, das den Rechnungen zugrunde gelegt ist.

[1]) M. E. Rose, Phys. Rev. **53**, 392, 1938. — [2]) R. R. Wilson, Phys. Rev. **53**, 408, 1938; J. appl. Phys. **11**, 781, 1940.

Eine oberflächliche Beschreibung des Vorgangs im Zyklotron ist recht einfach: Etwa in der Mitte der Beschleunigungskammer zwischen den Duanten A und B (vgl. Fig. 1) werden Ionen der Ladung e und der Masse m gebildet. Ein Wechselfeld der Frequenz ν zwischen den Duanten habe im Augenblick der Entstehung des betrachteten Ions solches Vorzeichen, daß das Ion in das Innere von A gezogen wird. Das magnetische Feld krümmt seine Bahn, so daß es den Schlitz zwischen A und B erneut durchfliegt und dabei einen Geschwindigkeitszuwachs erhält, wenn die Spannung jetzt gerade umgepolt ist. Das ist der Fall, wenn die Frequenz des elektrischen Feldes mit der Umlaufgeschwindigkeit der Ionen übereinstimmt. Diese „Resonanzbedingung" wird beschrieben durch die Formel

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{e H}{2 \pi m c}. \tag{1}$$

Darin ist c die Lichtgeschwindigkeit und T die Zeit, die das Teilchen für einen vollen Umlauf benötigt. T ist bemerkenswerterweise von der bereits erreichten Geschwindigkeit v unabhängig, solange die relativistische Massenzunahme noch unberücksichtigt bleiben kann. Für diese Geschwindigkeit gilt, wenn r der Krümmungsradius der Bahn ist,

$$v = \frac{e H r}{m c}. \tag{2}$$

Der Vorgang wiederholt sich, und das Ion beschreibt eine Spiralbahn mit immer größer werdendem Radius. Dabei wächst seine Energie

$$E = \frac{e^2 H^2 r^2}{2 m c^2}; \tag{3}$$

bis r gleich dem Radius R der Duanten geworden ist.

Bei großen Ionenenergien ist die relativistische Massenzunahme zu berücksichtigen. Um exakte Resonanz zu erzielen, müßte bei konstanter Senderfrequenz die magnetische Feldstärke mit r zunehmen nach der Beziehung

$$H_{\text{res}} = H_0 \left(1 + \frac{v^2}{2 c^2}\right) = H_0 \left(1 + \frac{2 \pi^2}{T^2 c^2} r^2\right), \tag{4}$$

wo H_0 das Resonanzfeld bei kleiner Ionengeschwindigkeit bedeutet. Daß ein solches mit r zunehmendes Magnetfeld nicht ohne weiteres mit den Erfordernissen der Fokussierung in Einklang zu bringen ist, werden wir weiter unten sehen.

Die bisherige Beschreibung der Ionenbewegung gilt streng nur für ein Ion, das genau in der Mittelebene der Kammer ($z = 0$, vgl. Fig. 1)

entsteht und keine Anfangsgeschwindigkeit hat. Eine genauere Beschreibung der Ionenbahn muß auch die Vertikalbewegung in der z-Richtung berücksichtigen, die für die Fokussierung des Strahles entscheidend ist.

Die fokussierenden Kräfte des elektrischen Feldes.

Das elektrische Feld zwischen den Duanten stellt eine elektrische Zylinderlinse dar, in der das hindurchfliegende Teilchen im allgemeinen eine Richtungsänderung erfährt (Fig. 2). In der ersten Hälfte der Linse ($x < 0$) wird das Teilchen zur Mittelebene hingelenkt, in der zweiten ($x > 0$) erfährt es eine Ablenkung in der entgegengesetzten Richtung, die jedoch kleiner als die erste sein muß, wenn im ganzen eine fokussierende Richtungsänderung resultieren soll.

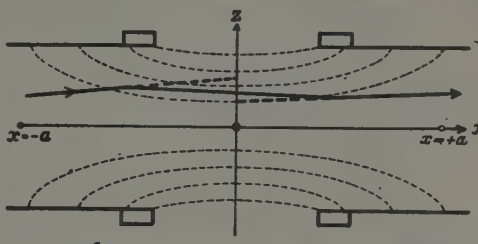


Fig. 2. Fokussierende Wirkung des elektrischen Feldes.

Während das Ion die elektrische Linse durchläuft, erfährt es einen Geschwindigkeitszuwachs, so daß es in der zweiten Hälfte kürzere Zeit verweilt als in der ersten. Die Richtungsänderung in der ersten Linsenhälfte überwiegt also, und es kommt eine fokussierende Wirkung zustande, deren Größe man angenähert berechnen kann. Sie hängt von den geometrischen Bedingungen ab und ist proportional r^{-3}, nimmt also mit wachsendem r sehr schnell ab. Da sie auch bei kleinem r gegenüber den später beobachteten Effekten kaum ins Gewicht fällt, hat sie keine praktische Bedeutung und soll hier nicht näher behandelt werden [Näheres bei Rose[1])].

Wichtiger ist die fokussierende Kraft, die entsteht, wenn das Ion nicht genau im Maximum der Beschleunigungsspannung das elektrische Feld durchfliegt, sondern ihr gegenüber eine kleine Phasenverschiebung hat. Ein der Spannung nacheilendes Ion findet dann in der zweiten Linsenhälfte eine kleinere Feldstärke als in der ersten und erfährt damit nach dem Vorhergesagten eine fokussierende Richtungsänderung. Bei der Berechnung dieses Effektes wollen wir die Änderung der Ionengeschwindigkeit v während des Durchfliegens der Linse (die im vorigen Absatz diskutiert wurde) vernachlässigen.

[1]) M. E. Rose, Phys. Rev. 53, 392, 1938.

Die Spannung an den Duanten sei $V\cos(\omega t + 0)$. $t = 0$ soll der Zeitpunkt sein, in dem das betrachtete Ion die Mitte der elektrischen Linse ($x = 0$) durchschneidet, 0 ist also die Phase der Hochfrequenz in diesem Zeitpunkt. $F_x(x, z)\cos(\omega t + 0)$ und $F_z(x, z)\cos(\omega t + 0)$ seien die Komponenten der elektrischen Feldstärke in der betrachteten x, z-Ebene (vgl. Fig. 2). Der Impuls in der z-Richtung, den das Ion beim einmaligen Durchfliegen des Spaltes zwischen Duanten bekommt, ist

$$I = \int eF_z\cos(\omega t + \theta)\,\mathrm{d}t = \frac{e}{v}\int_{-a}^{+a} F_z\cos\left(\frac{x}{r} + \theta\right)\mathrm{d}x,$$

wo $x = +a$ und $x = -a$ zwei Punkte sind, die genügend weit im feldfreien Raum im Innern der Duanten liegen. Wir machen jetzt Gebrauch von der Symmetrie des Feldes

$$F_z(x, z) = F_z(-x, z).$$

Ferner nehmen wir $x \ll r$ an, schließen also die ersten Ionenbahnen zunächst von der Betrachtung aus, und ersetzen $\sin x/r$ durch x/r. Dann können wir für den gesuchten Impuls den Ausdruck

$$I = \frac{2e\sin\theta}{vr}\int_{-a}^{0} xF_z(x, z)\,\mathrm{d}x$$

gewinnen. Für kleine Werte von z setzen wir

$$F_z(x, z) = z\frac{\partial F_z(x, z)}{\partial z} = -z\frac{\partial F_x(x, 0)}{\partial x}$$

(wegen der Quellenfreiheit des Feldes) und können nun das gesuchte Integral partiell integrieren, wobei wir davon Gebrauch machen, daß $F_x(-a, z) = 0$ ist. Für den Impuls in der z-Richtung, den das Ion beim Durchsetzen des Spaltes zwischen den Duanten erleidet, finden wir so die Beziehung

$$I = -\frac{zV\sin\theta}{rv} = -\frac{z}{r^2}\frac{mcV\sin\theta}{H},$$

wobei der Wert für v aus (2) eingesetzt ist. Bei jedem vollen Umlauf bekommt das Ion zweimal einen solchen Impuls, den wir, ohne einen allzu großen Fehler zu begehen, durch eine kontinuierlich wirkende Kraft ersetzt denken können:

$$K_{el} = -zK_{el}^{*} = -\frac{z}{r^2}\frac{eV\sin\theta}{\pi}. \qquad (5)$$

Diese Kraft ist fokussierend, wenn K_{el}^* positives Vorzeichen hat, d. h. wenn 0 positiv ist. Ionen, die der Spannung vorauseilen ($0 < 0$), werden defokussiert und gehen dabei zum größten Teil verloren (wenn nicht die fokussierende Wirkung des Magnetfeldes überwiegt).

Bemerkenswert ist, daß unter den vereinfachenden Voraussetzungen, die wir machten (kleine Werte von z, nicht zu kleine von r), K_{el} von den geometrischen Bedingungen unabhängig ist. Man kann also durch Änderung von Form und Abstand der Duanten die fokussierenden Eigenschaften des elektrischen Feldes nicht wesentlich beeinflussen. Da K_{el} mit r^{-2} abnimmt, kann die elektrische Fokussierung nur für kleine Werte von r von Bedeutung sein. Bei großen r überwiegt, wie wir sehen werden, der Einfluß des Magnetfeldes.

Die fokussierenden Kräfte des magnetischen Feldes.

Bei den ersten Versuchen mit dem Zyklotron glaubte man, ein möglichst homogenes Magnetfeld verwenden zu müssen. Eine leichte Abnahme der Feldstärke am Rande der Pole ist jedoch kaum zu vermeiden, und es zeigte sich sogar, daß diese notwendig ist und eventuell durch empirische Feldkorrekturen verstärkt werden muß. Sie bedingt nämlich eine leichte Krümmung der Feldlinien (Fig. 3), die eine fokussierende Kraft auf das fliegende Ion zur Folge hat.

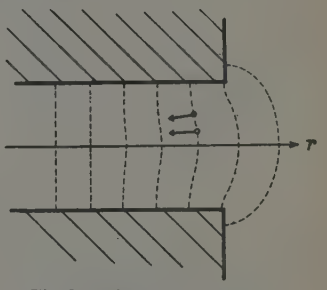


Fig. 3. Fokussierende Wirkung des magnetischen Feldes.

Zur Beschreibung des Vorgangs verwenden wir Zylinderkoordinaten r, φ, z. Die z-Komponente der Kraft auf das fliegende Ion ist

$$K_{magn} = \frac{e}{c} v H_r.$$

Darin ist H_r die r-Komponente der magnetischen Feldstärke, die wir für kleine z durch

$$z \left(\frac{\partial H_r}{\partial z}\right)_{z=0} = z \left(\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)_{z=0}$$

ersetzen und abgekürzt $z \frac{\partial H}{\partial r}$ schreiben. Berücksichtigen wir noch (2), so finden wir

$$K_{magn} = - z K_{magn}^* = z r \frac{e^2 H}{m c^2} \frac{\partial H}{\partial r}. \qquad (6)$$

Diese Kraft wirkt fokussierend, wenn $\partial H/\partial r$ negativ ist. Fordert man, daß die Fokussierungskraft des Magnetfeldes überall gleich groß ist, so muß man dem Feld die Form

$$H = H_1 - A \log r \qquad (7)$$

geben. In der Nähe von $r = 0$ ist dies natürlich nicht möglich, aber auch nicht notwendig, da wir hier eine starke fokussierende Wirkung des elektrischen Feldes haben. Bei den meisten Zyklotronen scheint H am Rande der Magnetpole (d. h. für große r) stärker abzunehmen als durch (7) angegeben. Das ist bei der üblichen Form der Polschuhe schwer zu vermeiden und hat überdies den Vorteil, daß der Ionenstrahl am Ende seiner Bahn zu einem sehr engen Bündel zusammengeschnürt wird.

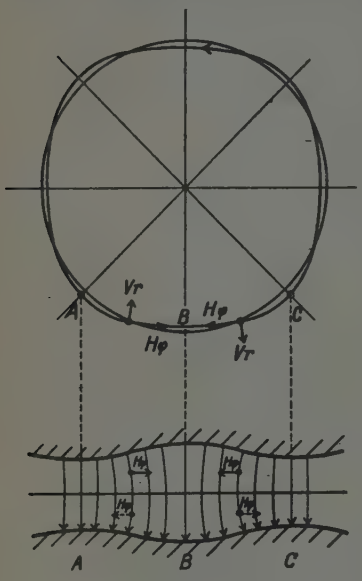


Fig. 4.
Fokussierungseffekt nach Thomas. Oben: Ionenbahn bei azimutal veränderlichem Magnetfeld. v_r und H_φ sind für ein Ion mit $z > 0$ eingezeichnet. Unten: Das Magnetfeld in der aufgerollt gedachten φ, z-Fläche längs des Bahnstückes ABC.

Bisher wurde vorausgesetzt, daß das Magnetfeld kreissymmetrisch ist, d. h. daß H nur von r, nicht jedoch von φ abhängig ist. Thomas[1]) zeigte, daß zusätzliche fokussierende Kräfte entstehen, wenn H sich mit dem Winkel periodisch ändert, z. B. nach der Beziehung

$$H = H_0 + h \sin 4\varphi. \qquad (8)$$

Die Resonanzbedingung (1) kann dann immer noch erfüllt sein, wenn man den Durchschnittswert H_0 der magnetischen Feldstärke längs einer annähernd kreisförmigen Ionenbahn einsetzt. Das Ion trifft auf jedem Umlauf 4 Maxima und 4 Minima der Feldstärke an, seine Bahn nähert sich einem Quadrat (Fig. 4), wenn man von dem Geschwindigkeitszuwachs durch das elektrische Feld zunächst einmal absieht. An den Stellen größter Feldstärke ist die Bahn am stärksten gekrümmt und entfernt sich am weitesten vom Kammermittelpunkt. In dem Teil der Bahn, wo r abnimmt, hat das Magnetfeld eine φ-Komponente, so daß

[1]) L. H. Thomas, Phys. Rev. 54, 580 u. 588, 1938.

eine fokussierende Kraft entsteht. Wo r zunimmt, hat die φ-Komponente anderes Vorzeichen, die Richtung der Kraft bleibt also dieselbe (Fig. 4). Die fokussierende Kraft in der z-Richtung ist proportional der r-Komponente der Geschwindigkeit des Ions und der φ-Komponente des Magnetfeldes:

$$K_T = \frac{e}{c} v_r H. \tag{9}$$

H_φ ist leicht anzugeben:

$$H_\varphi = z\left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{z}{r}\left(\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\right)_{z=0} = -\frac{z}{r} 4h \cos 4\varphi. \tag{10}$$

Die Bahnkurve kann auf einfache Weise nur unter der Voraussetzung $h \ll H$ berechnet werden. Nach Dänzer [1]) ist

$$r = r_0\left(1 - \frac{1}{15}\frac{h}{H} \sin 4\varphi\right) \tag{11}$$

und also

$$v_r = \frac{8}{15}\frac{h r \pi}{H T} \cos 4\varphi. \tag{12}$$

Aus (9), (10) und (12) folgt jetzt leicht

$$K_T = -z \frac{32}{15}\frac{h^2 e \pi}{H c T} \cos^2 4\varphi.$$

Da uns wieder nur der Mittelwert dieser Kraft interessiert, ersetzen wir $\cos^2 4\varphi$ durch $\frac{1}{2}$ und schreiben unter Berücksichtigung von (1)

$$K_T = -z K_T^* = -z \frac{8}{15}\frac{e^3 h^2}{m c^3}. \tag{13}$$

Statt die Feldstärke mit der Periode $\pi/2$ variieren zu lassen, kann man nach Schiff [2]) auch die Periode $2\pi/3$ wählen. Die Durchrechnung ergibt, daß in (13) dann der Faktor 8/15 durch 9/16 zu ersetzen ist. Der Vorteil ist also nicht groß, ihm steht der Nachteil gegenüber, daß nach (11) die Ausbuchtung der Ionenbahn und damit die notwendige Ausdehnung des Magnetfeldes größer wird. Die Periode π gibt nach Thomas [3]) keine stabilen Bahnen, beliebig kleinere Bruchteile von 2π sind jedoch möglich. Sie sind aber experimentell umständlicher herzustellen und bieten keine Vorteile.

Es liegt nahe, diesen von Thomas angegebenen Fokussierungseffekt zu benutzen, um die defokussierende Wirkung eines nach (4)

[1]) H. Dänzer, Ann. d. Phys. 41, 485, 1942. — [2]) L. I. Schiff, Phys. Rev. 54, 1114, 1938; 55, 422, 1939. — [3]) L. H. Thomas, Phys. Rev. 54, 580 u. 588, 1938.

zunehmenden Magnetfeldes zu kompensieren. Das gelingt, wenn man ein Magnetfeld

$$H = H_0\left(1 + \frac{2\pi^2}{T^2c^2}r^2 + \sqrt{\frac{15}{2}}\,\frac{\pi}{Tc}\,r\sin 4\varphi\right) \tag{14}$$

verwendet. Dieses Magnetfeld gibt exakte Resonanz auch bei hohen Ionengeschwindigkeiten und hat weder fokussierende noch defokussierende Eigenschaften. Da man ohne Fokussierung nicht auskommt, muß also die Feldstärke etwas weniger mit r zunehmen, oder die Winkelschwankung des Feldes muß noch etwas größer sein.

Die Voraussetzung $h \ll H$ ist in praktischen Fällen oft nicht mehr zutreffend, vielmehr wird bei einem 80-e-MV-Zyklotron $h/H = 0{,}42$ (vgl. Kap. 6). Trotzdem bleibt die Ausbuchtung der Bahn relativ klein (etwa 3 % des Radius). Eine genaue Berechnung des Magnetfeldes, das zu einer Bahnkurve nach Gl. (11) gehört, ergab, daß es von dem durch (8) dargestellten Feld um höchstens 2,5 % abweicht. Gl. (14) ist also jedenfalls zu einer ersten Orientierung über das benötigte Magnetfeld auch bei einem sehr großen Zyklotron noch brauchbar.

Vertikalbewegung der Ionen unter dem Einfluß der fokussierenden Kräfte.

Die Bewegung der Ionen in der z-Richtung ist bestimmt durch die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\,t^2} + z\,\frac{K^*}{m} = 0, \tag{15}$$

wo $-zK^*$ die z-Komponente der auf die Ionen wirkenden Kraft ist, die sich im wesentlichen aus den fokussierenden Kräften nach (5), (6) und (13) zusammensetzt und im allgemeinen von r und damit von der Zeit abhängig ist.

Ist K^* positiv und zudem von r unabhängig, ist also die fokussierende Kraft überall gleich groß, so ist die Lösung von (15) einfach: Das Ion pendelt um die Mittelebene mit der Periode

$$\tau = 2\pi\,\frac{m}{K^*} \tag{16}$$

und der konstanten Amplitude A. Ändert sich K^* nur langsam im Vergleich zur Periode τ, so kann man ebenfalls eine angenäherte Lösung von (15) angeben [vgl. Rose [1])], von der uns hier nur interessiert, daß die Amplitude der Pendelung

$$A = \text{const} \cdot K^{*-1/4} \tag{17}$$

[1]) M. E. Rose, Phys. Rev. **53**, 392, 1938.

ist. Diese Gleichung gibt uns zugleich die Breite des Ionenstrahls (in der z-Richtung). Der Strahl ist um so breiter, je kleiner die fokussierende Kraft K^* ist. Bei den meisten Zyklotronen ist diese für etwa $r = R/2$ oder $r = R/3$ besonders klein, d. h. die Strahlbreite erreicht hier ein Maximum, weil K^*_{el} schon stark abgenommen hat, während K^*_{magn} noch klein ist. Bei größerem r pflegt dann K^*_{magn} stark zuzunehmen, so daß der Strahl zu einem wenige Millimeter breiten Bündel zusammengedrängt wird.

Die Bahn des einzelnen Ions ist durch (16) und (17) im wesentlichen festgelegt, wenn die Anfangsbedingungen gegeben sind. Dabei bemerken wir noch, daß ein Ion, das in einem Punkt z die Vertikalgeschwindigkeit v_z hat, sich bis zu einer Amplitude A von der Mittelebene entfernt, wo

$$K^* A^2 = K^* z^2 + m v_z^2 \tag{18}$$

ist.

Quantitatives über die erforderlichen fokussierenden Kräfte.

Die zulässige Amplitude der Pendelung der Ionen richtet sich nach der Höhe der Duanten, bei zu großer Amplitude stoßen sie an die Duanten und gehen verloren. Damit ist A [vgl. Gl. (18)] gegeben und liegt je nach den Dimensionen des Zyklotrons etwa zwischen 1 und 10 cm. Wir müssen nun noch Anfangsort z und Anfangsgeschwindigkeit (in vertikaler Richtung) v_z der Ionen kennen, um die notwendige fokussierende Kraft K^* zu berechnen. Da die früher abgeleiteten Formeln für größere Werte von z nicht mehr streng gültig sind, werden wir so freilich nur die Größenordnung von K^* finden können, was für praktische Anwendungen jedoch genügt.

Die Anfangsgeschwindigkeit v_z kommt in erster Linie durch die erste Einwirkung des elektrischen Feldes zustande. Die Ionen durchlaufen nach ihrer Entstehung zuerst nur die zweite Hälfte der elektrischen Linse, die bekanntlich defokussierende Eigenschaften hat. Die Ionen erhalten dabei eine um so größere vertikale Anfangsgeschwindigkeit, je weiter ihr Entstehungsort von der Mittelebene entfernt ist, d. h. je größer z ist.

Für das Bonner Zyklotron, das mit Deuteronen betrieben wird (Höhe und Abstand der Duanten je 2 cm, V = etwa 10000 Volt), wurden die Fokussierungsbedingungen genauer durchgerechnet. Eine Überschlagsrechnung ergab für die vertikale Anfangsgeschwindigkeit $v_z = \sim z \cdot 2 \cdot 10^7$ cm/sec, $A = 1$ cm ist die maximal zulässige Strahlamplitude. Sollen noch Ionen ausgenutzt werden, die in einer Höhe

$z = 0{,}5$ cm entstehen, dann muß nach (18) eine fokussierende Kraft $K^* = 4{,}4 \cdot 10^{-10}$ g $\cdot$ sec^{-2} vorhanden sein (die wir überall konstant annehmen wollen). Sollen nur Ionen mit $z = 0{,}1$ cm ausgenutzt werden, dann kommen wir mit $K^* = 1{,}3 \cdot 10^{-11}$ aus. Der erste Fall entspricht der üblichen Zyklotron-Ionenquelle, bei der Elektronen aus einer offenen Glühkathode den Zwischenraum zwischen den Duanten ionisieren, der zweite Fall entspricht dem ebenfalls oft verwendeten Kapillarbogen, wo die Entstehungsstelle der Ionen nur wenige Millimeter groß ist (die geänderte Feldverteilung im zweiten Fall ist allerdings nicht berücksichtigt). Beim Kapillarbogen kommen wir also mit wesentlich schwächeren fokussierenden Kräften aus. Ist bei der offenen Glühkathode K^* zu klein, dann nutzen wir nur einen sehr kleinen Teil der Ionen aus. Bis zu einem gewissen Grade müßte sich die Ausbeute in diesem Fall verbessern lassen, wenn die offenen Seiten der Duanten an der Entstehungsstelle der Ionen mit einem Gitter versehen werden, das die Krümmung der Feldlinien verringert.

Gegenüber dieser durch das elektrische Feld erzeugten vertikalen Anfangsgeschwindigkeit v_z fällt die „natürliche" Anfangsgeschwindigkeit der Ionen kaum ins Gewicht. Beim Kapillarbogen ist sie im wesentlichen durch die Temperaturbewegung bestimmt und dürfte von der Größenordnung 10^5 cm/sec sein. Bei der offenen Glühkathode überträgt das ionisierende Ion einen Teil seiner Energie, jedoch kann ein 10000-Volt-Elektron einem Deuteron beim elastischen Stoß höchstens eine Geschwindigkeit von etwa $3 \cdot 10^6$ cm/sec erteilen.

Der kreisende Ionenstrahl stellt eine Raumladung dar, die der fokussierenden Kraft entgegenwirkt und bei den Berechnungen von dieser zu subtrahieren ist. Die Raumladung des Ionenstrahls ist praktisch vom Radius r unabhängig, abgesehen von kleinen r-Werten, wo die einzelnen Spiralen sich noch nicht überdecken. Eine angenäherte Rechnung ergab für das Beispiel eines Zyklotrons mit großer Strahlausbeute (10^{-4} Amp.), dessen Strahlbreite in der z-Richtung zu 1 cm angenommen wurde, eine defokussierende Kraft $K_{\text{def}} = \sim z \cdot 5 \cdot 10^{-12}$. Das ist ein sehr kleiner Wert, der gegenüber den fokussierenden Kräften meist nicht ins Gewicht fällt, auch wenn er vielleicht zu Anfang der Bahn etwas größer ist. Erst wenn es gelingen sollte, die Strahlstromstärke noch erheblich weiter zu steigern, dürfte auch der Einfluß der Raumladung wichtig werden.

Weitere schädliche Einflüsse auf den Ionenstrahl treten auf, wenn die Symmetrie des elektrischen und magnetischen Feldes nicht völlig

gewahrt ist. Ganz ist dies sicher nicht immer zu vermeiden, es kommt jedenfalls auf äußerst sorgfältige Konstruktion der Magnetpole und der Duanten an.

Ist z. B. $\partial H/\partial r$ an einer Stelle positiv (etwa durch einen Fehler im Eisen), dann hat dies eine erhebliche Schwächung des Strahles zur Folge. Das übliche Korrigieren des Feldes („Shimmen") hat nicht zuletzt den Zweck, solche Inhomogenitäten auszugleichen.

Eine sehr schädliche Unsymmetrie des elektrischen Feldes entsteht dann, wenn die Duanten einander nicht genau gegenüberstehen (Fig. 5), die Feldstärke hat dann auch in der Mittelebene eine z-Komponente. Ist α der Neigungswinkel des Feldes, so ist der Impuls in der z-Richtung, den das durch das elektrische Feld fliegende Ion erleidet.

$$I_z = \frac{e\,V \operatorname{tang} \alpha}{v}\,.$$

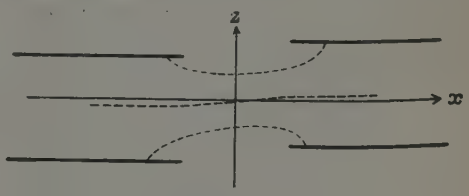


Fig. 5.
Defokussierende Wirkung falsch justierter Duanten.

Sind beide Duanten nach Fig. 5 gegeneinander versetzt, jedoch mit ihren Kanten genau parallel, dann wird der nächste Durchgang durch den Beschleunigungsspalt einen entgegengesetzten Impuls bringen, die Wirkungen heben sich auf. Sind die Kanten der Duanten jedoch schräg zueinander in dem Sinne, daß die Unsymmetrie des Feldes für $y < 0$ (vgl. Fig. 1) anders ist als für $y > 0$, so werden die Impulse sich verstärken und den Strahl aus der Mittelebene herauslenken. Eine zu starke Ablenkung des Strahles kann nur durch eine genügend starke fokussierende Kraft des elektrischen oder magnetischen Feldes verhindert werden. Ist z. B. beim Radius $r = 10$ cm der Neigungswinkel des Feldes $\alpha = 2^0$, $V = 10000$ Volt, die zulässige Abweichung des Strahles von der Mittelebene $z = 0{,}5$ cm, so muß die fokussierende Kraft mindestens $K^* = 4 \cdot 10^{-11}$ sein. Es ist aus der Praxis bekannt, daß die Justierung der Duanten von außerordentlichem Einfluß auf die Strahlausbeute ist. Nach unseren Überlegungen muß es besonders wichtig sein, daß eine Schwenkung um die x-Achse vorgenommen werden kann.

Anwendungsbeispiele.

Kennt man die Spannung V zwischen den Duanten und den genauen Verlauf des Magnetfeldes, so kann man die fokussierenden Kräfte

berechnen. In Fig. 6 ist das für das Beispiel des Bonner Zyklotrons durchgeführt. Das Magnetfeld wurde ausgemessen, die Hochfrequenzspannung betrug etwa 10000 Volt. Daraus wurden die fokussierenden Kräfte berechnet und die Strahlamplituden für zwei verschiedene Anfangsphasen des beschleunigten Ions ($\sin 0 = 0{,}2$ und $\sin 0 = 0{,}5$) abgeleitet. Es ist beim Bau eines Zyklotrons kaum zu vermeiden (höchstens durch ein anfänglich zunehmendes Magnetfeld), daß die fokussierenden Kräfte bei kleinen Werten von r sehr groß sind und dann schnell abnehmen, um erst später durch den Einfluß des Magnetfeldes wieder zu wachsen. Dies hat in unserem Beispiel zur Folge, daß die Strahlamplitude bei etwa $r = 10$ cm ein Maximum hat, dessen genaue Lage etwas von der Phase abhängt. Links von diesem Maximum ist die Kurve (Fig. 6, unten) gestrichelt gezeichnet und bedeutet hier den ausgenutzten Teil des Ionenstrahles. Da das Magnetfeld nicht für alle Werte von r den genauen Resonanzwert haben kann, ändert sich die Phase des kreisenden Ions allmählich. In unserem Beispiel ist diese Phasenänderung verhältnismäßig gering, so daß sie nicht berücksichtigt wurde. Die Richtigkeit der Überlegungen konnte für größere r-Werte durch einige Messungen bestätigt werden: Ein Kohlestückchen wurde zwischen die Duanten geschoben und die Größe der durch die schnellen Deuteronen aktivierten Stelle photographisch (durch Auflegen auf einen Film) gemessen. Bei $r = 17$ cm ist der „Brennfleck" etwa 7 mm, bei $r = 20$ cm nur etwa 4,5 mm hoch. Das Verhältnis dieser beiden Werte stimmt mit der Vorhersage gut überein.

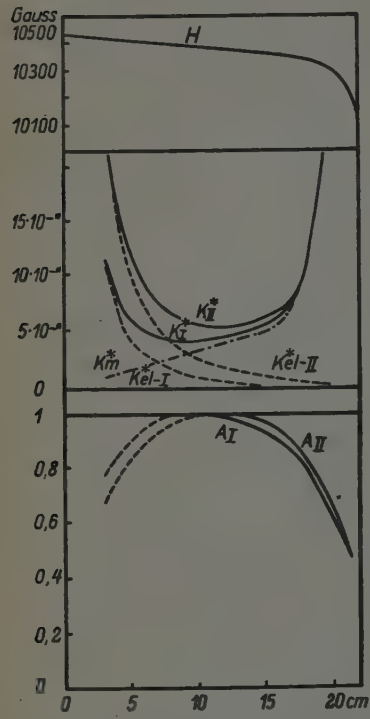


Fig. 6. Fokussierungsbedingungen beim Bonner Zyklotron. Oben: Abhängigkeit der magnetischen Feldstärke vom Radius r (gemessen). Mitte: Fokussierende Kräfte des elektrischen Feldes bei 10000 Volt (K^*_{el}) und des magnetischen Feldes (K^*_m) sowie die Summe von beiden (K^*). Der Index I bedeutet: Anfangsphase $\sin\theta = 0{,}2$, Index II: $\sin\theta = 0{,}5$. Unten: Amplitude des Ionenstrahls in willkürlichem Maßstab.

Bei größeren Zyklotronen, die Deuteronen von etwa 10 e-MV und mehr liefern, ist die relativistische Massenzunahme schon merklich. Trotzdem benutzt man hier Magnetfelder, die mit r abnehmen, um genügende fokussierende Kräfte zu erzeugen. Die Folge ist, daß die Phase des Ions sich verhältnismäßig schnell ändert, die Gesamtzahl der Umläufe darf also nicht zu groß sein, d. h. man braucht möglichst große Hochfrequenzspannungen, eine gewisse Mindestspannung darf nicht unterschritten werden. Diese Verhältnisse sind von Dänzer[1]) näher diskutiert worden. Aus veröffentlichten Feldstärkekurven amerikanischer Zyklotronen geht hervor, daß die fokussierenden Kräfte etwa von der Größenordnung $K^* = 10^{-10}$ sein dürften.

Will man die Ionenenergie noch wesentlich weiter steigern, dann muß man den Fokussierungseffekt nach Thomas ausnutzen, also ein Magnetfeld verwenden, das sich mit dem Winkel ändert. Wir wollen im folgenden das Magnetfeld für ein Zyklotron berechnen, das Deuteronen von 80 e-MV erzeugen soll.

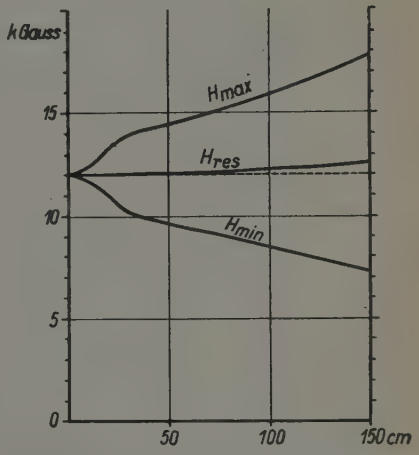


Fig. 7. Magnetfeld eines Zyklotrons für 80 e-MV-Deuteronen. H_{res}: Mittlerer Wert der magnetischen Feldstärke längs des Kreisumfangs vom Radius r. H_{max} und H_{min}: Größte bzw. kleinste Feldstärke des mit dem Winkel φ variierenden Feldes.

Bei einem ausnutzbaren Radius der Magnetpóle von 150 cm muß die magnetische Feldstärke $H_0 = 12000$ Gauß sein. Bei 80 e-MV ist die Masse des Deuterons um 4,25 % gewachsen, d. h. das (mittlere) Magnetfeld muß bei $r = 150$ cm 12500 Gauß betragen. Um diese Feldzunahme auszugleichen, ist nach (14) ein Thomas-Feld mit $h/H = 0{,}4$ erforderlich, ein Feld also, das mit der Periode $\tau/2$ zwischen den Werten 17300 und 7700 Gauß schwankt. Beide Werte gelten für den äußersten Rand des ausgenutzten Magnetfeldes, für kleinere r-Werte kann die Schwankung geringer sein. Ein solches Feld hat weder fokussierende noch defokussierende Eigenschaften. Die notwendige fokussierende Kraft können wir z. B. dadurch erzeugen, daß wir den Anstieg der Feldstärke mit r etwas weniger groß machen. Wegen der großen Zahl

[1]) H. Dänzer, Ann. d. Phys. **41**, 485, 1942.

der Umläufe bei einem so großen Zyklotron ändert sich dabei jedoch die Phase sehr schnell, so daß es empfehlenswerter sein dürfte, diese fokussierende Kraft durch eine noch etwas stärkere Winkelschwankung zu erzeugen. Ein Feld mit $h = 1600$ Gauß gibt nach (13) $K_r^* = 10^{-10}$, was wohl ausreichend sein dürfte. Da nach (13) das Quadrat von h maßgebend ist, muß insgesamt die Schwankung am Rande der Kammer ($r = 150$ cm) $h = 5050$ Gauß betragen, das Feld muß zwischen 17 550 und 7450 Gauß variieren. Fig. 7 zeigt den Verlauf des Feldes für alle Werte von r. Es ist so bemessen, daß die fokussierende Kraft ungefähr überall konstant ist. Bei der experimentellen Verwirklichung eines so komplizierten Feldverlaufs ist darauf zu achten, daß die Schwankung des Feldes nicht genau in dem vorberechneten Maße hergestellt werden braucht, insbesondere darf sie mit wachsendem r etwas größer werden, um eine Zusammenschnürung des Strahles zu erreichen. Unter allen Umständen muß jedoch die mittlere Feldstärke für jedes r möglichst genau dem berechneten Wert entsprechen. Mit einem solchen Feld ist es grundsätzlich möglich, mit einer beliebig niedrigen Hochfrequenzspannung auszukommen.

Grundsätzlich besteht noch eine andere Möglichkeit, Ionen im Zyklotron auf sehr hohe Geschwindigkeiten zu bringen. Man richtet das Magnetfeld in der gewöhnlichen Weise ohne Winkelschwankung so ein, daß genügende fokussierende Kräfte vorhanden sind. Das Feld nimmt also mit r ab. Damit nun die Ionen nicht außer Takt fallen, muß die Frequenz des Senders sich ändern, dieser muß also moduliert sein (Frequenzmodulation). Um Ionen von 80 e-MV zu erzeugen, müßte die Frequenz um etwa $\pm$ 2,5 % schwanken, d. h. der mit den Duanten verbundene Schwingungskreis muß ziemlich stark gedämpft sein, damit bei einer solchen Verstimmung die Senderamplitude sich nicht zu stark ändert. Die Modulationsfrequenz richtet sich nach der Zahl der Umläufe und beträgt bei einer Spannung von 50 kV etwa 6000 Hertz. Ein großer Nachteil dieses Verfahrens ist, daß nur in einem kleinen Bruchteil der Modulationsperiode die richtige Anfangsfrequenz vorhanden ist, so daß größenordnungsmäßig nur $^1/_{100}$ bis $^1/_{1000}$ des Ionenstroms zu erwarten ist, den ein Zyklotron mit nichtmoduliertem Sender liefern würde.

Trennung der Thalliumisotope.

II. Optische Untersuchung verschiedener Thalliumgemische.

Von **H. Kopfermann** und **W. Walcher** in Göttingen.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 28. August 1943.)

Zur Nachprüfung der Entmischungsergebnisse der vorangehenden Arbeit[1]) wurde die Auffängerfolie entsprechend der örtlichen Entmischung der Thalliumisotope in vier Teile geteilt, jede Probe einzeln in eine Spezialhohlkathode gebracht und auf ihre Hyperfeinstruktur untersucht. Die grüne Thalliumlinie ließ sich so stark anregen, daß trotz der geringen zur Verfügung stehenden Substanzmengen in halbstündiger Belichtungszeit ein intensives Hyperfeinstrukturbild photographiert werden konnte, das mit Hilfe von Schwärzungsmarken ausgewertet wurde. Als Ergebnis dieser Bemühungen wurde auf der schweren Seite des Belages ein Gemisch mit 96% Tl^{205}, auf der leichten Seite ein Gemisch mit 56% Tl^{203} gefunden. Diese Werte liegen unter den elektrisch ermittelten Entmischungsgraden und erklären sich daraus, daß das optische Verfahren den durch unvermeidliche Schwankungen der Versuchsbedingungen während des gesamten Trennprozesses erzeugten Entmischungsgrad des Endproduktes angibt, während das elektrische Verfahren nur die augenblickliche Entmischung anzeigt.

1. Einleitung. In der vorhergehenden Arbeit[1]) wurde über die Trennung der Thalliumisotope Tl^{203} und Tl^{205} berichtet. Die Synthese der Stromverteilungskurve hatte zu dem Ergebnis geführt, daß eine quantitative Trennung der beiden Isotope nicht erreicht werden konnte, insbesondere, daß im Flügel der leichten Komponente noch ein erheblicher Prozentsatz an schwerem Isotop vorhanden war. Diese Aussage bezieht sich auf einen Momentanwert des Mischungsverhältnisses während des Versuchs und sagt noch nichts über die Entmischung des beim gesamten Trennprozeß erhaltenen Endproduktes aus, der für die praktische Verwertung des Präparates in erster Linie interessiert. Es war also wünschenswert, das oben erhaltene Ergebnis nachzuprüfen, vor allem aber den Entmischungsgrad des Endproduktes zu bestimmen. Dies ist möglich durch Untersuchung der Hyperfeinstruktur (Hfs.) der Thalliumatomlinien, die mit Hilfe der erhaltenen Proben in einer Hohlkathode erzeugt werden können.

2. Beschreibung der Methode. Zur optischen Untersuchung der Güte der Entmischung wurde die Aluminiumfolie, die den aufgefangenen Thalliumniederschlag enthielt, in die vier Teile zerschnitten, die in Fig. 5 der vorangehenden Arbeit angegeben sind. Auf jedem Teilblech befanden sich etwa 20 μg Thallium, eine Substanzmenge, die gerade

[1]) Siehe S. 401—406.

ausreichte, um mit Hilfe einer Spezialhohlkathode in einer halbstündigen Belichtungszeit eine genügend intensive Hfs.-Aufnahme zu erhalten. Die gewonnenen Aufnahmen wurden mit einem Zeißschen Mikrophotometer photometriert und mit Hilfe der auf die photographischen Platten

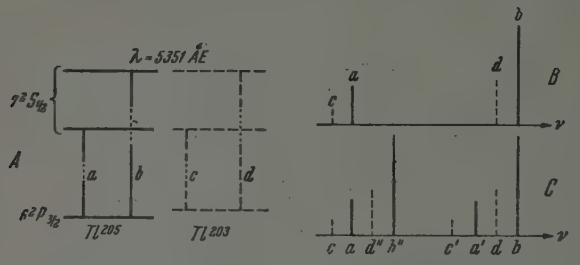


Fig. 1. A. Hfs.-Termschema, B. Aufspaltungsbild bei 5 mm, C. dasselbe bei 16 mm Etalon, für die grüne Thalliumlinie $\lambda = 5351$ Å.

gedruckten Schwärzungsmarken ausgewertet. Aus den so erhaltenen Intensitätskurven der Hfs. der einzelnen Proben konnte das Mischungsverhältnis bestimmt werden.

Als geeignet erwies sich die grüne Thalliumlinie $\lambda = 5351$ Å ($^2P_{3/2} - {}^2S_{1/2}$), die eine relativ einfache Hfs.[1]) und eine gerade auflösbare

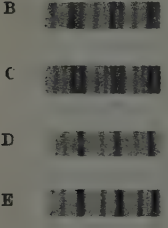


Fig. 2.
Interferometeraufnahmen verschiedener Thalliumgemische:
A. Natürliches Gemisch 29 % Tl^{203}, 71 % Tl^{205};
B. Probe 1 56 % Tl^{203}, 44 % Tl^{205};
C. Probe 2 50 % Tl^{203}, 50 % Tl^{205};
D. Probe 3 10 % Tl^{203}, 90 % Tl^{205};
E. Probe 4 4 % Tl^{203}, 96 % Tl^{205}.

Isotopieverschiebung besitzt. In Fig. 1A ist das Hfs.-Termschema des Überganges, und zwar für jedes Isotop getrennt, angegeben. Jeder der beiden isotopen Kerne hat den Drehimpuls $\frac{1}{2} \cdot h/2\pi$. Der $^2P_{3/2}$-Zustand spaltet infolge einer Störung durch höherliegende Terme nicht meßbar auf. Die Intensitäten der Komponenten a und b bzw. c und d verhalten sich wie 1 : 3. Das Mischungsverhältnis von $Tl^{205} : Tl^{203}$ beträgt 2,44. So erklärt sich das in Fig. 1B schematisch gezeichnete Aufspaltungsbild, das auch experimentell beobachtet wird. Da der Abstand der benach-

[1]) H. Schüler u. I. E. Keyston, ZS. f. Phys. **70**, 1, 1931.

barten Isotopen-Komponenten ($a - c$, $b - d$) nicht sehr groß ist ($0{,}055\ \mathrm{cm}^{-1}$), so wurde mit einem möglichst großen Etalonabstand des Perot-Fabry (16 mm) gearbeitet, bei dem sich die Ordnungen so überlagern, wie es in Fig. 1C angegeben ist. (d'', b'' sind Komponenten der nächsthöheren, a', c' die der vorhergehenden Ordnung.) Auf diese Weise liegen die vier in Frage kommenden Komponenten der Linie fast äquidistant und gut aufgelöst nebeneinander und lassen sich bequem untersuchen. Eine Interferometeraufnahme der Linie mit 16 mm Etalon ist in Fig. 2A reproduziert. Die Komponenten des Tl^{205} sind von denen des Tl^{203} genügend getrennt, um die Entmischung quantitativ zu erfassen.

3. Beschreibung der Apparatur. Um mit so geringen Substanzmengen, wie sie zur Verfügung standen, eine Interferometeraufnahme machen zu können, bedurfte es besonderer Bemühungen, um die Intensität der grünen Linie genügend hochzuzüchten und diese Intensität über die Dauer der Belichtung aufrechtzuerhalten. Verwendet wurde eine abgewandelte Schüler-Gollnowsche Sparlampe in der Art, wie sie der eine von uns[1]) zum Nachweis der Rb-Trennung benutzt hatte. Fig. 3 zeigt eine Skizze der Hohlkathode, aus der die Bauart hervorgeht. Das untere Ende des Glaszylinders G war mit einem Messingflansch versehen, auf den eine Messingplatte mittels Gummidichtung angedrückt war, so daß die Lampe in einfacher Weise geöffnet und gefüllt werden konnte. Der Aluminiumhohlzylinder Z, der mit den thalliumbedeckten Aluminiumfolien ausgekleidet werden konnte, ließ sich auf diese Weise leicht von unten her in den Hohlkathodenraum einführen. Das Trägergas wurde von oben zugeführt, strömte durch sechs Kanäle, die den Hohlkathodenraum symmetrisch umgaben,

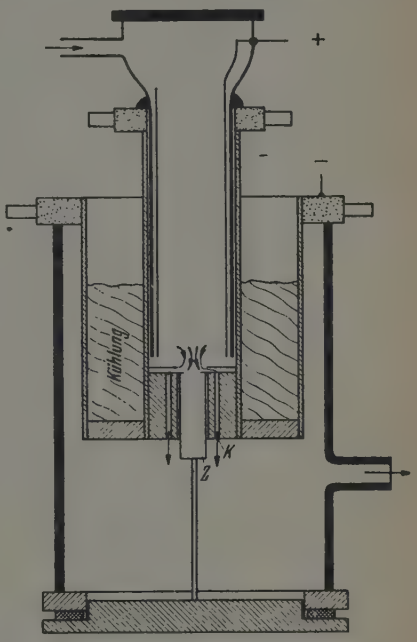


Fig. 3. Hohlkathode.

[1]) W. Walcher, ZS. f. Phys. 108, 376, 1938.

in den unteren Raum und wurde von dort aus mit Hilfe einer Zirkulationspumpe über die üblichen Reinigungsanordnungen zum oberen Ende der Lampe zurückgeführt. Als Trägergas erwies sich Argon als besonders wirksam für die Anregung der grünen Thalliumlinie. Der Gasdruck in der Lampe betrug $\sim 0{,}7$ mm Hg. In den ersten Minuten nach der Zündung war das Thalliumleuchten schon bei 15 mA Betriebsstrom-

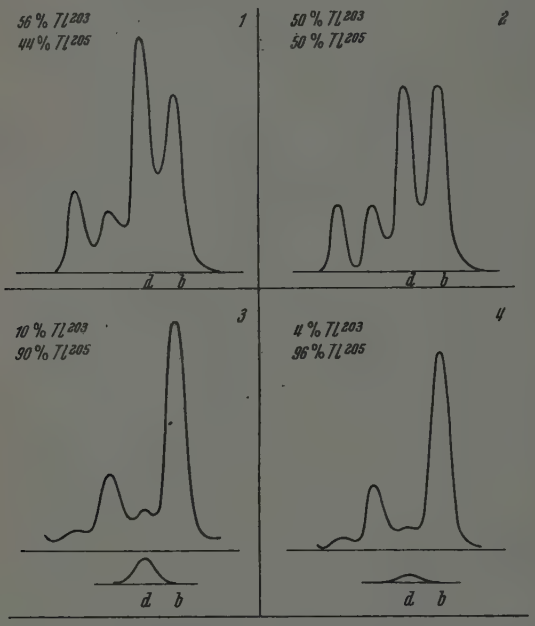


Fig. 4. Auf Intensität umgezeichnete Photometerkurven der Interferometeraufnahmen der Proben 1 bis 4 (Fig. 2B bis 2E).

stärke so intensiv, daß die Hyperfeinstruktur von $\lambda = 5351$ Å okular gut zu sehen war. Durch langsame Steigerung der Stromstärke bis auf 100 mA konnte die Intensität über eine halbe Stunde einigermaßen aufrechterhalten werden. Dann allerdings war selbst bei wesentlich höheren Stromstärken bestenfalls nur ein kurzes Aufleuchten der Struktur zu beobachten, ein Zeichen dafür, daß die Substanz bis auf kleinste Reste verdampft war. Das Hohlkathodenleuchten wurde auf den Spalt eines Steinheilschen Dreiprismenapparates abgebildet, in dessen parallelem Strahlengang ein mit etwa 90 % Reflexionsvermögen verspiegelter Perot-Fabry stand. Für die Aufnahmen wurden Isopan SS-Platten verwendet.

4. Ergebnisse. In Fig. 2 sind der Reihe nach Aufnahmen zu sehen, welche die Hfs. des natürlichen Gemisches (A) und der vier verschiedenen Proben des aufgefangenen Thalliumniederschlages (B–E) wiedergeben. Die Auswertung dieser Strukturen mit Hilfe der Schwärzungsmarken führte zu den Intensitätskurven der Fig. 4. Von besonderem Interesse sind dabei die Intensitätskurven der Bereiche *1* und *4*, die den maximal erhaltenen Entmischungsgrad der beiden Isotope anzeigen. Am besten läßt sich dieser aus den beiden Komponenten b und d ermitteln, von denen b das Tl^{205}, d das Tl^{203} vertritt. Die freiliegende Flanke von b ermöglicht in eindeutiger Weise durch Spiegelung an der Symmetrielinie der Komponente die Feststellung der Linienform von b und dann sukzessive auch die der anderen Komponenten. Aus dem Vergleich der Höhen der auf diese Weise analysierten Komponenten läßt sich das Mischungsverhältnis angeben. Die Planimetrierung der Linienformen führte zu denselben Werten. Eine Handhabe für die saubere Ausführung des Verfahrens war noch dadurch gegeben, daß, wie schon anfangs betont, die Intensitätsverhältnisse $b : a = d : c = 3 : 1$ sein sollen. Im Falle der Probe *4* tritt dies bezüglich der Intensitäten von b und a unmittelbar in Erscheinung. In Tabelle 1 ist das Ergebnis der auf diesem optischen Wege bestimmten Mischungsverhältnisse

Tabelle 1. Vergleich der optisch und elektrisch ermittelten Entmischungsgrade der verschiedenen Thalliumproben.

Teil	Optisch		Elektrisch	
	Tl^{203}	Tl^{205}	Tl^{203}	Tl^{205}
1	56 %	44 %	65 %	35 %
2	50	50	60	40
3	10	90	11	89
4	4	96	2,5	97,5
natürlich	29 %	71 %	29 %	71 %

neben die Ergebnisse der Synthese des elektrisch ermittelten Ionenstrombildes gestellt. Die *optisch* bestimmten Mischungsverhältnisse aller vier Proben zeigen einen geringeren Entmischungsgrad als die *elektrisch* ermittelten. Dieses Ergebnis erklärt sich daraus, daß das elektrische Verfahren nur einen Momentanwert des Mischungsverhältnisses liefert, während das optische Verfahren die Entmischung des Endproduktes angibt, die wegen der langsamen unregelmäßigen Schwankungen der Versuchsbedingungen während des gesamten Trennversuchs etwas ungünstiger ausfällt.

5. Bemerkung zur Isotopieverschiebung im Tl I-*Spektrum.* Die vorgenommene Isotopenentmischung zeigt in eindeutiger Weise, daß die aus der Hfs. des natürlichen Gemisches bestimmte Zuordnung der einzelnen Komponenten zu den Tl-Isotopen zu Recht besteht. Diese Feststellung ist nicht unwichtig, wenn man bedenkt, daß aus dieser Zuordnung auf eine verkehrte Isotopenlage im Tl I-Spektrum geschlossen werden muß, die theoretisch völlig unverständlich ist. Bekanntlich[1]) deutet man den Isotopieverschiebungseffekt im Spektrum der schweren Elemente als Kernvolumeneffekt, und die Auswertung dieses Gedankens führt zu der Forderung, daß das jeweils leichtere Isotop eine größere Ionisierungsarbeit als das schwerere besitzt, daß also der Term des leichteren Isotops tiefer liegt als der des schweren (normale Termlage), was in der Mehrzahl der Isotopieverschiebungen bei anderen Spektren, z. B. auch beim Tl II-Spektrum gefunden wurde. Die Analyse der beobachteten Isotopieverschiebungen im Tl I-Spektrum hat aber zu dem Ergebnis geführt, daß nicht, wie erwartet, der $7\,^2S_{1/2}$-Term die größte Isotopieverschiebung und normale Termlage besitzt, sondern daß von allen beobachteten Termen lediglich die beiden Grundzustände des Tl I, $6\,^2P_{1/2}$ und $6\,^2P_{3/2}$, eine Isotopieverschiebung zeigen, die, verglichen mit der Theorie, viel zu groß ist, und verkehrte Termlage hat (siehe Fig. 1). Wenn man bisher vielleicht noch hoffen konnte, daß der Grund für diese Diskrepanz in einer falschen Zuordnung der Komponenten zu den beiden Isotopen zu suchen sei, so zeigt die von uns vorgenommene Entmischung, daß eine Hoffnung in dieser Richtung sicher nicht besteht, daß also auch weiterhin das Tl I-Spektrum der Deutung des Isotopieverschiebungseffektes als eines Volumeneffektes wirklich ernste Schwierigkeiten bereitet.

[1]) Siehe z. B. H. Kopfermann, Kernmomente, S. 122. Leipzig 1940.

Berechnung von Form und Größe der Molekülschwärme in Flüssigkeiten aus den Daten der Lichtzerstreuung.

Von **Th. Neugebauer** in Budapest.

(Eingegangen am 28. August 1943.)

Die von geordneten Molekülschwärmen, die nicht mehr vernachlässigbar klein im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes sind, gestreuten Lichtintensitäten werden für die zwei Fälle, in denen der elektrische Vektor des Primärlichtes senkrecht und waagerecht orientiert ist und der des gestreuten Lichtes waagerecht schwingt, berechnet. Aus dem Verhältnis dieser Intensitäten fällt dann die Anisotropie der Moleküle heraus, so daß die erhaltene Formel nur zu einer Funktion der Form und Größe der Molekülschwärme wird. Die wichtigsten Ergebnisse enthalten (24), (30), (31), (34) und (36), mit Hilfe deren man aus den Messungsergebnissen von Krishnan die numerischen Werte (32) und (37) berechnet. — Zur Behandlung solcher Probleme wird eine strenge Rechenmethode angegeben und die Ursachen, weshalb ältere Berechnungen zu anderen Ergebnissen geführt haben, werden besprochen. Neuere Messungen an Flüssigkeiten, die sich in solch einem Zustande befinden, daß man eine ausgesprochene Schwarmbildung erwarten kann, wären zur Klärung einiger Fragen der Flüssigkeitsstruktur sehr interessant.

Einleitung.

Bekannterweise ist die Theorie der gewöhnlichen Flüssigkeiten, bei denen weder die im Aufbau von den Kristallen herrschende vollständige Ordnung, noch die in Gasen auftretende vollständige Unordnung, die beide theoretisch leicht zu behandeln sind, verwirklicht ist, noch ein Forschungsgebiet in der Entwicklung[1]). Nach der Theorie von Stewart[2]) gibt es auch in gewöhnlichen Flüssigkeiten aus vielen Molekülen bestehende und kristallgitterartig geordnete, jedoch nur temporäre Molekülschwärme von kurzer Lebensdauer, die Stewart cybotactische Gruppen nennt. In neuerer Zeit sind jedoch Zweifel darüber aufgetaucht, ob es auch unter gewöhnlichen Umständen solche große geordnete Molekülgruppen gibt. Diesbezüglich seien nur die Arbeiten von Warren[3]) erwähnt. Die verbreitetste Auffassung über die Struktur der gewöhnlichen Flüssigkeiten ist in unseren Tagen, daß

[1]) Von den zusammenfassenden Darstellungen über den Stand der Theorie der Flüssigkeiten seien hier die folgenden erwähnt: K. Hermann, Die Physik **4**, 63, 1936; Eine Zusammenstellung neuerer Beiträge im Trans. Farad. Soc. **33**, 1, 1937; P. Debye. ZS. f. Elektrochem. **45**, 174, 1939; E. Fischer, Die Physik **8**, 113, 1940 und Die Umschau **46**, 527, 1942. — [2]) G. W. Stewart, Ind. Journ. Phys. **7**, 603, 1933; Koll.-ZS. **67**, 130, 1934. — [3]) B. E. Warren, Phys. Rev. **44**, 952, 1933.

sie eine „verwackelte" Kristallstruktur besitzen, also daß jedes Atom oder Molekül in ähnlicher Anordnung von Nachbarn umgeben ist, wie in einem Kristallgitter; die Lage dieser kann jedoch ein wenig verschoben sein, die Lage der weiteren Nachbarn ist dann wieder ein wenig im Verhältnis zu den ersteren verwackelt usw. Auf diese Weise entsteht tatsächlich eine gewisse Nahordnung der Bausteine, jedoch kein kristallgitterartig geordneter Molekülschwarm, weil die Abweichungen von der gittertheoretisch geforderten Lage von Molekül zu Molekül größer werden[1]).

Röntgenographische Untersuchungen, die nach den zuerst von Zernike und Prins[2]) und von Debye und Menke[3]) angegebenen Verfahren ausgeführt worden sind, lieferten sehr interessante Ergebnisse, besonders für aus kugelsymmetrische Atome oder Moleküle bestehende Flüssigkeiten, weil man bei denen aus der Streuung die wahrscheinliche Zahl und Entfernung der Nachbarn berechnen kann und auf diesem Wege das Auftreten der erwähnten verwackelten Kristallstruktur verifiziert. Es seien hier nur die an Quecksilber erhaltenen Ergebnisse erwähnt[4]). Bei aus nichtkugelförmigen Molekülen bestehenden Flüssigkeiten liefert die röntgenographische Untersuchung jedoch nicht mehr eindeutige Resultate. Bezüglich der Frage, ob geordnete Molekülschwärme überhaupt auftreten oder nicht, erhält man dagegen aus den Röntgenstreudiagrammen fast gar keine Auskunft. Sehr interessante Modellversuche zur Klärung der Struktur der Flüssigkeiten rühren von Stuart und Mitarbeiter[5]) her, die verschiedene Molekülmodelle mit und ohne elektrische Momente (die sie im Modellversuch durch eingebaute Magnete ersetzten) in einer Schüttelapparatur untersucht haben. Aus ihren Aufnahmen ist die erwähnte verwackelte Kristallstruktur der Flüssigkeiten, jedoch keine Schwarmbildung klar zu ersehen.

In der Nähe der kritischen Entmischungstemperatur von einem Gemisch aus zwei Flüssigkeiten, dann in der Nähe der Schmelztem-

---

[1]) Vgl. H. A. Stuart, Koll.-ZS. **96**, 149, 1941. — [2]) F. Zernike u. J. A. Prins, ZS. f. Phys. **41**, 184, 1927; J. A. Prins, Phys. ZS. **30**, 525, 1929; ZS. f. Phys. **56**, 617, 1929 und Nature **123**, 908, 1929. — [3]) P. Debye u. H. Menke, Phys. ZS. **31**, 797, 1930; Ergebnisse d. techn. Röntgenkunde, Bd. **2**, S. 1, 1931; H. Menke, Phys. ZS. **33**, 593, 1932. — [4]) O. Kratky, Phys. ZS. **34**, 482, 1933. — [5]) H. Rehaag u. H. A. Stuart, Phys. ZS. **38**, 1027, 1937; W. Kast u. H. A. Stuart, ebenda **40**, 714, 1939 und Veröffentlichung der Reichsstelle für den Unterrichtsfilm zu dem Archivfilm Nr. B 420, 1939; H. A. Stuart, ZS. f. Elektrochem. **45**, 180, 1939; Koll.-ZS. **96**, 149, 1941.

peratur, unter sehr hohem Druck usw. ist aber das Auftreten von größeren geordneten Molekülschwärmen sehr wahrscheinlich. Theoretisch hat Wolf[1]) gezeigt, daß in Flüssigkeitsgemischen in der Nähe des kritischen Punktes die Assoziationen der Moleküle solche Proportionen annehmen können, daß sie sich dem kolloidalen Zustand nähern. Aber auch im gewöhnlichen Zustande der Flüssigkeiten ist es noch eine offene Frage, ob nicht solche Schwärme auftreten, wenigstens bei einigen Flüssigkeiten und in manchen Temperaturgebieten. Bei den kristallinen Flüssigkeiten ist das Auftreten von sehr großen solchen Schwärmen selbstverständlich eine bewiesene Tatsache[2]).

Auf eine optische Methode zum Nachweis des Vorhandenseins von Molekülschwärmen in Flüssigkeiten hat Krishnan[3]) aufmerksam gemacht. Beobachten wir die Intensität des von einer Flüssigkeit gestreuten Lichtes, dessen elektrischer Vektor waagerecht steht, senkrecht zum Primärstrahl, einmal dann, wenn der elektrische Vektor des Primärstrahles senkrecht und das andere Mal wenn er waagerecht orientiert ist, so erhalten wir erstens in beiden Fällen nur dann eine endliche Lichtintensität, wenn die streuenden Teilchen anisotrop sind; sind die außerdem klein im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes, so werden beide beobachteten Intensitäten einander gleich sein, sind jedoch diese kohärent streuenden Gebilde nicht mehr klein im Verhältnis zu λ, wie das ja bei einem größeren geordneten Molekülschwarm der Fall ist, so werden die fraglichen Intensitäten nicht mehr untereinander gleich sein und das liefert nach Krishnan eine Methode zum experimentellen Nachweis solcher Schwärme. Krishnan untersuchte erstens Flüssigkeitsgemische in der Nähe der kritischen Entmischungstemperatur, dann auch Fettsäuren weit von der Erstarrungstemperatur mit einem positiven Resultat. Weiter untersuchte er noch verschiedene Kolloide und optische Gläser[4]); bei den ersteren ist jedoch das Auftreten des zu erwartenden Effektes selbstverständlich. Eine vereinfachte

[1]) K. L. Wolf, Trans. Farad. Soc. **33**, 179, 1937. — [2]) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. Wiesbaden, J. F. Bergmann, 1918; D. Vorländer, Chemische Kristallographie der Flüssigkeiten. Leipzig, Akad. Verlagsges., 1924; C. Weygand, Chemische Morphologie der Flüssigkeiten und Kristalle (Hand- u. Jahrbuch der chemischen Physik, Bd. 2, Abschn. III, C). Leipzig, Akad. Verlagsges., 1941. — [3]) R. S. Krishnan, Proc. Ind. Acad. **1**, 782, 915, 1935; **2**, 221, 1935; **3**, 126, 566, 1936; **5**, 577, 1937; Current Science **6**, 90, 1937; Koll.-ZS. **84**, 8, 1938. — [4]) R. S. Krishnan, Proc. Ind. Acad. **1**, 717, 1935; **3**, 211, 1936; **5**, 94, 305, 407, 499, 551, 1937; **7**, 21, 91, 98, 1938; Koll.-ZS. **84**, 2, 1938; Proc. Ind. Acad. **8**, 442, 1938; **10**, 395, 1939. Nach der Vernetzungshypothese der SiO_4-Tetraeder von W. H. Zachariasen (Journ. Amer. Chem. Soc. **54**, 3841, 1932) und den experimentellen Untersuchungen

Theorie dieser Erscheinung wurde von Gans[1]) gegeben, der sich auf die Berechnung einiger Glieder erster Ordnung beschränkte, seine Resultate haben ohne weitere Abänderung der Theorie Vrkljan und Katalinić[2]) ausführlicher besprochen. Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine strenge Theorie des besprochenen Effektes auszuarbeiten und die zu der Berechnung von Form und Größe der Molekülschwärme aus den Verhältnissen der gemessenen Intensitäten benötigten Formeln herzuleiten.

1. Um einen Einblick in die physikalischen Ursachen zu erhalten, deren zufolge die erwähnten zwei Lichtintensitäten nicht gleich sind, wollen wir zuerst einen stark vereinfachten Fall qualitativ besprechen. Wir nehmen also an, daß der geordnete Molekülschwarm bloß eine Fadenkette ist, die außerdem noch nur entlang ihrer Achse polarisierbar sein soll. Das einfallende Licht soll die Richtung der raumfesten X-Achse haben und die darauf senkrechte Beobachtungsrichtung die der Y-Achse, von dem gestreuten Licht beobachten wir in beiden Fällen nur die Komponente, deren elektrischer Vektor zur X-Achse parallel steht.

a) Der elektrische Vektor des Primärstrahles sei parallel zu der Y-Achse, also zu der Streurichtung orientiert. Wir bezeichnen diesen Fall nach Krishnan mit H_h. Liegt dann die Fadenkette in der (ZX)- oder (YZ)-Ebene, so haben wir in keiner der beiden Lagen eine Lichtstreuung, weil in der ersteren der elektrische Vektor des Primärstrahles und in der letzteren der des Sekundärstrahles auf der Fadenachse senkrecht stehen. Anders sind dagegen die Verhältnisse, wenn die

---

von B. E. Warren (Journ. Appl. Physics 8, 645, 1937) ist es jedoch ausgeschlossen, daß es in Gläser größere kristallgitterartig geordnete Gebiete geben könnte. H. Mueller [Proc. Roy. Soc. London (A) 166, 425, 1938] führte deshalb zur Erklärung des Auftretens des Krishnan-Effektes in Gläsern die Hypothese ein, daß bei denen immer ganz regellos verteilte innere Spannungen vorhanden sind, die man eben deshalb zwischen gekreuzten Nicolschen Prismen nicht beobachten kann. Diese Spannungen rühren nach ihm davon her, daß die starken Dichteschwankungen im flüssigen Glase bei der Abkühlung einfrieren. Es ist interessant zu bemerken, daß man dann zwar unsere auf Flüssigkeiten sich beziehenden Gedankengänge auf Gläser selbstverständlich nicht übertragen kann, da es sich jedoch nach der Muellerschen Theorie um die Änderung der Dielektrizitätskonstanten infolge der inneren Spannungen handelt, so können die Rechnungen für Gläser ganz analog zu den unseren durchgeführt werden und als Resultat folgt wieder (24) und die folgenden Formeln, wo man jetzt statt Größe und Form der Molekülschwärme die Größenordnung der durch die Spannungen gestörten Gebiete zu verstehen hat.

[1]) R. Gans, Phys. ZS. 37, 19, 1936. — [2]) V. S. Vrkljan u. M. Katalinić, Phys. ZS. 37, 482, 1936.

Fadenkette in der (XY)-Ebene enthalten ist; ihre Achse bildet dann schiefe Winkel mit den elektrischen Vektoren des Primär- und Sekundärstrahles, so daß man tatsächlich gestreutes Licht erhält. Die günstige Orientierung der Fadenkette ist die, wenn sie die Richtungen der positiven X- und Y-Achsen gerade halbiert, weil dann zwischen den von den verschiedenen Molekülen der Kette gestreuten elektrischen Vektoren überhaupt keine Phasenunterschiede auftreten. Teilt dagegen die Fadenachse die Richtung von einer positiven und einer negativen Richtung der Achsen in der fraglichen Ebene, so ist diese Lage bezüglich der auftretenden Phasenunterschiede am ungünstigsten, da die jetzt maximal werden.

b) Im zweiten Fall steht der elektrische Vektor des Primärlichtes senkrecht auf der Primär- und Sekundärstrahlrichtung, also parallel zur Z-Achse; wir bezeichnen den Fall mit H_v. Liegt die Fadenachse jetzt in der (XY)- oder (YZ)-Ebene, so beobachten wir kein Streulicht, weil in der ersteren Lage die Fadenachse senkrecht auf den elektrischen Vektor des Primärstrahles und in der letzteren senkrecht auf den des Sekundärstrahles steht. Enthält dagegen die Fadenkette die (XZ)-Ebene, und schließt sie mit beiden Achsen schiefe Winkel ein, so tritt tatsächlich gestreutes Licht auf. Wäre die Fadenachse parallel zur Z-Achse, so würden zwischen den gestreuten Vektoren überhaupt keine Phasenunterschiede auftreten, wäre dagegen die Fadenkette parallel zur X-Achse orientiert, so wären diese Unterschiede maximal; in beiden Fällen gibt es jedoch überhaupt kein Streulicht, weil die Fadenkette nur entlang ihrer Achse polarisierbar ist. Bezüglich der Größe der von den einzelnen Molekülen gestreuten Vektoren ist der günstigste Fall der, in dem die Fadenachse den rechten Winkel zwischen den Koordinatenachsen gerade halbiert, dann verschwinden jedoch die Phasenunterschiede nicht, die gestreuten Vektoren werden sich also abschwächen. Wir sehen also, daß es in dem jetzt besprochenen Fall nicht mehr solch eine günstigste Orientierung der Fadenkette wie im Fall a) gibt. Das würde den Gedanken nahelegen, daß die gestreute Lichtintensität von in einer Richtung langgestreckten Molekülschwärmen im Fall H_h größer als in dem von H_v sein sollte. Unsere weiteren Berechnungen werden jedoch zeigen, daß das Entgegengesetzte der Fall ist.

Es sei noch erwähnt, daß Rousset[1]) den in den Fällen H_h und H_v beobachteten Unterschied in der Lichtintensität mit Hilfe der Sekundär-

[1]) A. Rousset, C. R. 198, 2152, 1934; 199, 716, 1934; Journ. d. Phys. 7, 84, 1936.

streuung erklärte. Nach Krishnan[1]) ist aber diese Streuung bei den meisten Flüssigkeiten viel zu gering; bei einem Gemisch aus Wasser und Isobuttersäure ist das Verhältnis der sekundären zur primären Streuung nach seinen Messungen bloß $2{,}5 \cdot 10^{-4}$.

2. Zur Berechnung der im Falle H_v auftretenden Lichtintensität nehmen wir an, daß der Primärstrahl entlang der raumfesten X-Achse einfällt und sein elektrischer Vektor parallel zur raumfesten Z-Achse orientiert ist, also

$$\mathfrak{E}_z = E \cos 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right). \tag{1}$$

Die raumfeste Y-Achse ist dann die Beobachtungsrichtung. Da im betrachteten Molekülschwarm alle Moleküle zueinander parallel orientiert sind, so können wir für alle ein molekülfestes Koordinatensystem einführen, dessen Achsen wir mit $\overline{X}$, $\overline{Y}$ und $\overline{Z}$ bezeichnen und das wir gleich so wählen, daß darin das Polarisationsellipsoid der Moleküle auf Hauptachsen transformiert ist. Die auftretenden Hauptpolarisierbarkeiten bezeichnen wir mit b_1, b_2 und b_3, die jedoch nicht die Vakuumpolarisierbarkeiten eines Moleküls sind, sondern die im Schwarm wegen der Silbersteinschen und quantenmechanischen Wechselwirkung[2]) veränderten Polarisierbarkeiten der Moleküle. Weiter müßte man eigentlich noch berücksichtigen, daß wegen des unstetigen Überganges der normalen Komponente der elektrischen Feldintensität durch Grenzflächen auch an den Endflächen der hier betrachteten Molekülschwärme scheinbare Flächenladungen induziert werden. Da es sich aber in diesem Falle bloß um Scheidewände zwischen geordneten und ungeordneten Gebieten handelt, so werden diese Ladungen nur von unbedeutender Größe sein. In der Theorie der Lichtzerstreuung von kolloidalen Teilchen, welche die Form von gestreckten oder abgeflachten Rotationsellipsoiden haben und außerdem vernachlässigbar klein im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes sind, hat Gans[3]) das infolge dieser induzierten Flächenladungen auftretende innere Feld berücksichtigt. Das in der Flüssigkeit auftretende Lorentzsche innere Feld müssen wir nicht explizit einführen, weil dies schon in der Silbersteinschen Wechselwirkung der Polarisierbarkeiten der Moleküle enthalten ist. Alle diese Fragen sind in einer Arbeit des Verfassers[4]) über die Licht-

[1]) R. S. Krishnan, Proc. Ind. Acad. **5**, 577, 1937; vgl. auch ebenda **9**, 303, 1939. — [2]) Th. Neugebauer, ZS. f. Phys. **102**, 305, 1936; Ann. d. Phys. [5] **31**, 540, 1938; [5] **39**, 241, 1941. — [3]) R. Gans, Ann. d. Phys. [4] **37**, 881, 1912. — [4]) Th. Neugebauer, ZS. f. wiss. Photogr., Photophys. u. Photochem. Im Erscheinen.

zerstreuung von größeren nichtkugelförmigen suspendierten Teilchen ausführlicher besprochen.

Die Achsen des raumfesten und des molekülfesten Koordinatensystems beziehen wir mit den in der Tabelle 1 angegebenen Richtungs-

Tabelle 1.

	X	Y	Z
$\overline{X}$	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}
$\overline{Y}$	φ_{21}	φ_{22}	φ_{23}
$\overline{Z}$	φ_{31}	φ_{32}	φ_{33}

cosinus aufeinander. Weiter wollen wir annehmen, daß unser Molekülschwarm eine rechteckige Form mit drei Achsen verschiedener Länge hat. Mit dieser Annahme können wir jedenfalls alle vorkommenden Fälle für die zu erwartende Genauigkeit der Messungen genügend gut approximieren. Außerdem nehmen wir, bloß um die Rechnungen anschaulicher zu gestalten, noch an, daß es sich um ein einfaches Translationsgitter handelt, was wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit tun können, weil ja in unserem Problem die Braggschen Reflexionen keine Rolle spielen. Den Anfang des „molekülfesten" Koordinatensystems legen wir jetzt in eine Ecke unseres Schwarms und bezeichnen die Entfernungen der Moleküle voneinander entlang der drei Achsen mit d_1, d_2 und d_3 und ihre laufenden Nummern mit l, m und n, die sich von Null bis L, M und N ändern können, so daß der ganze Schwarm $(L+1)(M+1)(N+1)$ Moleküle enthält. Im Anfang des jetzt „schwarmfesten" Koordinatensystems sei der elektrische Vektor des Primärlichtes

$$\mathfrak{E}_z = E \cos 2\pi \nu t. \tag{2}$$

Um bis zum Molekül lmn zu gelangen, muß das Primärlicht noch die Strecke

$$d_1 l \varphi_{11} + d_2 m \varphi_{21} + d_3 n \varphi_{31} \tag{3}$$

zurücklegen und von dort an das gestreute Licht entlang der raumfesten Y-Achse den Weg

$$-(d_1 l \varphi_{12} + d_2 m \varphi_{22} + d_3 n \varphi_{32}), \tag{4}$$

bis es zur Streurichtung senkrechten und durch den Nullpunkt des schwarmfesten Koordinatensystems gelegten Ebene gelangt. Für die

von einem schwingenden elektrischen Dipol verursachte elektrische und magnetische Feldintensität folgt bekannterweise

$$\mathfrak{e}(r) = \mathfrak{h}(r) = \frac{1}{r c^2} \left| \frac{d^2}{dt^2} M \sin \vartheta \right|, \tag{5}$$

wo M das Dipolmoment, ϑ den Winkel, den die Dipolachse mit der Beobachtungsrichtung (Y-Achse) einschließt, r die Entfernung und c die Lichtgeschwindigkeit bedeuten. In unserem Falle haben wir für die drei Komponenten des induzierten Dipolmomentes im molekülfesten System

$$M_{\bar{x}} = b_1 \varphi_{13} \mathfrak{E}_z, \quad M_{\bar{y}} = b_2 \varphi_{23} \mathfrak{E}_z \quad \text{und} \quad M_{\bar{z}} = b_3 \varphi_{33} \mathfrak{E}_z.$$

Uns interessiert jedoch jetzt nur die zur raumfesten X-Achse parallele Komponente, die ja auf der Beobachtungsrichtung senkrecht steht, also folgt

$$M = (b_1 \varphi_{13} \varphi_{11} + b_2 \varphi_{23} \varphi_{21} + b_3 \varphi_{33} \varphi_{31}) \mathfrak{E}_z \quad \text{und} \quad \sin \vartheta = 1. \tag{6}$$

Für den vom mit lmn bezeichneten Molekül gestreuten elektrischen Vektor erhalten wir also aus (1), (3), (4), (5) und (6)

$$\mathfrak{e}(r) = \frac{1}{r c^2} (b_1 \varphi_{13} \varphi_{11} + b_2 \varphi_{23} \varphi_{21} + b_3 \varphi_{33} \varphi_{31}) E (-4\pi^2 \nu^2) e^{i 2\pi\nu t} \times \\ \times e^{-i 2\pi\nu \frac{d_1 l \varphi_{11} + d_2 m \varphi_{21} + d_3 n \varphi_{31} - (d_1 l \varphi_{12} + d_2 m \varphi_{22} + d_3 n \varphi_{32})}{v}}, \tag{7}$$

wo v die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in der fraglichen Flüssigkeit bedeutet. Sind zwei Hauptprobarisierbarkeiten der Moleküle untereinander angenähert gleich und nur die dritte verschieden, was ein sehr häufiger Fall sein wird und was wir auch gezwungen sind anzunehmen, weil man ja aus einem Meßwert nur eine Unbekannte berechnen kann, so haben wir für (7), wenn wir darin $b_1 = b_2$ setzen:

$$\mathfrak{e}(r) = \frac{1}{r c^2} \{b_2 (\varphi_{13} \varphi_{11} + \varphi_{23} \varphi_{21} + \varphi_{33} \varphi_{31}) + \\ + (b_3 - b_2) \varphi_{33} \varphi_{31}\} E (-4\pi^2 \nu^2) e^{i 2\pi\nu t} \times \\ \times e^{-i 2\pi\nu \frac{d_1 l (\varphi_{11} - \varphi_{12}) + d_2 m (\varphi_{21} - \varphi_{22}) + d_3 n (\varphi_{31} - \varphi_{32})}{v}} \tag{8}$$

In (8) verschwindet das erste Glied, so daß wir nur das zweite, in dem wir $b_3 - b_2 = b$ setzen, zu berücksichtigen brauchen. Um jetzt den vom ganzen Schwarm gestreuten elektrischen Vektor zu erhalten, müssen wir noch (8) über alle darin enthaltenen Moleküle summieren:

$$\mathfrak{E}(r) = -\frac{4\pi^2 \nu^2 b \varphi_{33} \varphi_{31} E}{c^2 r} e^{i 2\pi\nu t} \sum_{l=0}^{L} e^{-i 2\pi \frac{d_1 l (\varphi_{11} - \varphi_{12})}{\lambda'}} \times \\ \times \sum_{m=0}^{M} e^{-i 2\pi \frac{d_2 m (\varphi_{21} - \varphi_{22})}{\lambda'}} \cdot \sum_{n=0}^{N} e^{-i 2\pi \frac{d_3 n (\varphi_{31} - \varphi_{32})}{\lambda'}}, \tag{9}$$

wo wir die Wellenlänge λ' des Lichtes in der untersuchten Flüssigkei eingeführt haben.

Hier sei es noch bemerkt, daß wir statt mit den Hauptpolarisierbarkeiten der Moleküle, auch mit der makroskopischen Dielektrizitätskonstante rechnen könnten. Die erstere Methode ist jedoch anschaulicher und zeigt außerdem unmittelbar den Zusammenhang mit den Konstanten der fraglichen Moleküle; aus unserem Endresultat werden übrigens die Polarisierbarkeiten herausfallen und ebenso wäre es auch mit den Dielektrizitätskonstanten.

Da λ' sehr groß im Verhältnis zu d_1, d_2 und d_3 ist, so können wir die Summen in (9) in Integrale umformen:

$$\mathfrak{E}(r) = -\frac{b\,\varphi_{33}\,\varphi_{31}\,E}{c^2\,r}\,4\pi^2\nu^2\,e^{i\,2\pi\nu t}\int_0^L e^{-i\,2\pi\frac{d_1(\varphi_{11}-\varphi_{12})}{\lambda'}x}\,dx\times$$

$$\times\int_0^M e^{-i\,2\pi\frac{d_2(\varphi_{21}-\varphi_{22})}{\lambda'}y}\,dy\cdot\int_0^N e^{-i\,2\pi\frac{d_3(\varphi_{31}-\varphi_{32})}{\lambda'}z}\,dz$$

$$=\frac{b\,\varphi_{33}\,\varphi_{31}\,E}{c^2\,r}\,4\pi^2\nu^2\,e^{i\,2\pi\nu t}\,\frac{\lambda'^3}{(i\,2\pi)^3\,d_1\,d_2\,d_3\,(\varphi_{11}-\varphi_{12})\,(\varphi_{21}-\varphi_{22})\,(\varphi_{31}-\varphi_{32})}\times$$

$$\times\left(e^{-i\,2\pi\frac{\varphi_{11}-\varphi_{12}}{\lambda'}d_1 L}-1\right)\cdot\left(e^{-i\,2\pi\frac{\varphi_{21}-\varphi_{22}}{\lambda'}d_2 M}-1\right)\times$$

$$\times\left(e^{-i\,2\pi\frac{\varphi_{31}-\varphi_{32}}{\lambda'}d_3 N}-1\right). \qquad (10)$$

Dieselbe Formel können wir nach (5) auch für die magnetische Feldintensität $\mathfrak{H}(r)$ herleiten.

Weiter erhalten wir den Energiefluß mit Hilfe des Poyntingschen Vektors

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E},\mathfrak{H}] \qquad (11)$$

und wenn wir den über die Zeit mitteln, die gestreute Lichtintensität

$$I = \overline{\mathfrak{S}} = \frac{c}{4\pi}\overline{[\mathfrak{E},\mathfrak{H}]}. \qquad (12)$$

Selbstverständlich darf man zur Berechnung von (11) und (12) nur die Realteile von $\mathfrak{E}(r)$ und $\mathfrak{H}(r)$ einsetzen. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ haben jedoch sicher die Form

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{H} = A\cos 2\pi\nu t + B\sin 2\pi\nu t + \text{imaginärer Teil}, \qquad (13)$$

wo A und B von der Zeit unabhängig sind. Bilden wir jetzt den in (12) stehenden zeitlichen Mittelwert, so folgt

$$\overline{\mathfrak{E},\mathfrak{H}} = \tfrac{1}{2}(A^2+B^2). \qquad (14)$$

Das Problem ist also die Berechnung von $A^2 + B^2$. Aus (10) und (13) folgt, daß $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ folgendermaßen darstellbar sind:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{H} = e^{i\,2\pi\nu t}(A - Bi). \tag{15}$$

Tatsächlich folgt aus (15) der Formel (13) entsprechend

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{H} = A\cos 2\pi\nu t + B\sin 2\pi\nu t + \\ + i\,(A\sin 2\pi\nu t - B\cos 2\pi\nu t). \tag{16}$$

Um also $A^2 + B^2$ zu erhalten, müssen wir den Faktor von $e^{i\,2\pi\nu t}$ mit seinem konjugiert komplexen multiplizieren. Das ist übrigens die Ursache, weshalb unsere Resultate mit den der eingangs zitierten Arbeiten nicht übereinstimmen.

Endlich erhalten wir also aus (10), (12), (13) und (14) für die gesuchte Streuintensität in der Entfernung r von diesem Gitter

$$J_1 = \frac{2\pi^3\nu^4}{r^2 c^3} E^2 b^2 \varphi_{33}^2 \varphi_{31}^2 \frac{8\lambda'^6}{(2\pi)^6 d_1^2 d_2^2 d_3^2 (\varphi_{11}-\varphi_{12})^2(\varphi_{21}-\varphi_{22})^2(\varphi_{31}-\varphi_{32})^2} \times \\ \times \left(1 - \cos 2\pi \frac{\varphi_{11}-\varphi_{12}}{\lambda'} d_1 L\right)\left(1 - \cos 2\pi \frac{\varphi_{21}-\varphi_{22}}{\lambda'} d_2 M\right) \times \\ \times \left(1 - \cos 2\pi \frac{\varphi_{31}-\varphi_{32}}{\lambda'} d_3 N\right). \tag{17}$$

Setzen wir jetzt in die drei letzten Faktoren von (17) die Reihen für die Cosinusfunktionen ein und behalten wir nach Durchführung der Multiplikationen noch die Glieder vierter Ordnung, so folgt

$$J_1 = \frac{2\pi^3 c}{r^2 \lambda^4} E^2 b^2 \varphi_{33}^2 \varphi_{31}^2 L^2 M^2 N^2 \left\{1 - \frac{\pi^2}{3\lambda'^2}[(\varphi_{11}-\varphi_{12})^2 d_1^2 L^2 + \right. \\ \left. + (\varphi_{21}-\varphi_{22})^2 d_2^2 M^2 + (\varphi_{31}-\varphi_{32})^2 d_3^2 N^2]\right\}, \tag{18}$$

wo wir die Vakuumwellenlänge des Lichtes λ eingeführt haben. (18) ist die von einem Molekülschwarm, dessen räumliche Orientierung durch die Richtungscosinus φ_{ik} ausgedrückt wird, gestreute Lichtintensität. Sind in der untersuchten Flüssigkeit $\mathfrak{N}$ solche Molekülschwärme, und zwar regellos verteilt und orientiert enthalten, so müssen wir, um die ganze gestreute Intensität zu erhalten, alle die in (18) stehenden Produkte der Richtungscosinus über alle möglichen Orientierungen mitteln und dann das erhaltene Ergebnis noch mit $\mathfrak{N}$ multiplizieren. Also

$$I_1 = \frac{2\pi^3 c}{r^2 \lambda^4} E^2 b^2 L^2 M^2 N^2 \mathfrak{N} \left\{\overline{\varphi_{33}^2 \varphi_{31}^2} - \frac{\pi^2}{3\lambda'^2}[(\overline{\varphi_{11}^2 \varphi_{31}^2 \varphi_{33}^2} + \right. \\ - 2\,\overline{\varphi_{11}\varphi_{12}\varphi_{31}^2\varphi_{33}^2} + \overline{\varphi_{12}^2\varphi_{31}^2\varphi_{33}^2})\,d_1^2 L^2 + (\overline{\varphi_{21}^2\varphi_{31}^2\varphi_{33}^2} + \\ - 2\,\overline{\varphi_{21}\varphi_{22}\varphi_{31}^2\varphi_{33}^2} + \overline{\varphi_{22}^2\varphi_{31}^2\varphi_{33}^2})\,d_2^2 M^2 + (\overline{\varphi_{31}^4\varphi_{33}^2} + \\ \left. - 2\,\overline{\varphi_{31}^3\varphi_{32}\varphi_{33}^2} + \overline{\varphi_{31}^2\varphi_{32}^2\varphi_{33}^2})\,d_3^2 N^2]\right\}. \tag{19}$$

Für die in (19) stehenden Mittelwerte erhalten wir (vgl. den Anhang)

$$\left.\begin{gathered}\overline{\varphi_{hi}^2\varphi_{hk}^2} = {}^1/_{15},\quad \overline{\varphi_{hi}^2\varphi_{hk}^4} = {}^1/_{35},\quad \overline{\varphi_{hi}^2\varphi_{hk}^2\varphi_{hl}^2} = {}^1/_{105},\\ \overline{\varphi_{hi}^2\varphi_{hk}^2\varphi_{lk}^2} = {}^2/_{105},\quad \overline{\varphi_{hi}^2\varphi_{hk}^2\varphi_{lm}^2} = {}^3/_{105},\quad \overline{\varphi_{hi}\varphi_{hk}\varphi_{lm}^2\varphi_{li}^2} = 0\\ \text{und } \overline{\varphi_{hi}^3\varphi_{hk}\varphi_{hl}^2} = 0.\end{gathered}\right\} \quad (20)$$

Setzen wir diese Werte in (19) ein, so folgt endlich

$$I_1 = \frac{2\pi^3 c}{15 r^2 \lambda^4} E^2 b^2 L^2 M^2 N^2 \mathfrak{N}\left\{1 - \frac{\pi^2}{3\lambda'^2}\left(\frac{5}{7} d_1^2 L^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{5}{7} d_2^2 M^2 + \frac{4}{7} d_3^2 N^2\right)\right\}. \quad (21)$$

Ganz analoge Berechnungen wie die, welche von (6) zu (21) geführt haben, ergeben in dem mit H_h bezeichneten Fall [bei dem der einzige Unterschied darin besteht, daß in (9) und den folgenden Formeln statt $\varphi_{33}\varphi_{31}$ der Faktor $\varphi_{32}\varphi_{31}$ auftritt] für die gestreute Lichtintensität, die wir mit I_2 bezeichnen

$$I_2 = \frac{2\pi^3 c}{15 r^2 \lambda^4} E^2 b^2 L^2 M^2 N^2 \mathfrak{N}\left\{1 - \frac{\pi^2}{3\lambda'^2}\left(\frac{4}{7} d_1^2 L^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{4}{7} d_2^2 M^2 + \frac{6}{7} d_3^2 N^2\right)\right\}. \quad (22)$$

(21) und (22) werden noch anschaulicher, wenn man analog zu (12) und unter Beachtung von (1) auch noch die Intensität des Primärlichtes

$$I_0 = \frac{c}{8\pi} E^2 \quad (23)$$

einführt. Die Proportionalitätsfaktoren sind jedoch bei unseren Berechnungen unwesentlich und wir geben sie nur vollständigkeitshalber an. $L\,M\,N$ ist in (21) und (22) die Zahl der Moleküle in einem Schwarm und $d_1 L, d_2 M$ und $d_3 N$ bedeuten die Kantenlängen des Molekülschwarms, wir bezeichnen sie mit a, b und c. Die ersten Glieder in (21) und (22) würden allein auftreten, wenn die betrachteten Molekülschwärme vernachlässigbar klein im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes sein würden und die zweiten Glieder sind eine Folge davon, daß sich die von den einzelnen Molekülen gestreuten Vektoren durch Interferenz abschwächen. Bei kugelsymmetrischen isotropen Teilchen und bei Beobachtung des nicht depolarisierten Anteils der Streuintensität würden die letzteren der Mieschen Theorie[1]) entsprechen. Bilden wir jetzt

[1]) G. Mie, Ann. d. Phys. [4] 25, 377, 1908. Bei der Lichtzerstreuung von Fadenkettenmolekülen, also Gebilden, deren nur eine Dimension nicht mehr sehr klein im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes ist, ist es noch möglich, wenn man die Anisotropie der Polarisierbarkeit vernachlässigt, die Resultate in einer geschlossenen Form darzustellen. Vgl. Th. Neugebauer, Ann. d. Phys. [5] 42, 509, 1943.

das Verhältnis von (21) und (22), so folgt mit Hilfe der erwähnten Bezeichnungen

$$d = \frac{I_1}{I_2} = \frac{1 - \frac{1}{3}\frac{\pi^2}{\lambda'^2}\left[\frac{5}{7}(a^2+b^2) + \frac{4}{7}c^2\right]}{1 - \frac{1}{3}\frac{\pi^2}{\lambda'^2}\left[\frac{4}{7}(a^2+b^2) + \frac{6}{7}c^2\right]}. \tag{24}$$

3. Es ist interessant zu bemerken, daß aus (24) die Polarisierbarkeit ganz herausgefallen ist. Das bedeutet also, daß, wenn nur die geringste Anisotropie vorhanden ist, man schon aus dem Verhältnis der gemessenen Intensitäten Schlüsse auf die Größe der fraglichen Molekülschwärme ziehen kann. Verschwindet jedoch die Anisotropie, so haben wir $I_1 = I_2 = 0$ und der Wert von (24) wird ungewiß, das Auftreten der geringsten Anisotropie würde dagegen schon einen festen Wert für (24) liefern, die tatsächliche Durchführung der Messungen ist aber dann wegen der geringen Intensität sehr schwierig; sehr wichtig ist es jedoch, daß die Größen der Polarisierbarkeiten in (24) nicht eingehen und man sie deshalb nicht zu kennen braucht.

Ist $a = b = c$, so erhalten wir für (24) den Wert 1, in diesem Falle sind also die gestreuten Intensitäten einander gleich, auch dann, wenn der Schwarm nicht mehr sehr klein im Verhältnis zu λ' ist. Im entgegengesetzten Fall sind besonders zwei Möglichkeiten wichtig:

a) $a \ll \lambda'$ und $b \ll \lambda'$, c sei dagegen nicht mehr sehr klein im Verhältnis zu λ', also in einer Richtung langgestreckte Molekülschwärme. Aus (24) folgt dann

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1 - \frac{1}{3}\frac{\pi^2}{\lambda'^2}\frac{4}{7}c^2}{1 - \frac{1}{3}\frac{\pi^2}{\lambda'^2}\frac{6}{7}c^2}. \tag{25}$$

b) Nur $c \ll \lambda'$, also flache scheibenförmige Molekülschwärme; für die erhalten wir aus (24)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1 - \frac{5}{21}\frac{\pi^2}{\lambda'^2}(a^2+b^2)}{1 - \frac{4}{21}\frac{\pi^2}{\lambda'^2}(a^2+b^2)}. \tag{26}$$

Da man aber nicht zwei Unbekannte berechnen kann, so ist nur der Fall interessant, in dem a angenähert gleich b ist, dann folgt

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1 - \frac{10}{21}\frac{\pi^2}{\lambda'^2}a^2}{1 - \frac{8}{21}\frac{\pi^2}{\lambda'^2}a^2}. \tag{27}$$

Aus (25) und (27) folgt mit Hilfe der in (24) eingeführten Bezeichnung

$$c^2 = \frac{21\,\lambda'^2\,(d-1)}{\pi^2\,(6\,d-4)}. \tag{28}$$

und

$$a^2 = \frac{21\,\lambda'^2\,(1-d)}{\pi^2\,(10-8\,d)} \tag{29}$$

für die betrachteten zwei Fälle. Meistens wird man sich mit dem ersten Gliede der Reihenentwicklung der Nenner in (25) und (27) begnügen können; statt (28) und (29) haben wir dann

$$c^2 = \frac{21\,\lambda'^2}{2\,\pi^2}\,(d-1) \tag{30}$$

bzw.

$$a^2 = \frac{21\,\lambda'^2}{2\,\pi^2}\,(1-d), \tag{31}$$

wo a und c selbstverständlich immer die Mittelwerte dieser Größen in der untersuchten Flüssigkeit bedeuten.

Eine wichtige Frage ist noch, daß in welchem Maße Messungsfehler und besonders die fehlerhaften Einstellungen von Polarisator und Analysator bzw. der Doppelprismen, die wir von der Größenordnung $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ annehmen wollen, die gemessenen Streuintensitäten beeinflussen können. Im Falle H_v tritt dann eine waagerecht schwingende Komponente des Primärlichtes von der Größe $\mathfrak{E}_z\,\Delta\alpha$ auf, sie wird jedoch auch vom fehlerhaft eingestellten Analysator nicht durchgelassen, der letztere läßt dagegen von der senkrechten Komponente des Primärlichtes den Teil $\mathfrak{E}_z\,\Delta\beta$ durch; das zu I_1 sich hinzuaddierende falsche Licht ist also zu $(\mathfrak{E}_z\,\Delta\beta)^2$ proportional. Im Falle H_h läßt der um $\Delta\beta$ verdrehte Analysator vom ursprünglichen horizontal schwingenden Primärlicht gar nichts durch. Aus der im Primärstrahl auftretenden falschen Komponente, deren elektrischer Vektor die Größe $\mathfrak{E}_y\,\Delta\alpha$ besitzt, läßt der verdrehte Analysator die Komponente $\mathfrak{E}_y\,\Delta\alpha\cdot\Delta\beta$ durch. Wir sehen also, daß das falsche Licht im Falle H_h mit einer Größenordnung kleiner als in dem von H_v sein wird. Anders wären dagegen die Verhältnisse, wenn man die Streustrahlung nicht genau senkrecht auf die Primärrichtung beobachten würde, dann könnte, wie man das anschaulich leicht einsieht, eben nur im Falle H_h eine falsche Komponente auftreten.

Unsere theoretischen Resultate wollen wir jetzt mit den eingangs zitierten Messungsergebnissen von Krishnan vergleichen. Nach seinen Beobachtungen war immer im Falle H_h die Streuintensität (also in unseren Bezeichnungen I_2) größer, aus (24) folgt also, daß das unserem

Falle b entspricht und wir (31) anzuwenden haben. Für d erhielt Krishnan (l. c.) bei mehreren Flüssigkeiten um 0,93 herum liegende Werte, setzten wir das in (31) ein und rechnen wir mit der Wellenlänge des Natriumlichtes, die in den untersuchten Flüssigkeiten, deren Brechungsindizes wir gleich der des Wassers annehmen, entsprechend verändert wird, so folgt aus (31)

$$a \sim 34 \cdot 10^{-6}\,\text{mm}, \tag{32}$$

das ist also der Durchmesser der scheibenförmigen Molekülschwärme. Gleichzeitig ist damit auch die benutzte Reihenentwicklung gerechtfertigt, weil ja a kleiner als der zehnte Teil von λ' ist.

Physikalisch ist das Ergebnis, das man wenigstens in den meisten Fällen nicht etwa in einer Richtung langgestreckte sondern scheibenförmige Molekülschwärme findet, recht plausibel, weil so lange es sich hauptsächlich um die van der Waalssche Anziehung der Moleküle handelt, wird die dann am stärksten sein, wenn Moleküle sich entlang ihrer ganzen Länge aneinander anlegen, was das Zustandekommen von scheibenförmigen Schwärmen begünstigt. Analoge Fälle sind ja an Flüssigkeitsoberflächen schon längst bekannt. Fehlerhafte Einjustierungen von Polarisator und Analysator können diese Ergebnisse nach dem oben Gesagten nicht vortäuschen, weil ja dann das im Falle H_v beobachtete Licht das intensivere sein müßte, so daß wir demzufolge die Größe der Molekülschwärme eher für zu klein schätzen würden.

In den bis jetzt betrachteten zwei Fällen haben wir angenommen, daß die geometrisch ausgezeichnete Achse des Molekülschwarmes auch die ist, entlang der die Polarisierbarkeit der Moleküle einen ausgezeichneten Wert besitzt. Dabei ist es ganz gleichgültig, ob der größer oder kleiner als die zwei untereinander angenähert gleich angenommenen Polarisierbarkeiten entlang der übrigen zwei Achsen ist. Es sind jedoch noch zwei weitere Fälle denkbar, in denen die geometrisch und die bezüglich der Polarisierbarkeit ausgezeichneten Achsen aufeinander senkrecht stehen. Diese Fälle werden jedenfalls recht selten vorkommen, doch sollen sie hier vollständigkeitshalber kurz besprochen werden.

c) Der Schwarm sei entlang der $\overline{X}$-Achse langgestreckt, also ist dann nur a nicht mehr sehr klein im Verhältnis zu λ'. Aus (24) folgt

$$d = \frac{I_1}{I_2} = 1 - \frac{1}{21}\frac{\pi^2}{\lambda'^2}a^2 \tag{33}$$

und daher

$$a^2 = 21\frac{\lambda'^2}{\pi^2}(1 - d). \tag{34}$$

d) Der Schwarm sei scheibenförmig und die Achse der ausgezeichneten Polarisierbarkeit liege in seiner Ebene. Dann ist $b = c$ nicht mehr sehr klein im Verhältnis zu λ' und aus (24) folgt

$$\frac{I_1}{I_2} = 1 + \frac{1}{21}\frac{\pi^2}{\lambda'^2} b^2 \tag{35}$$

und weiter

$$b^2 = 21\,\frac{\lambda'^2}{\pi^2}(d - 1). \tag{36}$$

Den Messungsergebnissen von Krishnan könnte noch der Fall c entsprechen. Wir erhalten dann analog zu den obigen Berechnungen

$$a \sim 50 \cdot 10^{-6}\,\text{mm}. \tag{37}$$

Es ist jedoch physikalisch recht unwahrscheinlich, daß dieser Fall allgemein verwirklicht sein könnte.

Neuere Versuchsergebnisse über diese Frage bei Flüssigkeiten, die sich in einem solchen Zustande befinden, daß man eine ausgesprochenere Schwarmbildung erwarten kann, wären jedenfalls sehr interessant, da es sich ja um die Struktur der Flüssigkeiten handelt, die jetzt im Brennpunkte der Interessen der physikalischen Forschung steht.

Unsere vereinfachende Betrachtungsweise, daß wir die Form der Molekülschwärme durch rechteckige Parallelepipede angenähert haben, ist jedenfalls ausreichend, da wir ja durch entsprechende Wahl der Kantenlängen jeden Fall gut approximieren können und eine genauere Auskunft ist ja aus den Messungsergebnissen sowieso nicht zu erwarten. Es fragt sich darum doch, ob es nicht möglich wäre, die Rechnungen so umzuändern, daß wir die Integration über die Molekülschwärme nur in den Endresultaten durchführen müßten. Leider geht das aber nicht, weil wir zwar in (8) die zeitunabhängige Exponentialfunktion in eine Reihe entwickeln könnten, die wir mit dem linearen Gliede abbrechen würden und dann müßte man eigentlich nur dieses Glied integrieren. Dadurch würde man aber nur einen Teil des zu erwartenden Effektes erhalten und würde weitere Glieder von derselben Größenordnung vernachlässigen.

Budapest, Philosophische Fakultät der Universität, Juli 1943.

Anhang.

Vollständigkeitshalber wollen wir noch die in (20) angegebenen Mittelwerte herleiten. Bekannterweise ist[1])

$$\overline{\varphi_{hi}^2} = 1/3,\ \overline{\varphi_{hi}^4} = 1/5,\ \overline{\varphi_{hi}^6} = 1/7 \quad \text{und} \quad \overline{\varphi_{hi}^2\,\varphi_{hk}^2} = 1/15. \tag{1}$$

Aus der Gleichung

$$\overline{(\varphi_{31}^2 + \varphi_{32}^2 + \varphi_{33}^2)\,\varphi_{31}^4} = \overline{\varphi_{31}^4} = 1/5$$

folgt unter Beachtung von (1)

$$2\,\overline{\varphi_{32}^2\,\varphi_{31}^4} + 1/7 = 1/5,$$

also

$$\overline{\varphi_{hi}^2\,\varphi_{hk}^4} = 1/35. \tag{2}$$

Weiter erhält man aus

$$\overline{(\varphi_{31}^2 + \varphi_{32}^2 + \varphi_{33}^2)\,\varphi_{31}^2\,\varphi_{32}^2} = \overline{\varphi_{31}^2\,\varphi_{32}^2} = 1/15$$

unter Berücksichtigung von (2)

$$\overline{\varphi_{31}^2\,\varphi_{32}^2\,\varphi_{33}^2} + 2/35 = 1/15,$$

also

$$\overline{\varphi_{hi}^2\,\varphi_{hk}^2\,\varphi_{hl}^2} = 1/105. \tag{3}$$

Aus

$$\overline{(\varphi_{11}^2 + \varphi_{21}^2 + \varphi_{31}^2)\,\varphi_{31}^2\,\varphi_{33}^2} = \overline{\varphi_{31}^2\,\varphi_{33}^2} = 1/15$$

folgt mit Hilfe von (2)

$$\overline{\varphi_{hi}^2\,\varphi_{hk}^2\,\varphi_{lk}^2} = 2/105 \tag{4}$$

und aus

$$\overline{(\varphi_{12}^2 + \varphi_{22}^2 + \varphi_{32}^2)\,\varphi_{31}^2\,\varphi_{33}^2} = \overline{\varphi_{31}^2\,\varphi_{33}^2} = 1/15$$

unter Beachtung von (3)

$$\overline{\varphi_{hi}^2\,\varphi_{hk}^2\,\varphi_{lm}^2} = 3/105. \tag{5}$$

Weiter sieht man es anschaulich gleich, daß

$$\overline{\varphi_{hi}^3\,\varphi_{hk}\,\varphi_{hl}^2} = 0 \tag{6}$$

sein muß, weil ja in dieser Formel die drei Cosinus einer Richtung stehen und deshalb jeder Wert von $\varphi_{hi}^3\,\varphi_{hk}\,\varphi_{hl}^2$ in sein negatives übergeht, wenn man diese Richtung an einer entsprechenden Koordinatenebene spiegelt.

Aus

$$\overline{(\varphi_{11}\,\varphi_{12} + \varphi_{21}\,\varphi_{22} + \varphi_{31}\,\varphi_{32})\,\varphi_{32}^2\,\varphi_{31}^3} = 0$$

folgt endlich, wenn man (6) einsetzt

$$\overline{\varphi_{hi}\,\varphi_{hk}\,\varphi_{lm}^2\,\varphi_{li}^2} = 0 \tag{7}$$

und damit sind alle die in (20) stehenden Formeln hergeleitet.

---

[1]) Vgl. z. B. M. Born, Optik. S. 348. Berlin, Springer, 1933.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie, Berlin-Dahlem.)

Die relativen Isotopenhäufigkeiten und die Atomgewichte von Kupfer und Ruthenium.

Von **H. Ewald**, Berlin-Dahlem.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 9. September 1943.)

Die relativen Isotopenhäufigkeiten von Kupfer und Ruthenium wurden nach der kürzlich am Hafnium erprobten Methode der Eichelemente bestimmt. Es ergab sich für Kupfer:

Massenzahl	63	65
Prozentuelle Häufigkeit	69,97	30,03
Chem. Atomgewicht	$63{,}53 \pm 0{,}01$	

und für Ruthenium:

Massenzahl	96	98	99	100	101	102	104
Prozentuelle Häufigkeit	5,68	2,22	12,81	12,70	16,98	31,34	18,27
Chem. Atomgewicht	$101{,}03_5 \pm 0{,}02_5$						

I. Kupfer.

Das Verhältnis der relativen Häufigkeiten der beiden Kupferisotope 63 und 65 wurde 1924 von Aston nach Aufnahmen, die er mit seiner ersten Apparatur erhielt, zu etwa 2,5 geschätzt[1]). Eine genauere Messung ist seither nicht erfolgt. Hiervon abweichende Werte in den Isotopentabellen, z. B. 68 %: 32 %[2]), sind jeweils unter Voraussetzung eines bestimmten geschätzten Packungsanteils aus dem internationalen Wert des chemischen Atomgewichts abgeleitet. Nach den sehr zahlreichen guten Bestimmungen von relativen Isotopenhäufigkeiten anderer Elemente war Kupfer nunmehr das im ganzen Periodischen System am unsichersten bestimmte Element[3]). Es wurde deshalb jetzt mit Hilfe der kürzlich am Beispiel des Hafniums erprobten photometrischen Methode[4]) eine massenspektrographische Neubestimmung vorgenommen.

---

[1]) F. W. Aston, Phil. Mag. Journ. Sci. **47**, 395, 1924. — [2]) O. Hahn, Ber. d. dtsch. chem. Ges. **71 A**, 1, 1938. — [3]) Bemerkenswert ist hierzu ein Ausspruch in der neuen Auflage von Astons „Mass spectra and isotopes" (London 1942), der ebenfalls das Fehlen einer guten Bestimmung der Kupferisotope hervorhebt: „... daß die Atomgewichtstabelle unter Außerachtlassung der sehr zahlreichen direkten chemischen Atomgewichtsbestimmungen heute ganz aus massenspektrographischen Ergebnissen abgeleitet werden könnte, so vollständig und — mit der möglichen alleinigen Ausnahme des Elementes Kupfer — auch so sicher wie die heute verwendete Tabelle." — [4]) J. Mattauch u. H. Ewald, Naturwiss. **31**, 487, 1943; ZS. f. Phys., z. Z. im Druck.

Das Verfahren besteht darin, daß zugleich mit dem zu bestimmenden Element — hier Kupfer — ein möglichst isotopenreiches Vergleichselement mit geeignet über einen größeren Bereich verteilten und zu-

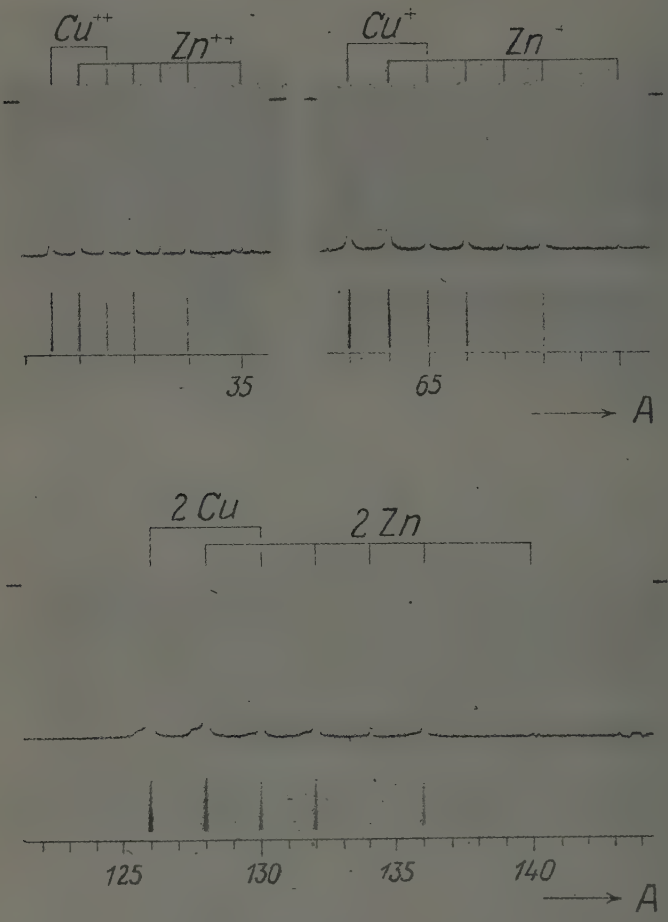


Fig. 1. Zur Bestimmung der relativen Häufigkeiten der Kupferisotope mit Hilfe des Eichelementes Zink.

verlässig bekannten Häufigkeitszahlen auf die Photoplatte aufgenommen wird. Nach Ausphotometrierung der Aufnahme ergibt sich aus den Photometerausschlägen für die Isotopenlinien dieses Elementes, wenn sie als Funktion der zugehörigen Häufigkeitszahlen aufgetragen werden, eine Art einfachster Schwärzungs- oder Eichkurve. Bei Berücksichtigung

einer kleinen Korrektur, die der Abhängigkeit der massenspektrographischen Linienbreiten und entsprechend der Linienhöhen von der Massenzahl Rechnung trägt[1]), kann man mittels der Photometerausschläge für die Isotopenlinien des zu bestimmenden Elementes aus diesen Kurven direkt die gesuchten Häufigkeitszahlen ablesen.

Als sehr geeignetes Vergleichselement für die Kupferbestimmung wurde zunächst Zink gewählt, welches sich schon in der Hafniumuntersuchung als brauchbar erwiesen hatte. Zur Ionenerzeugung wurde wiederum die schon an anderer Stelle beschriebene Dempstersche Funkenröhre[2]) verwendet. Versuchsweise wurden in diese Röhre einfache Messingstifte als Funkenelektroden eingesetzt, und es ergab sich dabei, daß diese zufällig gerade die richtige prozentuelle Zusammensetzung aufwiesen, so daß, wie es erforderlich ist, die Intensitäten der Kupferlinien innerhalb des durch die Intensitäten der Zinklinien gegebenen Bereiches der Eichkurven liegen. Zur Auswertung herangezogen wurden die Liniengruppen der einfach und der doppelt geladenen Ionen und die bei den doppelten Massenzahlen auftretenden Linien, die durch im Zwischenstück zwischen den beiden Feldern vor sich gehende Umladungen von doppelt geladenen Ionen zu einfach geladenen zustande kommen. Die Figur gibt dafür als Beispiele je einen vergrößerten Ausschnitt aus einem Spektrum mit den zugehörigen Photometerkurven. Die kleine linksseitige stufenförmige Unsymmetrie der Umladungslinien bei den doppelten Massenzahlen ist durch die besondere Entstehungsweise dieser Linien bedingt[3]). Je nachdem, ob die Umladungen im vollkommen feldfreien Raum (in der Hauptsache vermutlich durch Sekundärelektronen vor der Zwischenfeldblende) oder im Streufeld des Magneten (vermutlich durch Sekundärelektronen, die von den Stirnflächen der Polschuhe bzw. einer davor befindlichen besonderen eisernen Streufeldblende ausgehen) stattfinden, kommen die Ionen genau zu den doppelten oder zu etwas kleineren Massenzahlen. Da dieser kleine Schönheitsfehler alle Linien dieser Gruppe im gleichen Maße betrifft, können sie unbedenklich mit ausgewertet werden. Die in den Linienmaximis auftreffenden Ionenstromdichten werden nämlich durch diese unsymmetrische Verbreiterung alle um den gleichen Faktor verringert, die Intensitätsverhältnisse der Linien untereinander also davon nicht beeinflußt.

---

[1]) J. Mattauch u. H. Ewald, l. c. — [2]) J. Mattauch, H. Ewald, O. Hahn u. F. Strassmann, ZS. f. Phys. **120**, 602, 1943. — [3]) H. Lichtblau, Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, math.-naturw. Klasse IIa, **147**, 101, 1938; J. Mattauch u. H. Lichtblau, Phys. ZS. **40**, 16, 1939.

Weiter wurde Krypton zum Vergleich verwendet. Als Funkenelektroden dienten dabei Kupferstifte. Krypton wurde in schon früher beschriebener Weise in geringer Menge in das Funkenrohr eingeführt, so daß keine eigentliche Gasentladung zünden konnte, die Ionisation der Kryptonatome also mit im Funken stattfinden mußte. Hier wurden nur die Linien der einfach geladenen Kupfer- und Kryptonionen verwertet.

Die Ergebnisse sind in der Tabelle zusammengestellt. Die ersten drei Zeilen geben die gemittelten Ergebnisse der Kupfer-Zink-Aufnahmen gesondert, je nachdem, ob sie aus den Gruppen der einfach

Tabelle.

Meß- und Vergleichslinien	Zahl der Aufnahmen	$^{63}Cu : {}^{65}Cu$	
$Cu^{++} - Zn^{++}$	8	$2{,}357 \pm 0{,}061$	Gewichtetes Mittel: $2{,}350 \pm 0{,}020$
$Cu^{+} - Z^{+}$	7	$2{,}316 \pm 0{,}033$	
$2\,Cu - 2\,Zn$	9	$2{,}374 \pm 0{,}029$	
$\sum (Cu, Zn)$	24	$2{,}351 \pm 0{,}024$	Ungewichtetes Mittel
$Cu^{+} - Kr^{+}$	18	$2{,}281 \pm 0{,}037$	
	42	$\mathbf{2{,}330 \pm 0{,}032}$	Gewichtetes Gesamtmittel

oder der doppelt geladenen Ionen oder der Umladungslinien erhalten wurden. Die Streuung dieser Resultate ist nicht größer als man nach ihren wahrscheinlichen Fehlern erwarten sollte. Das gewichtete Mittel aus diesen drei Gruppen stimmt mit dem ungewichteten Mittel (4. Zeile) aller Kupfer-Zink-Auswertungen überein. Das Kupfer-Krypton-Ergebnis (5. Zeile) liegt gegenüber dem Kupfer-Zink-Ergebnis etwas niedriger. Beide Zahlen sind aber bei den angegebenen wahrscheinlichen Fehlern[1]) miteinander verträglich. Die 6. Zeile gibt schließlich das gewichtete Gesamtmittel aus den Zink- und Krypton-Werten. Daraus errechnet man die prozentuellen Häufigkeiten der beiden Kupferisotope

Massenzahl	63	65
Proz. Häufigkeit	$69{,}97 \pm 0{,}29$	$30{,}03 \pm 0{,}29$

Bei Verwendung des Packungsanteiles von ^{63}Cu ($f = -8{,}13 \pm 0{,}10$)[2]) für beide Isotope ergibt sich das mittlere Isotopengewicht zu

[1]) Wegen Berechnung des Fehlers siehe J. Mattauch u. H. Ewald, l. c, — [2]) S. Flügge u. J. Mattauch, Isotopenbericht 1942, Phys. ZS. 44, 181. 1943.

63,549 ± 0,006 und mit dem Smytheschen Umrechnungsfaktor 1,000275 das chemische Atomgewicht

$$63{,}53 \pm 0{,}01.$$

Wie üblich ist hierbei die Unsicherheit recht hoch, fast doppelt so groß wie der errechnete wahrscheinliche Fehler angegeben.

Dieser neue Wert des chemischen Atomgewichts liegt doch merklich tiefer als der bisherige internationale Wert (63,57). Hierdurch veranlaßt ließ Prof. Hönigschmid kürzlich in seinem Laboratorium eine chemische Neubestimmung vornehmen[1]). Diese ergab 63,542, in recht guter Übereinstimmung mit dem hier gefundenen Wert.

II. Ruthenium.

Eine Untersuchung der Isotopenzusammensetzung des Rutheniums wurde 1931 von Aston[2]) unternommen. Die Erzeugung der Ionen mit Hilfe des sublimierenden Rutheniumtetroxyds in der Gasentladungsröhre begegnete aber damals gewissen Schwierigkeiten. Infolgedessen blieb die Existenz des Isotops ^{98}Ru fraglich. Die Häufigkeitszahlen besonders der Isotope 101, 100 und 99 wurden mit dem Vorbehalt angegeben, daß sie vielleicht durch doppelt geladene Quecksilberionen, deren Auftreten wegen der Verwendung von Quecksilberpumpen schwer zu verhindern war, merklich zu groß gemessen wurden. Diese Zahlen führten auf ein chemisches Atomgewicht von 101,1, das erheblich tiefer lag als der internationale Wert 101,7. Eine chemische Neubestimmung von Gleu und Rehm[3]) ergab 101,08 ± 0,05. Die damit notwendig erscheinende Revision des internationalen Wertes ließ eine neue massenspektrographische Untersuchung wünschenswert erscheinen. Diese wurde jetzt auf Bitte von Herrn Prof. Gleu, der uns zu diesem Zweck freundlicherweise geeignete Rutheniumpräparate, darunter auch Metallpulver, zur Verfügung stellte, durchgeführt.

Als geeignetes Vergleichselement wurde Cadmium ausgewählt. Dieses wurde 1936 von Nier[4]) elektrometrisch zugleich mit Zink und anderen Elementen ausgemessen. Um nun aber einmal die Zuverlässigkeit der Nierschen Werte beurteilen zu können, zum anderen aber besonders um unsere photometrische Methode einer weiteren Überprüfung zu unterziehen, wurde zunächst folgende Probe unternommen.

---

[1]) O. Hönigschmid u. Th. Johannsen, Naturw. 31, 548, 1943. — [2]) F. W. Aston, Nature 127, 233, 1931 und Proc. Roy. Soc. London (A) 132, 493, 1931. — [3]) K. Gleu u. K. Rehm, ZS. f. anorgan. allg. Chem. 235, 352, 1938. — [4]) A. O. Nier, Phys. Rev. 50, 1043, 1936.

Die beiden elektrometrisch gemessenen Elemente Zink und Cadmium wurden gegeneinander vermessen, Zink als Eichelement und Cadmium als Meßelement. Dazu wurden Zink- und Cadmiumpulver in geeignetem Verhältnis innig vermischt und in einer Pastillenpresse zu kleinen Pillen gepreßt, wie auch schon ähnlich Pillen aus Hafniumpulver hergestellt worden waren. Diese Zink-Cadmium-Pillen wurden als Elektroden in die Funkenröhre eingesetzt. Die auf diese Weise erhaltenen Zahlen für die prozentuellen Häufigkeiten der Cadmiumisotope sind im Vergleich zu den Nierschen Werten

Massenzahl	106	108	110	111	112	113	114	116	
Proz. Häufigkeit									
Nier	1,4	1,0	12,8	13,0	24,2	12,3	28,0	7,3	
Cd (Zn)	1,2	0,7	12,8	13,0	24,2	12,2	28,9	7,0	Mittel aus 11–17 Aufnahmen
Wahrscheinlicher Fehler in % ..	± 5	± 10	± 1,0	± 1,0	± 1,0	± 1,2	± 2,5	± 2,0	

Abgesehen von einer geringen Unstimmigkeit bei den seltenen Isotopen, deren Ursache hier nicht weiter nachgegangen wurde, zeigt sich eine überzeugend gute Übereinstimmung, die wohl dazu berechtigt, den Nierschen Werten Vertrauen zu schenken und zugleich das photometrische Verfahren als gleichwertig neben die elektrometrische Methode zu stellen. Nebenbei sei bemerkt, daß die hier erhaltenen Zahlen für die prozentuellen Häufigkeiten der Cadmiumisotope nicht den Anspruch erheben sollen, als selbständige Neumessung aufgenommen zu werden.

Für die Rutheniumuntersuchung wurden nun in gleicher Weise aus Ruthenium- und Cadmiumpulver im richtigen Mischungsverhältnis Elektrodenpastillen hergestellt. Es konnten ohne Schwierigkeiten gute Aufnahmen erhalten werden. Dabei ergaben sich als Mittelwerte aus je 19 Aufnahmen die 6 Linienverhältnisse

	Aston		Aston
$^{102}Ru/^{104}Ru = 1{,}716 \pm 0{,}023_5$	1,73	$^{99}Ru/^{100}Ru = 1{,}009 \pm 0{,}014_8$	0,86
$^{104}Ru/^{101}Ru = 1{,}076 \pm 0{,}011_0$	0,77	$^{100}Ru/^{96}Ru = 2{,}235 \pm 0{,}047_0$	2,8
$^{101}Ru/^{99}Ru = 1{,}325 \pm 0{,}020_2$	1,83	$^{96}Ru/^{98}Ru = 2{,}554 \pm 0{,}058_5$	?

und daraus die prozentuellen Häufigkeiten der Rutheniumisotope im Vergleich zu den Astonschen Werten

Massenzahl	96	98	99	100	101	102	104
Proz. Häufigkeit							
Aston	5	?	12	14	22	30	17
Ru (Cd)	5,68	2,22	12,81	12,70	16,98	31,34	18,27
Wahrscheinlicher Fehler in % ..	± 3	± 4	± 1,5	± 1,5	± 1,5	± 1,5	± 1,5

Hieraus folgt die mittlere Massenzahl $101{,}128 \pm 0{,}020$ und unter Verwendung des Packungsanteiles $f = -6{,}49 \pm 0{,}31$[1]) und des Smytheschen Umrechnungsfaktors das chemische Atomgewicht des Rutheniums

$$101{,}03_5 \pm 0{,}02_5.$$

Damit wird also das Ergebnis von Gleu und Rehm bestätigt. An der Existenz des Isotopes ^{98}Ru besteht kein Zweifel. Wenn man die Astonschen Zahlen der prozentuellen Häufigkeiten oder die daraus abgeleiteten Linienverhältnisse (siehe diese) mit den hier gefundenen vergleicht, dann erkennt man, daß Aston für die Linien 101 und 100 wesentlich höhere Werte gefunden hat. Das mag eine qualitative Bestätigung sein für seine Annahme, daß seine Ergebnisse vielleicht durch das Auftreten von doppelt geladenen Quecksilberionen verfälscht sind.

Herrn Prof. J. Mattauch möchte ich für sein stets hilfsbereites Interesse an dieser Arbeit herzlich danken, desgleichen Herrn Prof. Gleu für die Überlassung der Ruthenium-Präparate und Fräulein H. Scheld für die gewissenhafte Hilfe bei der Durchführung der experimentellen Arbeiten.

[1]) Isotopenbericht 1942, l. c.

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Rostock.)

Die spektrale Energieverteilung der Hefnerlampe.

Von **Paul Kunze** in Rostock.

(Eingegangen am 28. September 1943.)

Die Hefnerlampe als leicht herzustellende Standardlichtquelle kann auf Grund anderer Arbeiten auch als Vergleichsspektrum bekannter Intensität benutzt werden. Für die Gleichung der Intensitätsverteilung im Spektrum der Hefnerlampe wird eine verbesserte Form angegeben.

Valentiner und Rössiger haben für die spektrale Energieverteilung der Hefnerlampe unter Benutzung eigener[1]) und älterer Messungen von Ångström[2]) die beiden folgenden Formeln aufgestellt, wobei die E_λ-Werte die Energiestrahlung in cal/sec durch 1 cm² in einem horizontalen Abstand von 1 m darstellen, und die Wellenlänge λ in μ gemessen wird:

$$E_\lambda \mathrm{d}\lambda = 0{,}01585\, \lambda^{-5}\, e^{-\frac{14300}{\lambda \cdot 1840}}\, \mathrm{d}\lambda \qquad (1)$$

bei Zugrundelegung der Wienschen Strahlungsformel eines schwarzen Körpers von 1840° K (= „Farbtemperatur", bei welcher dieser farbengleich ist mit dem Lichte der Hefnerflamme); oder

$$E_\lambda \mathrm{d}\lambda = 0{,}700\, \lambda^{-6{,}4}\, e^{-\frac{14300}{\lambda \cdot 1675}}\, \mathrm{d}\lambda \qquad (2)$$

bei Zugrundelegung der wahren Flammentemperatur von 1675° K unter Mitberücksichtigung des Absorptionsvermögens der Hefnerflamme, welches mit $\lambda^{-1{,}4}$ geht.

Valentiner und Rössiger berechnen und tabellieren die Funktionen E_λ aus Formel (1) und (2) im Bereich von $\lambda = 0{,}75$ bis $0{,}44\ \mu$, und ziehen aus ihren Zahlwerten den Schluß, daß Formel (2) die Meßwerte besser wiedergibt als Formel (1).

Die Nachrechnung dieser Tabellenwerte hat aber Unstimmigkeiten ergeben, die nachfolgend richtiggestellt seien. Zunächst sind die bei Valentiner und Rössiger nach Formel (1) tabellierten E_λ-Werte durchweg um einige — bis zu 5 — Prozent kleiner, als es tatsächlich der Formel (1) entspricht. Die exakt nach Formel (1) berechneten

---

[1]) S. Valentiner u. M. Rössiger, Ann. d. Phys. **76**, 785, 1925. — [2]) K. Ångström, Phys. ZS. **5**, 456, 1904.

Werte liegen andererseits wieder ausnahmslos einige Prozent über den sehr sorgfältig und genau gemessenen Punkten von Valentiner und Rössiger. Will man also die Formelwerte von (1) mit diesen Meßpunkten zur Deckung bringen, muß man am Zahlenfaktor der Gleichung (1) eine kleine Änderung vornehmen und schreiben:

$$E_\lambda = 0{,}01535\, \lambda^{-5}\, e^{-\frac{14300}{\lambda \cdot 1840}}. \qquad (3)$$

Diese Änderung ist nicht erheblich. Wesentlich ist, daß auch der Zahlenfaktor der Gleichung (2) nicht stimmt, und zwar gleich um $1^1/_2$ Größenordnungen zu groß ist, und daß die Gleichung in dieser falschen Form in eine Reihe von Literaturstellen eingegangen ist, worunter sich auch wichtige Nachschlage[1])- und Tabellen[2])-Werke befinden.

Eine Korrektur erscheint somit wünschenswert. Will man die Gleichung (2) wieder den sorgfältigen und genauen Meßwerten von Valentiner und Rössiger anpassen, muß man ihren Zahlenfaktor wie folgt abändern:

$$E_\lambda = 0{,}0268\, \lambda^{-6{,}4}\, e^{-\frac{14300}{\lambda \cdot 1675}}. \qquad (4)$$

Die Werte, die sich aus Gleichung (3) und (4) ergeben, sind in unserer Tabelle zusammengefaßt und mit den Meßwerten von Valentiner und Rössiger und von K. Ångström verglichen, wobei letztere als wesentlich ungenauer eingeklammert sind.

Strahlung der Hefnerkerze in cal/sec durch 1 cm² in 1 m horizontalem Abstand für $\Delta\lambda = 1\ \mu$.

λ in μ	$E_\lambda \cdot 10^7$			λ in μ	$E_\lambda \cdot 10^7$		
	nach (3)	nach (4)	gemessen		nach (3)	nach (4)	gemessen
1,0	64,7	52,5	—	0,55	2,23	2,23	(2,44)
0,9	46,2	39,9	—	0,54	1,88	1,88	1,88
0,8	28,3	25,9	—	0,52	1,305	1,305	1,32
0,75	20,4	19,2	(19,5)	0,50	0,873	0,870	0,88
0,70	13,8	13,3	(12,6)	0,48	0,560	0,554	0,55
0,65	8,49	8,35	(7,9)	0,46	0,343	0,336	0,32
0,60	4,68	4,66	(4,45)	0,44	0,199	0,192	0,198
0,56	2,62	2,62	2,62	0,40	0,055	0,051	—

(Die Messungen von Ångström sind eingeklammert.)

[1]) Handbuch der Physik, Bd. 20, S. 140. — [2]) Landolt-Börnstein, I. Ergänzungsband, S. 320; die Strahlungstemperatur ist dort durch einen weiteren Druckfehler (1800 statt 1840) verfälscht.

Aus der Tabelle ergibt sich, daß beide Gleichungen in ihrer neuen Form den Meßwerten von Valentiner und Rössiger ungefähr gleich gut entsprechen; man kann nicht mehr sagen, daß Gleichung (4) die Beobachtungen besser wiedergibt. Stärkere Abweichungen zwischen den Formeln (3) und (4) treten erst außerhalb des experimentell geprüften Bereiches auf, wobei es unentschieden ist, ob eine der beiden Formeln die bessere ist, oder ob beide gleich ungenau werden.

Anmerkung bei der Korrektur. Wie ich von Herrn Valentiner auf meine Anfrage erfahre, liegen seiner Angabe der Zahlenfaktoren in den beiden Gleichungen Druck- und Schreibfehler zugrunde; nach Mitteilung von Herrn Valentiner sollten sie 0,01545 und 0,0267 statt 0,01585 und 0,700 lauten. Die obigen von mir gewählten Zahlenfaktoren stimmen damit fast überein, und scheinen im übrigen die Beobachtungen von Valentiner und Rössiger noch besser wiederzugeben.

Rostock, Physikalisches Institut der Universität, September 1943.

Störungsrechnung in der erweiterten statistischen Theorie des Atoms und ihre Anwendung zur Berechnung von Polarisierbarkeiten.

Von **Paul Gombás** in Kolozsvár (Ungarn).

(Eingegangen am 18. September 1943.)

Für das mit der Korrelation erweiterte statistische Atommodell wird eine Störungsrechnung entwickelt, die auch auf kompliziertere Systeme übertragen werden kann. Zur Bestimmung der Dichteänderung erster Ordnung wird neben einem Iterationsverfahren ein Variationsverfahren entwickelt und es werden die Ausdrücke für die Dichteänderung erster Ordnung und die Störungsenergie erster und zweiter Ordnung hergeleitet, die mit den statistisch gedeuteten wellenmechanischen Ausdrücken große Ähnlichkeit aufweisen. Empirische oder halbempirische Konstanten werden in die Störungsrechnung nicht eingeführt. Die Anwendung der Störungsrechnung auf die Berechnung der Polarisierbarkeiten von Atomen und Ionen führt bei den schweren Atomen und Ionen, für die die statistische Behandlungsweise berechtigt ist, zu einer befriedigenden Übereinstimmung mit der Erfahrung.

1. Einleitung und Zusammenfassung.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, eine Störungsrechnung in der durch die Korrelation erweiterten statistischen Theorie des Atoms[1]) zu entwickeln und auf Grund dieser die Polarisierbarkeiten von Atomen und Ionen zu berechnen.

Wir legen in dieser Arbeit dasjenige erweiterte statistische Modell zugrunde, im Rahmen dessen auch negative Ionen stabil sind. Die Stabilität negativer Ionen kann dadurch erzielt werden, daß man die Summe der Austausch- und Korrelationskorrektion am Atomrand durch die Korrektion von Fermi und Amaldi ersetzt. Näheres hierüber findet man in der zitierten Arbeit des Verfassers[2]). Hier sei nur kurz erwähnt, daß die Grundgleichung dieses statistischen Modells folgende Gestalt hat[3]):

$$(V - \overline{V}_0)\,\varepsilon - \frac{5}{3}\,n_k\,\nu^{2/3} + \frac{\partial \chi}{\partial \nu} = 0. \qquad (1)$$

Die Bezeichnungen sind dieselben wie in I, es ist also V das Gesamtpotential (Potential des Kernes + Potential der Elektronenwolke),

[1]) Man vgl. P. Gombás, ZS. f. Phys. **121**, 523, 1943, im folgenden als I zitiert. In dieser Arbeit wurde statt Korrelation die Benennung Polarisation gebraucht. In der ersten Gleichung (59) dieser Arbeit fehlt, zufolge eines Druckfehlers, der Strich über μ; richtig soll es heißen $x = r/\bar{\mu}$. — [2]) l. c. I. Der Grundgedanke dieser Modifikation stammt von Jensen und wurde von ihm auf das Thomas-Fermi-Diracsche Modell angewendet. Man vgl. hierzu ZS. f. Phys. **101**, 141, 1936. — [3]) Man vgl. Gleichung (55) von I.

ν die Elektronendichte, $\overline{V}_0$ ein Lagrangescher Multiplikator und n_k eine universelle Konstante; das Glied $\partial\chi/\partial\nu$ ist in der Weise definiert, daß es für kleine r in $\frac{4}{3} n_a \nu^{1/2} - \frac{dw}{d\nu}$ und am Atomrand in das Fermi-Amaldische Korrektionsglied, also in ε^2/r übergeht; hier bezeichnet n_a eine universelle Konstante und w die Dichte der Korrelationsenergie[1]). Wesentlich ist, daß im Rahmen dieses Modells die Elektronenwolke sowohl in neutralen Atomen als in positiven und negativen Ionen auf eine Kugel von endlichem Radius beschränkt ist und die Randdichte der Elektronenverteilung durch die Gleichung (27) bzw. (29) von I bestimmt ist. Da das Korrektionsglied nur in den Randgebieten des Atoms wesentlich ist und dort mit dem Fermi-Amaldischen Korrektionsglied übereinstimmt, kann man die Dichteverteilung mit Berücksichtigung der Nebenbedingung für die Randdichte statt aus der Gleichung (1) aus der Fermi-Amaldischen Gleichung

$$(\overline{V} - \overline{V}_0)\,\varepsilon - \frac{5}{3} n_k \nu^{2/3} = 0 \qquad (2)$$

bestimmen, wo $\overline{V} = V - \frac{1}{N} V_e$ ist und V_e das Potential der Elektronenwolke bezeichnet. Zur Berechnung der Energie hat man aber die Gleichung (1) zugrunde zu legen.

Die Einbeziehung negativer Ionen erweist sich im folgenden als wichtig, da es sich bei den verschiedenen Anwendungen der Theorie in den meisten Fällen um Systeme handelt, in denen die Störung negativer Ionen die wesentliche Rolle spielt.

Die Resultate der vorliegenden Arbeit sind kurz die folgenden. Die Störungsenergie erster Ordnung ist der nach der ungestörten Ladungsdichte gemittelte Wert des Störungspotentials. Zur Berechnung der Störungsenergie zweiter Ordnung hat man die Störung der Dichteverteilung des Elektronengases in erster Näherung zu bestimmen. Hierzu werden zwei Verfahren, und zwar ein Iterationsverfahren und ein Variationsverfahren entwickelt. Das Iterationsverfahren, dessen Anwendung auf ziemlich weitläufige Rechnungen führt, hat hier eher als Ausgangspunkt des Variationsverfahrens Bedeutung. Bei Anwendungen auf konkrete Probleme wird man sich des Variationsverfahrens bedienen, das zu relativ einfachen Endformeln führt. Die Endformeln für die Dichteänderung und der Störungsenergien zeigen

[1]) Bezüglich dieser Größen vgl. man die Gleichungen (14), (54), (56), (6) und (9) von I.

eine weitgehende Analogie mit der Wellenmechanik. Empirische oder halbempirische Konstanten werden in die Störungsrechnung nicht einbezogen.

Die Anwendung der Störungsrechnung zur Berechnung von Polarisierbarkeiten von Edelgasatomen und Ionen mit edelgasähnlicher Elektronenkonfiguration führt bei den schweren Atomen und Ionen zu einer befriedigenden Übereinstimmung mit der Erfahrung, für die leichten Atome und Ionen ergeben sich aber zufolge der statistischen Berechnungsweise naturgemäß größere Abweichungen. Und zwar erhält man aus der Theorie zu große Werte. Diesbezüglich muß man beachten, daß die Polarisierbarkeit eine von der Dichteverteilung in den äußeren Gebieten der Atome und Ionen in hohem Maße abhängige Konstante ist, da — wie wir sehen werden — in den statistischen Ausdruck für die Polarisierbarkeit das Quadrat des nach $\nu^{1/3}$ gemittelten Wertes von r^2 eingeht. Es werden also die äußeren Gebiete der leichten Atome und Ionen, in welchen der statistische Dichteverlauf den wahren nur grob annähert, sehr stark betont.

Das Iterationsverfahren wurde vom Verfasser für das ursprüngliche Thomas-Fermische Modell und für das Thomas-Fermi-Diracsche Modell in zwei früheren Arbeiten[1]) entwickelt. Im Rahmen dieser Modelle sind aber negative Ionen nicht stabil, so daß das Anwendungsgebiet der dort entwickelten Störungsrechnung stark eingeschränkt war.

2. *Allgemeines.*

Wir gehen vom Grundproblem der statistischen Störungsrechnung aus, wir befassen uns also mit einem statistischen Atom, das sich in einem schwachen äußeren elektrischen Feld befindet und bestimmen die Elektronendichte in erster und die Energie des gestörten Atoms in zweiter Näherung. Die folgenden Ausführungen gelten nicht nur für neutrale Atome, sondern auch für positive und negative Ionen und man kann sie mit entsprechenden Abänderungen auch auf kompliziertere Systeme übertragen.

Das ungestörte System sei also ein kugelsymmetrisches statistisches Atom mit der Ordnungszahl Z und der Elektronenzahl N, dessen Energie, E, folgendermaßen definiert ist

$$E = \int [n_k \nu^{5/3} - (V_k + \tfrac{1}{2} V_e)\, \varepsilon\, \nu - \chi]\, \mathrm{d}\, v. \tag{3}$$

[1]) P. Gombás, ZS. f. Phys. **97**, 633, 1935; **98**, 417, 1936.

Hier bezeichnet V_k das Potential des Kernes und V_e das Potential der Elektronenwolke, es ist also

$$V_k = \frac{Z\varepsilon}{r} \quad \text{und} \quad V_e = -\varepsilon \int \frac{\nu(\mathfrak{r}')\,\mathrm{d}v'}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}. \tag{4}$$

χ ist eine Funktion von ν und r, die für kleine r in $n_a \nu^{4/3} - w$ übergeht. Die Ableitung von χ nach ν ist auf die in der Einleitung angegebenen Weise definiert [1]).

Die Störung bestehe in einem schwachen äußeren elektrischen Feld, dessen Potential v_s sei. Durch die Störung wird die Elektronendichte und das Potential der Elektronenwolke abgeändert. Für die Elektronendichte im gestörten Atom, ν', setzen wir

$$\nu' = \nu + \delta\nu, \tag{5}$$

wo $\delta\nu$ die aus der Störung resultierende Dichteänderung bezeichnet. Da die Anzahl der Elektronen durch die Störung nicht geändert wird, ist

$$\int \nu'\varepsilon\,\mathrm{d}v = \int \nu\varepsilon\,\mathrm{d}v = N\varepsilon, \tag{6}$$

also

$$\int \delta\nu\,\mathrm{d}v = 0. \tag{7}$$

Das Potential der Elektronenwolke des gestörten Atoms schreiben wir in der folgenden Form

$$V_e' = V_e + \delta V_e. \tag{8}$$

Hier bezeichnet δV_e die aus der Dichteänderung resultierende Änderung von V_e, es ist also

$$\delta V_e(\mathfrak{r}) = -\varepsilon \int \frac{\delta\nu(\mathfrak{r}')\,\mathrm{d}v'}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}. \tag{9}$$

Für die Energie des gestörten Atoms erhält man

$$E' = \int [n_k \nu'^{5/3} - (V_k + \tfrac{1}{2} V_e' + v_s)\,\varepsilon\nu' - \chi']\,\mathrm{d}v, \tag{10}$$

wo wir für $\chi(\nu', r)$ kurz χ' geschrieben haben. Wir setzen nun in (10) ν' aus (5) ein und betrachten v_s, $\delta\nu$ und δV_e als kleine Größen. Wenn man den Integrand nach $\delta\nu$ entwickelt und die Glieder, welche von dritter und höherer Ordnung klein sind, vernachlässigt, so bekommt man mit Rücksicht auf den Zusammenhang

$$\int \nu\delta V_e\,\mathrm{d}v = \int V_e\,\delta\nu\,\mathrm{d}v \tag{11}$$

[1]) Näheres hierüber findet man in I.

folgenden Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} E' = E + \int\Big[\frac{5}{3} n_k \nu^{2/3} - (V_k + V_e)\,\varepsilon - \frac{\partial \chi}{\partial \nu}\Big]\,\delta\nu\,\mathrm{d}v + \\ + \int\Big[\frac{5}{9} n_k \frac{1}{\nu^{1/3}}(\delta\nu)^2 - \frac{1}{2}\,\varepsilon\,\delta V_e\,\delta\nu - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\nu^2}(\delta\nu)^2\Big]\mathrm{d}v - \\ - \int v_s\,\varepsilon\,(\nu + \delta\nu)\,\mathrm{d}v. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Hier ist das erste Glied auf der rechten Seite, E, die Energie des ungestörten Atoms. Die weiteren Glieder geben die zufolge der Störung entstehende Energieänderung bis auf Glieder zweiter Ordnung. Diese Energieänderung setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Erstens entsteht eine Energieänderung dadurch, daß auf die Elektronenwolke des Atoms das zusätzliche Störungspotential v_s wirkt; die hieraus resultierende Energieänderung gibt das letzte Glied auf der rechten Seite. Zweitens entsteht eine Energieänderung daraus, daß sich zufolge der Dichteänderung $\delta\nu$ auch die innere Energie des Atoms ändert; diese Energieänderung wird bis auf Glieder zweiter Ordnung durch das erste und zweite Integral der rechten Seite dargestellt. Das erste Integral verschwindet, ν ist nämlich voraussetzungsgemäß so bestimmt, daß E zum Minimum wird, also daß die erste Variation von E hinsichtlich ν verschwindet.

Für die Störungsenergie erster Ordnung, η_1, und zweiter Ordnung, η_2, erhält man somit die Ausdrücke

$$\eta_1 = -\,\varepsilon \int v_s \nu\,\mathrm{d}v, \quad (13)$$

$$\eta_2 = -\,U_s + U_p + U_k - U_a, \quad (14)$$

wo wir zur Abkürzung folgende Bezeichnungen einführten:

$$\left.\begin{aligned} U_s &= \varepsilon \int v_s\,\delta\nu\,\mathrm{d}v, \\ U_p &= -\frac{1}{2}\,\varepsilon \int \delta V_e\,\delta\nu\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\,\varepsilon^2 \iint \frac{\delta\nu(\mathfrak{r})\,\delta\nu(\mathfrak{r}')}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v', \\ U_k &= \frac{5}{9} n_k \int \frac{1}{\nu^{1/3}}(\delta\nu)^2\,\mathrm{d}v, \quad U_a = \frac{1}{2}\int \frac{\partial^2\chi}{\partial\nu^2}(\delta\nu)^2\,\mathrm{d}v. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Die Störungsenergie erster Ordnung ist also der nach der ungestörten Ladungsdichte $-\nu\varepsilon$ gemittelte Wert des Störungspotentials. Zur Bestimmung der Störungsenergie zweiter Ordnung muß man $\delta\nu$ in erster Näherung, also bis auf Glieder erster Ordnung genau kennen, Glieder, die von zweiter und höherer Ordnung klein sind, können aber vernachlässigt werden.

Da man die Funktion χ nicht genügend genau kennt (man vergleiche hierzu I), kann die Berechnung des Korrektionsgliedes U_a nur mit einer gewissen Willkür durchgeführt werden. Dies ist jedoch belanglos, da U_a in den praktisch vorkommenden Fällen im Verhältnis zu η_2 immer sehr klein ist und vernachlässigt werden kann. Für den Fall, daß U_p positiv ist, also U_p und U_k gleiches Vorzeichen haben, wird dies am Ende des Abschnittes 4 gezeigt.

Obwohl dies in den praktisch vorkommenden Fällen immer zutrifft, nehmen wir U_a der Vollständigkeit halber auch in den folgenden Ausführungen mit.

Unser weiteres Ziel ist $\delta\nu$ zu bestimmen und mit diesem die Störungsenergie zweiter Ordnung zu berechnen. Zur Bestimmung von $\delta\nu$ entwickeln wir ein Iterationsverfahren und ein Variationsverfahren.

3. Das Iterationsverfahren.

In dem Atommodell, das wir den Ausführungen dieser Arbeit zugrunde legen, wird die Elektronendichte aus der Fermi-Amaldischen Gleichung (2) unter Beibehaltung der Nebenbedingung bezüglich der Randdichte [man vgl. I, Gl. (29)] bestimmt. Den Fermi-Amaldischen Zusammenhang zwischen Elektronendichte und Potential kann man für das ungestörte Atom in folgender Form schreiben

$$\nu = \sigma\,(\bar{V} - \bar{V}_0)^{3/2}. \tag{16}$$

Hier ist

$$\sigma = \left(\frac{3\,\varepsilon}{5\,n_k}\right)^{3/2} = \frac{2^{3/2}}{3\,\pi^2\,\varepsilon^{3/2}\,a_H^{3/2}}, \tag{17}$$

$$\bar{V} = \frac{Z\,\varepsilon}{r} + \frac{N-1}{N}\,V_e \tag{18}$$

und

$$\bar{V}_0 = \frac{(Z-N+1)\,\varepsilon}{r_0} - \frac{5\,n_a'^2}{15\,n_k\,\varepsilon}. \tag{19}$$

r_0 bezeichnet den Grenzradius, bis zu welchem die Elektronendichte ausläuft und n_a' eine universelle Konstante, die in I durch die Gleichung (30) definiert ist.

Das Iterationsverfahren gründet sich auf den zu (16) analogen Zusammenhang für das gestörte Atom. Dieser lautet

$$\nu' = \sigma\,(\bar{V}' + v_s - \bar{V}_0') \tag{20}$$

mit

$$\bar{V}' = V_k + \frac{N-1}{N}\,V_e' = V_k + \frac{N-1}{N}\,V_e + \frac{N-1}{N}\,\delta V_e. \tag{21}$$

Den Lagrangeschen Multiplikator für das gestörte Atom, $\overline{V}_0'$, setzen wir in der Form

$$\overline{V}_0' = \overline{V}_0 + v_0 \tag{22}$$

an, wo v_0 eine durch die Störung bedingte und relativ kleine Änderung von $\overline{V}_0$ bedeutet.

Der erste Schritt des Iterationsverfahrens gestaltet sich folgendermaßen. Man vernachlässigt in (20) die durch die Dichteänderung $\delta\nu$ hervorgerufene Änderung des Potentials der Elektronenwolke, δV_e, neben v_s, wodurch man die Gleichung

$$\nu' = \sigma\,(\overline{V} - \overline{V}_0 + v_s - v_0)^{3/2} \tag{23}$$

erhält. Mit der Voraussetzung, daß $v_s - v_0$ im Verhältnis zu $\overline{V} - \overline{V}_0$ klein ist, können wir die rechte Seite von (23) in eine Reihe entwickeln. Wenn man die Reihe nach dem zweiten Glied abbricht, ergibt sich mit Rücksicht auf (16)

$$\nu' = \left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{v_s - v_0}{\overline{V} - \overline{V}_0}\right)\nu, \tag{24}$$

also

$$\delta\nu = \frac{3}{2}\,\frac{v_s - v_0}{\overline{V} - \overline{V}_0}\,\nu = \frac{9\,\varepsilon}{10\,n_k}\,(v_s - v_0)\,\nu^{1/3}. \tag{25}$$

Aus der Bedingung (7) folgt

$$v_0 = \frac{\int \frac{v_s\,\nu}{\overline{V} - \overline{V}_0}\,\mathrm{d}v}{\int \frac{\nu}{\overline{V} - \overline{V}_0}\,\mathrm{d}v} = \frac{\int v_s\,\nu^{1/3}\,\mathrm{d}v}{\int \nu^{1/3}\,\mathrm{d}v}. \tag{26}$$

v_0 ist also der nach $\nu/(\overline{V} - \overline{V}_0)$ bzw. nach $\nu^{1/3}$ gebildete Mittelwert von v_s. Für $v_s = \text{const}$ wird $v_0 = v_s$, also $\delta\nu \equiv 0$, in Übereinstimmung damit, daß durch ein konstantes Potential die Dichteverteilung nicht beeinflußt wird. Mit dem Ausdruck (26) für v_0 erhält man aus (25) die Dichteänderung des ersten Schrittes.

Die weiteren Schritte des Iterationsverfahrens gestalten sich folgendermaßen. Zunächst bestimmt man nach (9) die der Dichteänderung (25) entsprechende Änderung des Potentials der Elektronenwolke, δV_e, und wiederholt dann mit $v_s + \delta V_e$ als Störungspotential das ganze Verfahren. Aus diesem zweiten Schritt ergibt sich eine neue Dichteänderung; mit dieser kann man dann wieder ein neues δV_e bestimmen usw. Das Verfahren ist solange zu wiederholen, bis sich $\delta\nu$ reproduziert. Auf diese Weise kann man ν' in erster Näherung, also bis auf Glieder erster Ordnung, genau approximieren.

4. Das Variationsverfahren.

Dieses Verfahren, mit dem sich die Bestimmung von ν' bedeutend einfacher gestaltet als mit dem Iterationsverfahren, kann man im Anschluß an das Iterationsverfahren entwickeln. Hierzu macht man für ν' bzw. für $\delta\nu$ einen geeigneten Ansatz mit zunächst frei verfügbaren Variationsparametern, die aus der Minimumsforderung der Energie bestimmt werden. Als Ansatz für $\delta\nu$ bietet sich der Ausdruck (25), wenn man in diesem statt der numerischen Konstante 3/2 einen Variationsparameter λ setzt. Wir setzen also

$$\nu' = \left(1 + \lambda \frac{v_s - v_0}{\overline{V} - \overline{V}_0}\right) \nu \tag{27}$$

bzw.

$$\delta\nu = \lambda \frac{v_s - v_0}{\overline{V} - \overline{V}_0} \nu = \frac{3\varepsilon}{5 n_k} \lambda (v_s - v_0) \nu^{1/3}, \tag{28}$$

wo v_0 durch (26) definiert ist.

Mit diesem $\delta\nu$ erhält man aus (9)

$$\left.\begin{aligned} \delta V_e(\mathfrak{r}) &= -\lambda\varepsilon \int \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} \frac{v_s(\mathfrak{r}') - v_0}{\overline{V}(\mathfrak{r}') - \overline{V}_0} \nu(\mathfrak{r}')\, \mathrm{d}v' \\ &= -\lambda \frac{3\varepsilon^2}{5 n_k} \int \frac{[v_s(\mathfrak{r}') - v_0]\,[\nu(\mathfrak{r}')]^{1/3}}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|}\, \mathrm{d}v'. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Der Variationsparameter λ wird aus der Minimumsforderung der Energie bestimmt. Hierzu berechnen wir mit dem Ausdruck (27) bzw. (28) die Energie in zweiter Näherung. Da $\delta\nu$ und somit λ nur in η_2 eingeht, können vir λ aus der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\eta_2}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \tag{30}$$

bestimmen.

Zur Berechnung von η_2 als Funktion von λ hat man im Ausdruck von η_2 die Energieterme (15) mit (28) und (29) zu berechnen. Wenn wir statt U_s, U_p, U_k und U_a die von λ unabhängigen Größen

$$W_s = \frac{1}{\lambda} U_s, \quad W_p = \frac{1}{\lambda^2} U_p, \quad W_k = \frac{1}{\lambda^2} U_k, \quad W_a = \frac{1}{\lambda^2} U_a \tag{31}$$

einführen, so erhält man für η_2 als Funktion von λ den einfachen Ausdruck

$$\eta_2 = -W_s \lambda + (W_p + W_k - W_a) \lambda^2. \tag{32}$$

Mit diesem folgt aus (30) für den Variationsparameter der Wert

$$\lambda_0 = \frac{W_s}{2(W_p + W_k - W_a)}. \tag{33}$$

Wenn man diesen Wert von λ in (28) und in (32) einsetzt, so ergibt sich für die Elektronendichte des gestörten Atoms in erster Näherung und für die Störungsenergie zweiter Ordnung

$$\nu' = \left(1 + \lambda_0 \frac{v_s - v_0}{V - V_0}\right)\nu = \left[1 + \frac{W_s}{2\,(W_p + W_k - W_a)} \frac{v_s - v_0}{V - V_0}\right]\nu, \quad (34)$$

$$\eta_2 = -\frac{1}{2}\lambda_0 W_s = -\frac{W_s^2}{4\,(W_p + W_k - W_a)}. \quad (35)$$

Das Korrektionsglied W_a, das aus U_a resultiert, ist in den praktisch wichtigen Fällen klein und kann neben $W_p + W_k$ vernachlässigt werden.

Nach (31) hat man hierzu nur zu zeigen, daß $U_a \ll |U_p + U_k|$ ist. Wenn U_p positiv ist, also U_p und U_k gleiches Vorzeichen haben und sich somit gegenseitig nicht kompensieren, ist dies sofort zu sehen. In den äußeren Gebieten des Atoms ist nämlich $\frac{\partial \chi}{\partial \nu} = \frac{\varepsilon^2}{r}$, es ist also dort $\partial\chi/\partial\nu$ mit dem Fermi-Amaldischen Korrektionsglied $-\frac{1}{N} V_e\, \varepsilon$ identisch. Wenn wir dementsprechend in den äußeren Gebieten des Atoms im Energieausdruck des Atoms χ durch $-\frac{1}{2}\frac{1}{N} V_e \varepsilon \nu$ ersetzen, so kann man in den äußeren Gebieten des Atoms U_a durch $-\frac{1}{N}\frac{1}{2}\varepsilon \int \delta V_e\, \delta\nu\, \mathrm{d}v$ darstellen. Ein Vergleich dieses Ausdrucks mit U_p zeigt, daß die äußeren Gebiete des Atoms für U_a nur den N-ten Teil des Wertes liefern, den diese Gebiete zu U_p beitragen. Ein weniger plausibler, aber immerhin brauchbarer Ansatz für χ in den äußeren Gebieten des Atoms, bei welchem die bezüglich $\partial\chi/\partial\nu$ gestellte Bedingung ebenfalls erfüllt ist, wäre $\chi = \frac{\varepsilon^2}{r}\nu$. Mit diesem würde der Integrand in U_a verschwinden, es würden also dann die äußeren Gebiete des Atoms zu U_a überhaupt nichts beitragen. In den inneren Gebieten des Atoms ist χ bekannt, und zwar ist dort $\chi = n_a \nu^{4/3} - w$, woraus $\frac{\partial^2 \chi}{\partial \nu^2} = \frac{4}{9} n_a \frac{1}{\nu^{2/3}} - \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\nu^2} \sim \frac{4}{9} n_a \frac{1}{\nu^{2/3}}$, also $U_a = \frac{2}{9} n_a \int \frac{1}{\nu^{2/3}} (\delta\nu)^2\, \mathrm{d}v$ folgt. Aus einem Vergleich dieses Ausdrucks mit U_k sieht man, daß die inneren Gebiete des Atoms zu U_a nur einen kleinen Bruchteil des Wertes beitragen, der sich bei der Integration über diese Gebiete für U_k ergibt, denn erstens ist das Größenverhältnis der Faktoren vor den Integralen in U_a und U_k rund 1 : 9 und zweitens ist in den inneren Gebieten des Atoms $\nu \gg 1$. Wenn also U_p positiv ist, so kann man U_a und somit auch W_a vernachlässigen.

5. *Vergleich mit der Wellenmechanik.*

Der Ausdruck für die statistische Störungsenergie erster Ordnung entspricht ganz dem wellenmechanischen, nach welchem die Störungsenergie erster Ordnung der nach der wellenmechanischen Ladungsverteilung gemittelte Wert von v_s ist.

Bei einem Vergleich der statistischen Formeln für die Störungsenergie zweiter Ordnung und der Dichteänderung erster Ordnung mit den entsprechenden wellenmechanischen Formeln wird man die Formeln (34) und (35) des Variationsverfahrens zugrunde legen, da das Variationsverfahren zu geschlossenen Endformeln führt, während dies beim Iterationsverfahren nicht der Fall ist. Wenn man im Falle von η_2 aus der Formel $-\frac{1}{2}\lambda_0 W_s$ ausgeht und beachtet, daß λ_0 eine dimensionslose Konstante von der Größenordnung 1 ist und außerdem im Ausdruck von W_s [man vgl. (31) und (15)] im Nenner von δv [man vgl. den ersten Ausdruck (28)] $\overline{V} - \overline{V}_0$ durch einen von $\mathfrak{r}$ unabhängigen Mittelwert $\frac{1}{\varepsilon} E_M$ ersetzt, so kann man ganz ähnlich wie in einer früheren Arbeit[1]) des Verfassers zeigen, daß η_2 zum entsprechenden wellenmechanischen Ausdruck weitgehend analog ist. Dasselbe läßt sich auch mit Hilfe eines ganz ähnlichen Gedankenganges für die Dichteänderung erster Ordnung zeigen.

6. *Anwendung der Störungsrechnung zur Berechnung von Polarisierbarkeiten.*

Als Anwendung der Störungsrechnung berechnen wir auf Grund des Variationsverfahrens die Polarisierbarkeit der Edelgasatome (mit Ausnahme von He und Rn) und mehrerer Ionen mit edelgasförmiger Elektronenverteilung.

Die Polarisierbarkeit kann man im Zusammenhang mit dem Stark-Effekt zweiter Ordnung definieren. Wenn man ein Atom oder Ion in ein homogenes elektrisches Feld von der Feldstärke $\mathfrak{E}$ bringt, so gibt die dem Stark-Effekt zweiter Ordnung entsprechende Energieänderung der Ausdruck

$$\Delta E = -\tfrac{1}{2}\alpha \mathfrak{E}^2, \tag{36}$$

wo die von $\mathfrak{E}$ unabhängige Konstante α die Polarisierbarkeit bezeichnet.

Zur Berechnung von α müssen wir also die Störungsenergie zweiter Ordnung für ein Atom bzw. Ion in einem homogenen elektrischen Feld

[1]) P. Gombás, ZS. f. Phys. **97**, 633, 1935.

bestimmen. Wenn wir die z-Achse des Koordinatensystems in die Richtung von $\mathfrak{E}$ legen und den Winkel zwischen der z-Achse und dem Ortsvektor mit ϑ bezeichnen, so ist

$$v_s = -|\mathfrak{E}|\, z = -|\mathfrak{E}|\, r\cos\vartheta. \tag{37}$$

Diesen Ausdruck für v_s hat man in (35) einzusetzen. Hierbei treten folgende Vereinfachungen auf, U_p ist positiv, es haben also U_p und U_k gleiches Vorzeichen, so daß man W_a in (35) bzw. (33) neben $W_p + W_k$ vernachlässigen kann, weiterhin ist $v_0 = 0$. Die Rechnungen kann man einfach durchführen; wir gehen hier auf Einzelheiten nicht ein und geben nur die Endformeln an. Man findet

$$\lambda_0 = \frac{J(r_0)}{\dfrac{8\pi\varepsilon^2}{5n_k}\displaystyle\int_0^{r_0} J(r)\, v^{1/3} r\,\mathrm{d}r + \frac{2}{3} J(r_0)}, \tag{38}$$

$$\alpha = \frac{J^2(r_0)}{2\displaystyle\int_0^{r_0} J(r)\, v^{1/3} r\,\mathrm{d}r + \frac{5n_k}{6\pi\varepsilon^2} J(r_0)} \tag{39}$$

mit

$$J(x) = \int_0^x r^4 v^{1/3}\,\mathrm{d}r. \tag{40}$$

r_0 bezeichnet wieder den Grenzradius des Atoms oder Ions, bis zu welchem die Dichteverteilung ausläuft.

Zum Vergleich geben wir eine auf Grund der Wellenmechanik hergeleitete Näherungsformel von Kirkwood[1]) an. Diese lautet

$$\alpha = \frac{4 a_H^3}{9N}(\overline{r^2})^2, \tag{41}$$

wo $\overline{r^2}$ der nach der Elektronenverteilung gemittelte Wert von r^2 ist und a_H den ersten Bohrschen H-Radius bezeichnet. Aus der statistischen Störungsrechnung kann man — wenn man einige Vereinfachungen durchführt — für α einen Ausdruck herleiten, der mit diesem einige Ähnlichkeit zeigt. Man hat hierzu nur den Ausdruck (28) in der Weise zu vereinfachen, daß man im Nenner statt $\overline{V} - \overline{V}_0$ überall einen von r unabhängigen Mittelwert einführt. Mit diesem vereinfachten δv erhält man für α einen Ausdruck, der ganz ähnlich wie (41) im Zähler $(\overline{r^2})^2$ enthält.

Die numerischen Resultate, zu denen die Formel (39) für α führt, sind zusammen mit den Werten für λ_0 in der Tabelle 1 zusammengestellt.

[1]) J. G. Kirkwood, Phys. ZS. 33, 57, 1932.

Zum Vergleich sind auch die von Fajans und Joos festgestellten empirischen Werte[1]) angeführt. Außerdem haben wir zu einem weiteren Vergleich für Ne, Ar, Kr und X auch die α-Werte angegeben, die man aus der Kirkwoodschen Formel (41) erhält, wenn man $\overline{r^2}$ mit Hilfe des hier zugrunde gelegten statistischen Modells berechnet.

Tabelle 1. Vergleich der berechneten Polarisierbarkeiten mit den empirischen Werten von Fajans und Joos und mit den Werten der Kirkwoodschen Formel. α in 10^{-24} cm^3-Einheiten.

		F^-	Cl^-	Br^-	J^-
α	Hier berechnet	6,20	7,10	8,41	9,21
	Nach Fajans und Joos	0,98	3,53	4,97	7,55
λ_0		0,591	0,547	0,512	0,488

		Ne	Ar	Kr	X
α	Hier berechnet	2,01	2,88	4,00	4,61
	Nach Fajans und Joos	0,392	1,65	2,50	4,10
	Nach Kirkwood	1,76	2,62	3,77	4,39
λ_0		0,711	0,639	0,582	0,546

		Na^+	K^+	Rb^+	Cs^+
α	Hier berechnet	0,850	1,36	2,14	2,66
	Nach Fajans und Joos	0,196	0,88	1,56	2,56
λ_0		0,798	0,715	0,636	0,593

		Mg^{++}	Ca^{++}	Sr^{++}	Ba^{++}
α	Hier berechnet	0,400	0,721	1,30	1,70
	Nach Fajans und Joos	0,12	0,51	0,86	1,68
λ_0		0,876	0,780	0,679	0,633

Wie aus der Tabelle 1 zu sehen ist, stimmen die von uns berechneten α-Werte bei den schweren Atomen und Ionen mit den empirischen befriedigend überein. Bei den leichten Atomen und Ionen ist die Übereinstimmung schlecht, wie dies ja auch nicht anders zu erwarten ist, denn in die Formel (39) geht das Quadrat des Integrals $J(r_0)$ ein, zu welchem den wesentlichen Beitrag die äußeren Gebiete des Atoms liefern. Der Wert von α hängt also in hohem Maße von der Dichteverteilung in den Randgebieten des Atoms bzw Ions ab. Da die statistische Verteilung in den äußeren Gebieten leichter Atome und Ionen nur eine rohe Approximation der wahren gibt, kann man für diese Elemente auch keine bessere Übereinstimmung mit der Erfahrung

[1]) K. Fajans u. G. Joos, ZS. f. Phys. **23**, 1, 1924; man vgl. auch Geiger-Scheels Handb. d. Phys., 2. Aufl., Bd. XXIV/2, S. 942. Berlin, Springer, 1933.

erwarten. Die aus der Kirkwoodschen Formel berechneten Polarisierbarkeiten stimmen mit den aus der Formel (39) berechneten auch für die leichten Atome gut überein.

Aus der guten Übereinstimmung der aus der Formel (39) berechneten α-Werte mit den empirischen für schwere Atome und Ionen kann man folgern, daß die Elektronenverteilung der statistischen Atom- und Ionmodelle im Falle schwerer Atome und Ionen die wahre Verteilung auch in den äußeren Gebieten der Atome und Ionen gut annähert.

Zur Prüfung des Ansatzes (28) für $\delta \nu$ haben wir versuchsweise die Polarisierbarkeit auch noch mit anderen Ansätzen berechnet, die sich von (28) darin unterscheiden, daß im Nenner statt $\overline{V} - \overline{V}_0$ die mittlere potentielle Energie bzw. die mittlere Gesamtenergie eines herausgegriffenen Elektrons gesetzt wurde. Diese Ansätze führten für die Polarisierbarkeit zu Werten, die sich von den mit dem Ansatz (28) erhaltenen nur sehr wenig unterscheiden, was man als eine weitere Stütze des Variationsverfahrens mit dem Ansatz (28) betrachten kann.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß ein Ansatz für die gestörte Dichte von der einfachen Form $\nu' = [1 + \lambda (v_s - v_0)]\, \nu$ mit $v_0 = \frac{1}{N} \int v_s \nu \, \mathrm{d}\, v$ im allgemeinen nicht brauchbar ist; für die Polarisierbarkeit würde man mit diesem viel zu kleine Werte (z. B. bei X einen um eine Größenordnung kleineren Wert) erhalten. Dies ist darauf zurückzuführen, daß dieser einfache Ansatz dem Umstand, daß durch die Störung im allgemeinen die äußeren, schwach gebundenen Gebiete des Atoms am stärksten deformiert werden, nicht Rechnung trägt. Im Ansatz (28) wird dieser Umstand dadurch berücksichtigt, daß im Nenner von $\delta \nu$ der Ausdruck $\overline{V} - \overline{V}_0$ steht, der mit wachsender Entfernung vom Kern rasch abnimmt.

Zusammenfassend kann man also feststellen, daß die statistische Theorie des Atoms, ohne den Rahmen der statistischen Theorie zu überschreiten und ohne Zuhilfenahme empirischer oder halbempirischer Konstanten, eine befriedigende Erklärung der Polarisierbarkeit von Atomen und Ionen zu geben imstande ist.

Auf weitere Anwendungen der hier entwickelten Störungsrechnung, so z. B. auf die Berechnung der Bindung und der elektrischen Momente der Hydrogenhalogenidmoleküle, kommen wir bei einer anderen Gelegenheit zurück.

Kolozsvár (Ungarn), Institut für theoretische Physik der Universität, August 1943.

(Mitteilung aus dem Laboratorium der Telefunken-Gesellschaft, Berlin.)

Elastische Eigenschwingungen eines rechtwinkligen Quarzparallelepipeds.

Von **R. Bechmann** in Berlin.

Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 30. August 1943.)

In Fortsetzung der Untersuchungen über die Eigenschwingungen von Quarzplatten werden im folgenden die Eigenfrequenzen eines rechtwinkligen Quarzparallelepipeds von quadratischer Grundfläche mit zu den Hauptachsen parallelen Kanten in Abhängigkeit von dem Kantenverhältnis einschließlich der Grenzfälle der unendlich dünnen Platte mit endlicher Kantenlänge bzw. der unendlich ausgedehnten Platte mit endlicher Dicke, des unendlich dünnen Stabes und des speziellen Falles des Würfels untersucht. Die experimentellen und aus der Theorie folgenden Ergebnisse stimmen für die vorwiegend longitudinalen Freiheitsgrade gut überein; um bei den transversalen Freiheitsgraden eine Übereinstimmung zu erzielen, ist bei den entsprechenden Gliedern eine bereits früher eingeführte Korrektur hinzuzufügen. Bei dem würfelförmigen Körper treten auch bei den longitudinalen Freiheitsgraden Abweichungen von der Theorie auf. Die Zusammensetzung der bei den verschiedenen Schwingungen auftretenden Gesamtdeformationen aus den einzelnen Deformationsarten wird untersucht und eine Zuordnung der Eigenschwingungen zu den Bewegungsvorgängen gegeben.

In Fortsetzung der durch eine Lösung für die elastischen Schwingungen eines anisotropen Körpers[1]) angeregten Untersuchungen über Längsschwingungen quadratischer und rechteckiger Quarzplatten[2])[3]) betrachten wir im folgenden die Eigenschwingungen eines rechtwinkligen Quarzparallelepipeds. Bereits früher gab Ortvay[4]) im Anschluß an eine Darstellung von Sommerfeld für die elastischen Schwingungen eines isotropen Körpers, die unter Annahme spezieller Grenzbedingungen, wonach entweder die normalen Verrückungen und die tangentialen Spannungen oder die tangentialen Verrückungen und die normalen Spannungen verschwinden, gewonnen wurde, eine Lösung der elastischen Grundgleichungen für kristalline Würfel des rhombischen, tetragonalen, hexagonalen und kubischen Systems, für die, sofern als Koordinatenachsen die Symmetrieachsen gewählt werden, die Elastizitätskoeffizienten s_{ik}, $i = 1, 2, 3$, $k = 4, 5, 6$ und $i \neq k = 4, 5, 6$

[1]) R. Bechmann, ZS. f. Phys. **117**, 180, 1941 (im Text mit I bezeichnet). — [2]) R. Bechmann, ebenda **118**, 515, 1942 (im Text mit II bezeichnet). — [3]) R. Bechmann, ebenda **120**, 107, 1942 (im Text mit III bezeichnet). — [4]) R. Ortvay, Ann. d. Phys. (IV) **42**, 753, 1913. (Diese Arbeit kam mir erst nach Veröffentlichung von I zur Kenntnis.)

und die entsprechenden Elastizitätsmoduln c_{ik} verschwinden. Die Verrückungen sind durch das Produkt dreier trigonometrischer Funktionen dargestellt. Diese Lösung läßt sich auch auf ein rechtwinkliges Parallelepiped erweitern, indessen besitzt sie zwei Einschränkungen, eine auf spezielle Kristallklassen, ferner eine auf spezielle Grenzbedingungen. Die in der Arbeit von Ortvay unter den gemachten Voraussetzungen abgeleiteten Frequenzgleichungen (8) bzw. (56) für den Würfel aus isotropem bzw. kristallinem Material der angegebenen Klassen ist von 3. Ordnung in ω^2. Diese Frequenzgleichung ist identisch mit der in (I, 30) angegebenen Frequenzgleichung für Dickenschwingungen einer unendlich ausgedehnten Platte, sofern diese auf das entsprechende kristalline Material spezialisiert wird. Die in (I) angegebene Frequenzgleichung für den Würfel ist von 6. Ordnung in ω^2. Der Grenzübergang der Ortvayschen Lösung zu dünnen Platten führt zu einer quadratischen Frequenzgleichung, während durch die experimentellen Ergebnisse die in (I) und (II) angegebene Frequenzgleichung 3. Ordnung hierfür sichergestellt ist. Um die Lösung der Frequenzgleichung für die elastischen Schwingungen experimentell mittels piezoelektrischer Erregung prüfen zu können, eine Möglichkeit, die früher noch nicht bestand, ist jedoch die Integration der Bewegungsgleichung für kräftefreie Oberflächen erforderlich. Die von uns gegebene Lösung für das rechtwinklige anisotrope Parallelepiped ist frei von diesen beiden genannten Einschränkungen. Die Verrückungen sind ebenfalls durch das Produkt dreier trigonometrischer Funktionen dargestellt.

Wir betrachten im folgenden die Eigenschwingungen eines Parallelepipeds aus Quarzkristall mit zu den Hauptachsen parallelen Kanten, und zwar einmal diejenigen eines flachen Körpers, etwa einer Platte, ferner diejenigen eines gestreckten Körpers, etwa eines Stabes in Abhängigkeit von dem Kantenverhältnis einschließlich der Grenzfälle der unendlich dünnen Platte mit endlicher Kantenlänge bzw. der unendlich ausgedehnten Platte mit endlicher Dicke, des unendlich dünnen Stabes und des speziellen Falles des Würfels. Im ersten Fall lassen wir, vom Würfel ausgehend, zwei Dimensionen unverändert und verringern die dritte Dimension. Dabei spalten sich in Abhängigkeit von dem Verhältnis der geänderten zu den beiden ungeänderten Dimensionen die Eigenschwingungen der Platte in zwei Gruppen, in Dickenschwingungen und Längsschwingungen. Im zweiten Fall lassen wir eine Dimension des Würfels ungeändert und verringern die beiden anderen Dimensionen in derselben Weise. Auch hierbei spalten sich die Eigen-

schwingungen in Abhängigkeit von dem Format in zwei Gruppen, die man zweckmäßig nach Giebe und Scheibe[1]) mit axialen und lateralen Schwingungen bezeichnet. Die axialen Schwingungen bezeichnet man auch als die Längsschwingungen oder Dehnungsschwingungen des Stabes. Diese beiden Übergänge können den drei Dimensionen entsprechend in dreifacher Weise erfolgen. Die dabei auftretenden Erscheinungen sind bei kristallinem Material voneinander verschieden. Der Frequenzverlauf beim Übergang vom Quarzwürfel zur dünnen Platte wurde im hiesigen Laboratorium bereits vorläufig von Herrn Krones experimentell untersucht[2]). Die Messungen wurden wiederholt und erweitert. Im folgenden werden ferner Betrachtungen über die Zusammensetzung der bei den verschiedenen Schwingungen auftretenden Gesamtdeformationen aus den einzelnen Deformationsarten durchgeführt, die erst eine Zuordnung der Eigenschwingungen zu den Bewegungsvorgängen ermöglichen.

1. Frequenzgleichung des Parallelepipeds.

Die Frequenzgleichung für ein parallel zu den Hauptachsen des natürlichen Kristallsystems geschnittenes Parallelepiped aus beliebigem kristallinem Material lautet nach Gl. (I, 15)

$$\begin{vmatrix} s_{11}-\frac{k_1^2}{\varrho\omega^2} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22}-\frac{k_2^2}{\varrho\omega^2} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33}-\frac{k_3^2}{\varrho\omega^2} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44}-\frac{k_2^2+k_3^2}{\varrho\omega^2} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55}-\frac{k_3^2+k_1^2}{\varrho\omega^2} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66}-\frac{k_1^2+k_2^2}{\varrho\omega^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Darin bedeuten wieder $k_1 = \frac{n_1\pi}{l_x}$, $k_2 = \frac{n_2\pi}{l_y}$, $k_3 = \frac{n_3\pi}{l_z}$, l_x, l_y, l_z die Kantenlängen parallel zu den Achsen, ϱ die Dichte, $\omega = 2\pi\nu$ die Kreisfrequenz.

Durch Gl. (1) sind die Beiträge der Spannungen $X_x\ Y_y \ldots X_y$ zu den bei den Schwingungsvorgängen auftretenden Gesamtspannungen

[1]) E. Giebe u. A. Scheibe, Ann. d. Phys. (V) 9, 93, 1931. — [2]) F. Krones, Diss. Wien 1943.

bestimmt. Bezeichnet man nach (I, 13) die Amplituden der Spannungskomponenten $X_x\, Y_y \ldots X_y$ mit $A_1\, A_2 \ldots A_6$ (früher $E, H, Z, \Xi_1, \Xi_2, \Xi_3$), so verhalten sich für jede Wurzel von (1) die zugehörigen Größen $A_1, A_2 \ldots A_6$ wie die Minoren einer Zeile der Determinante (1). Die Amplituden der Deformationskomponenten $x_x, y_y \ldots x_y$, die mit $a_1 a_2 \ldots a_6$ (früher $A\,B\,C\,S_1\,S_2\,S_3$) bezeichnet seien, ergeben sich aus den Größen $A_1 A_2 \ldots A_6$ nach (I, 22) mittels der Beziehungen

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{k_1^2}{\varrho\,\omega^2} A_1, \qquad a_2 = -\frac{k_2^2}{\varrho\,\omega^2} A_2, \qquad a_3 = -\frac{k_3^2}{\varrho\,\omega^2} A_3, \\ a_4 &= -\frac{k_2^2 + k_3^2}{\varrho\,\omega^2} A_4, \quad a_5 = -\frac{k_3^2 + k_1^2}{\varrho\,\omega^2} A_5, \quad a_6 = -\frac{k_1^2 + k_2^2}{\varrho\,\omega^2} A_6. \end{aligned} \tag{2}$$

Zu den in (I) und (III) angestellten Betrachtungen sei noch kurz folgendes nachgetragen. Die Gl. (1) liefert streng die Lösung für die beiden Grenzfälle der Dickenschwingungen der unendlich großen Platte und der Axialschwingungen des unendlich dünnen Stabes. Für den unendlich großen Stab werden bekanntlich alle Spannungskomponenten bis auf diejenige parallel zur Stabachse Null, was auch aus (III) folgt. Legen wir den Stab in die Z-Achse, so wird demnach für $k_1 = k_2 \to \infty$

$$A_1 = A_2 = A_4 = A_5 = A_6 = 0, \quad A_3 \neq 0, \tag{3}$$

dagegen bleiben die Deformationskomponenten endlich, und zwar ist nach (III) oder unmittelbar nach dem allgemeinen Hookeschen Gesetz

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 : a_6 = s_{13} : s_{23} : s_{33} : s_{43} : s_{53} : s_{63}. \tag{4}$$

Umgekehrt liegen die Verhältnisse bei den Dickenschwingungen der unendlich großen Platte bzw. bei dem Ausbreitungsvorgang ebener Wellen. Hierfür ergibt eine einfache Determinantenumformung, die wir hier nicht ausführen, für das Verhältnis der Spannungskomponenten, falls die Plattennormale bzw. die Wellenfortpflanzungsrichtung mit der Z-Achse zusammenfällt, wodurch $k_1 = k_2 = 0$ zu setzen ist:

$$A_1 \ldots : A_i \ldots : A_6 = \begin{vmatrix} c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{34} & c_{44} - \frac{\varrho\,\omega^2}{k_3^2} & c_{45} \\ c_{35} & c_{45} & c_{55} - \frac{\varrho\,\omega^2}{k_3^2} \end{vmatrix}$$

$$\ldots : \begin{vmatrix} c_{i3} & c_{i4} & c_{i5} \\ c_{34} & c_{44} - \frac{\varrho\,\omega^2}{k_3^2} & c_{45} \\ c_{35} & c_{45} & c_{55} - \frac{\varrho\,\omega^2}{k_3^2} \end{vmatrix} \ldots : \begin{vmatrix} c_{63} & c_{64} & c_{65} \\ c_{34} & c_{44} - \frac{\varrho\,\omega^2}{k_3^2} & c_{45} \\ c_{35} & c_{45} & c_{55} - \frac{\varrho\,\omega^2}{k_3^2} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

wobei für ω^2 die jeweilige der drei Wurzeln der durch $k_1 = k_2 = 0$ spezialisierten Gl. (1) einzuführen ist, d. h. auch die in die Plattenebene fallenden Spannungskomponenten $X_x Y_y X_y$ sind endlich, dagegen verschwinden nach (2) die in die Plattenebene fallenden Deformationskomponenten $x_x y_y x_y$, es wird

$$a_1 = a_2 = a_6 = 0$$

$$a_3 : a_4 : a_5 = \begin{vmatrix} c_{44} - \frac{\varrho\omega^2}{k_3^2} & c_{45} \\ c_{45} & c_{55} - \frac{\varrho\omega^2}{k_3^2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{34} & c_{45} \\ c_{35} & c_{55} - \frac{\varrho\omega^2}{k_3^2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{34} & c_{44} - \frac{\varrho\omega^2}{k_3^2} \\ c_{35} & c_{45} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Bei den Dickenschwingungen der unendlich großen Platte bzw. bei dem Ausbreitungsvorgang ebener Wellen treten Querkontraktions- und Querscherungseffekte nicht auf.

Für $k_1 = k_2 = k_3 = k$ stellt Gl. (1) die Frequenzgleichung des Würfels dar. In diesem Fall ist Gl. (1) gegen beliebige Drehung des Koordinatensystems invariant, eine allgemeine Eigenschaft der durch diese Gleichung dargestellten Transformation eines Tensors vierter Ordnung. Die Koeffizienten dieser Gleichung sechster Ordnung sind Invarianten, die einfache und für manche Rechnungen wertvolle Beziehungen zwischen den auf die Hauptachsen bezogenen Elastizitätskoeffizienten s_{ik} und den auf beliebige Achsen bezogenen Koeffizienten s'_{ik} liefern. Dies bedeutet, daß nach dem vorliegenden Ansatz die sechs Eigenfrequenzen eines kristallinen Würfels, sofern sie sich als Lösung von Gl. (1) darstellen, unabhängig von der Lage zu den Achsen sind. Messungen an verschieden orientierten Quarzwürfeln haben ergeben, daß dies jedoch nicht der Fall ist. Um zu einer angenäherten Darstellung des experimentellen Befundes zu gelangen, führen wir wieder eine empirische Korrektur in den Scherungsgliedern ein, wodurch die Eigenschaft der räumlichen Invarianz der Lösung verlorengeht.

Für Quarzkristall lautet das Schema der auf die Hauptachsen bezogenen Elastizitätskoeffizienten

$$\begin{array}{ccccccc} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{13} & -s_{14} & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ s_{66} = 2(s_{11} - s_{12}) & & & & s_{44} & 2s_{14} \\ & & & & & s_{66} \end{array} \quad (7)$$

Dies besagt, daß bei Quarz die Spannungskomponenten $X_x Y_y Z_z$ durch die Elastizitätskoeffizienten s_{12} und s_{13} miteinander in Wechselwirkung

stehen, ferner sind die Spannungen X_x und Y_y mit Y_z durch den Koeffizienten s_{14} gekoppelt. Die Gl. (1) zerfällt für Quarz durch Einführung des Schemas (7) in eine Gleichung vierten Grades und eine Gleichung zweiten Grades.

Die piezoelektrische Anregbarkeit der einzelnen Deformationskomponenten des betrachteten Quarzparallelepipeds ist durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} x_x &= d_{11}E_x & z_x &= -d_{14}E_y \\ y_y &= -d_{11}E_x & x_y &= -2d_{11}E_y \\ y_z &= d_{14}E_x \end{aligned} \qquad (8)$$

gegeben, wobei E_x bzw. E_y die zu der X- bzw. Y-Achse parallelen Komponenten der elektrischen Feldstärke bedeuten. Die Deformation z_z ist piezoelektrisch nicht anregbar.

2. *Platte* $P_{00,\,00,\,0^0} = Z_{0^0}$.

Die Grundfrequenzen eines rechtwinkligen Parallelepipeds aus Quarz mit einer in der XY-Ebene gelegenen quadratischen Grundfläche von den Kantenlängen $l_x = l_y = l$ und einer zur Z-Achse parallelen Höhe l_z berechnen sich als Wurzeln der mittels des Schemas (7) spezialisierten Gl. (1), falls man darin $k_1 = k_2 = k = \frac{\pi}{l}$, $k_3 = \frac{\pi}{l_z}$ und zur Abkürzung $\frac{k}{k_3} = \frac{l_z}{l} = \alpha$ für das als veränderliche Größe betrachtete Kantenverhältnis einführt. Damit läßt sich Gl. (1) durch eine einfache Rechnung als Produkt dreier quadratischer Gleichungen

$$\begin{vmatrix} s_{11}+s_{12}-\frac{k^2}{\varrho\omega^2} & 2s_{13} \\ s_{13} & s_{33}-\frac{k^2}{\varrho\omega^2}\frac{1}{\alpha^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} s_{11}-s_{12}-\frac{k^2}{\varrho\omega^2} & 2s_{14} \\ s_{14} & s_{44}-\frac{k^2a^2}{\varrho\omega^2}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right) \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} s_{44}-\frac{k^2a^2}{\varrho\omega^2}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right) & 2s_{14} \\ 2s_{14} & s_{66}-\frac{2k^2a^2}{\varrho\omega^2} \end{vmatrix} = 0 \qquad (9\,\text{a, b, c})$$

darstellen. Die die Scherungsbewegungen darstellenden Glieder der beiden letzten Gleichungen sind wieder durch den empirisch eingeführten Faktor a^2 erweitert. Gl. (9a) verknüpft, wie sich bei der Aufspaltung der Gleichung vierten Grades in zwei quadratische Gleichungen durch Zusammenfassung der ersten beiden Zeilen bzw. Spalten ergibt, die Summe der beiden Spannungskomponenten $X_x + Y_y$ mit Z_z, wobei $X_x = Y_y$ ist; Gl. (9b) setzt die Differenzen der beiden

Spannungen $X_x - Y_y$ mit Y_z in Beziehung, wobei $X_x = -Y_y$ ist. Jede der drei Gleichungen liefert für $\alpha < 1$ die Eigenfrequenz einer Dicken- und einer Längsschwingung der Platte in Abhängigkeit von der als veränderlich betrachteten Größe α. Für den Wert $\alpha = 1$ geben die Gl. (9) die Eigenfrequenzen des Würfels, für $\alpha > 1$ stellt eine Wurzel von Gl. (9a) die Axialschwingung des Stabes dar. Gl. (9a) beschreibt nur longitudinale Vorgänge.

Im Grenzfall der unendlich dünnen Platte mit endlichen Kantenlängen $l = \text{endl.}$, $l_z = 0$, $k = \frac{\pi}{l_x}$, $k_3 \to \infty$ erhält man aus Gl. (9) für $\alpha = 0$ die Frequenzgleichungen der Längsschwingungen der quadratischen Platte

$$s_{11} + s_{12} - \frac{k^2}{\varrho\,\omega^2} = 0, \quad s_{11} - s_{12} - \frac{k^2}{\varrho\,\omega^2} = 0, \quad s_{66} - \frac{2k^2a^2}{\varrho\,\omega^2} = 0 \qquad (10)$$

in Übereinstimmung mit (II, 6 bzw. 21).

Im Grenzfall der dünnen unendlich großen Platte, für die wir $l \to \infty$, $l_z = \text{endl.}$, $k = 0$, $k_3 = \frac{k}{\alpha} = \frac{\pi}{l_z}$, d. h. $\alpha = 0$ setzen, ergibt sich aus Gl. (9) nach einer bekannten Umrechnung zwischen den c_{ik} und s_{ik}

$$c_{33} - \frac{\varrho\,\omega^2}{k_3^2} = 0, \quad c_{44} - \frac{\varrho\,\omega^2}{k_3^2\,a^2} = 0. \qquad (11)$$

Während die erste Gleichung die Eigenfrequenz der longitudinalen Dickenschwingung unendlicher großer Platten richtig wiedergibt, tritt bei der zweiten Gleichung für die Scherungsdickenschwingung der Faktor a^2 auf, der hier den Wert 1 annehmen muß, d. h. der Verlauf der Eigenfrequenz der transversalen Dickenschwingung in Abhängigkeit von Plattendicke zu Plattenkante wird durch Gl. (9) infolge der Korrektur a nicht richtig wiedergegeben.

Im Grenzfall des unendlich dünnen Stabes endlicher Länge gibt Gl. (9a) für $l = 0$, $l_z = \text{endl.}$, $k \to \infty$, $k_3 = \frac{k}{\alpha} = \frac{\pi}{l_z}$, d. h. $\alpha \to \infty$ die Frequenzgleichung der longitudinalen Axialschwingung

$$s_{33} - \frac{k_3^2}{\varrho\,\omega^2} = 0 \qquad (12)$$

in Übereinstimmung mit (I, 24), während die Gl. (9b) und (9c) keine endlichen Eigenfrequenzen liefern.

Im Grenzfall des unendlich langen Stabes mit endlichem Querschnitt schließlich ergibt sich für $l = \text{endl.}$, $l_z \to \infty$, $k = \text{endl.}$, $k_3 = 0$,

d. h. $\alpha \to \infty$ nach einer einfachen Umformung für die fünf lateralen Eigenschwingungen

$$\left.\begin{aligned} c_{11} + c_{12} - \frac{\varrho\omega^2}{k^2} &= 0, \\ \begin{vmatrix} c_{11} - c_{12} - \frac{\varrho\omega^2}{k^2} & c_{14} \\ 2c_{14} & c_{44} - \frac{\varrho\omega^2}{k^2 a^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{44} - \frac{\varrho\omega^2}{k^2 a^2} & c_{14} \\ c_{14} & c_{66} - \frac{\varrho\omega^2}{2k^2 a^2} \end{vmatrix} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

wobei wir einheitlich außer der linearen auch die beiden quadratischen Gleichungen in c_{ik} schreiben.

Für das Verhältnis der Amplituden der Deformationskomponenten $x_x, y_y \ldots x_y$ erhält man unter Berücksichtigung der Beziehungen (2) gemäß dem früheren aus Gl. (9a)

$$(a_1 + a_2) : a_3 = \left(s_{33} - \frac{k^2}{\varrho\omega^2}\frac{1}{\alpha^2}\right) : -\frac{s_{13}}{\alpha^2}, \quad (14a)$$

wobei $a_1 = a_2$ ist, aus (9b)

$$(a_1 - a_2) : a_4 = \left(s_{44} - \frac{k^2 a^2}{\varrho\omega^2}\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)\right) : -s_{14}\, a^2\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right), \quad (14b)$$

wobei $a_1 = -a_2$ ist, aus (9c)

$$a_5 : a_6 = \left(s_{66} - \frac{2k^2 a^2}{\varrho\omega^2}\right)\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) : -4\, s_{14}. \quad (14c)$$

Die als Funktion von α in dem Bereich von 0 bis 1 mit den in (II, S. 523) angegebenen Werten für die Elastizitätskoeffizienten s_{ik} unter Berücksichtigung des ebenfalls in (II) für quadratische Platten ermittelten Korrektionswertes $a = 0{,}877$ numerisch berechneten Wurzeln der drei Gln. (9a, b, c) bzw. die daraus gebildeten Schwingungskoeffizienten $N_i = \nu_i l$ $(i = 1, 2 \ldots 6)$ sind in Fig. 1 eingetragen (ausgezogene Kurven), wobei N_1, N_2 die Wurzeln von Gl. (9a), N_3, N_4, diejenigen von Gl. (9b), N_5, N_6 die Wurzeln von Gl. (9c) bedeuten. Man erkennt in Fig. 1 die beiden Gruppen von Eigenschwingungen, die Längsschwingungen N_1, N_3, N_5 mit ihrem von α nur wenig abhängigen Verlauf und die Dickenschwingungen N_2, N_4, N_6 mit dem ansteigenden Verlauf, der für die unendlich dünne Platte im Grenzfall $\alpha = 0$ dem Wert unendlich zustrebt, ein Gang, der davon herrührt, daß wir die Schwingungskoeffizienten auf die Längskante und nicht in der üblichen Weise auf die frequenzbestimmende Plattendicke beziehen. Die mit der Plattendicke gebildeten Schwingungskoeffizienten der drei Dickenschwingungen gehen aus diesen durch Multiplikation mit α

hervor, für $\alpha = 0$ bleiben deren Werte endlich. Die aus Gl. (14a, b) berechneten Amplitudenverhältnisse der Bewegungsanteile der Schwingungen I bis IV, wobei diese Ziffern die Nummern der Wurzeln bezeichnen, sind in Fig. 2 dargestellt, sie zeigen die Zusammensetzung der Gesamtdeformation aus den einzelnen Deformationen und ihre Änderung in Abhängigkeit von α. Bei den Dickenschwingungen N_2, N_4 verringert sich mit abnehmendem Wert von α der Einfluß der Längsschwingungen auf diese, im Grenzfall $\alpha = 0$ wird er Null in Übereinstimmung mit dem Verschwinden des Einflusses der Querkontraktion bei der unendlich großen Platte. Die Amplitudenverhältnisse der Längsschwingungen I und III streben für $\alpha = 0$ den Grenzwerten

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{2 s_{13}}{s_{11} + s_{12}}, \qquad \frac{a_4}{a_1} = \frac{2 s_{14}}{s_{11} - s_{12}}$$

zu. Die aus den gemessenen Werten der Eigenfrequenzen gebildeten Schwingungskoeffizienten sind in Fig. 1 eingetragen, und zwar sind mit Kreisen die durch das Feld E_x, mit Kreuzen die durch das Feld E_y angeregten Schwingungen bezeichnet. Bei den Messungen wurde in allen Fällen von Würfeln, deren Kantenlängen 10 mm betrugen, ausgegangen. Die Messungen wurden wieder mittels der in (II) beschriebenen Methode durchgeführt. Der experimentelle Befund bestätigt die durch die Ausdrücke (8) gegebenen Anregungsbedingungen. Die Übereinstimmung

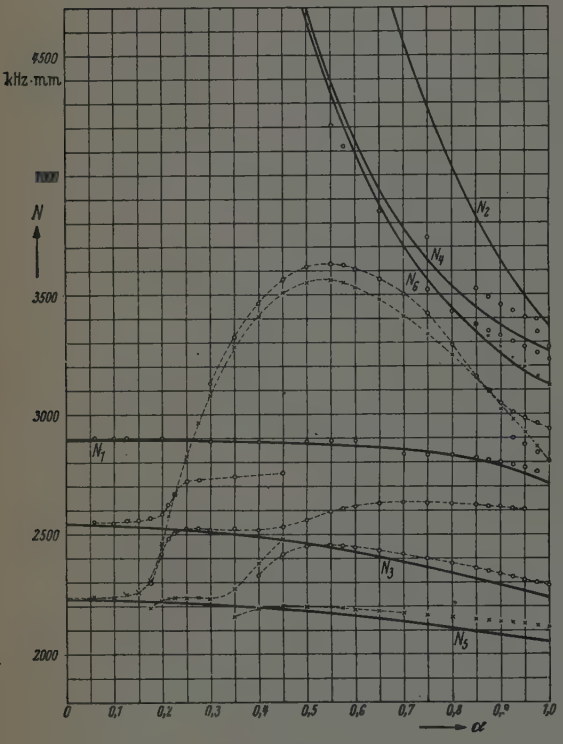


Fig. 1.
Schwingungskoeffizienten der Eigenschwingungen der Z-Platte in Abhängigkeit vom Kantenverhältnis $l_z/l = \alpha$ im Bereich von 0 bis 1, bezogen auf die Kantenlänge l.

stimmung zwischen Rechnung und Messung ist bei den drei Längsschwingungen N_1, N_3, N_5 befriedigend. Bei den Schwingungen III und V treten in Abhängigkeit von α Kopplungserscheinungen auf. Die durch die Deformationen $x_x = y_y$ und z_z bestimmte Schwingung I und die vorwiegend durch die Deformation x_y gegebene Schwingung V erregen sich sehr kräftig. Die Scherungsschwingungen IV und VI zeigen in Abhängigkeit von α ein von der Rechnung völlig abweichendes Verhalten, und zwar besitzen sie einen Verlauf, wie er ähnlich bei den Scherungslängsschwingungen rechteckiger Platten in Abhängigkeit von dem Verhältnis Breite zu Länge durch die Kopplung der zweiten Harmonischen der Biegungsschwingung mit der entsprechenden Scherungsbewegung hervorgerufen wird (III). Im vorliegenden Fall dürfte der Gang durch einen ähnlichen Vorgang zustande kommen. In der Nähe von $\alpha = 1$ (s. Abschnitt 4) ist für diese beiden Schwingungen eine eindeutige Zuordnung der Meßergebnisse zu den aus der Rechnung folgenden Ergebnissen nicht möglich. Für die dünne Platte, d. h. für kleine Werte von α ($\sim < 0{,}5$) sind die beiden Scherungsdickenschwingungen IV und VI, die durch die Deformationen $\frac{\partial v}{\partial z}$ bzw. $\frac{\partial w}{\partial z}$ gegeben sind und deren Schwingungskoeffizienten für $\alpha = 0$ zusammenfallen, durch ein Feld E_z nicht anregbar, während für größere Werte von α ($\sim > 0{,}5$) die Deformationsanteile $\frac{\partial w}{\partial y}$ von IV und $\frac{\partial w}{\partial x}$ von VI, die mit den Biegungsvorgängen gekoppelt sind, durch ein Feld E_x bzw. E_y anregbar sind und zu dem beobachteten, in Fig. 1 dargestellten Verlauf führen. Die durch z_z bestimmte Dickenschwingung II ist in Übereinstimmung mit (8) nicht anregbar.

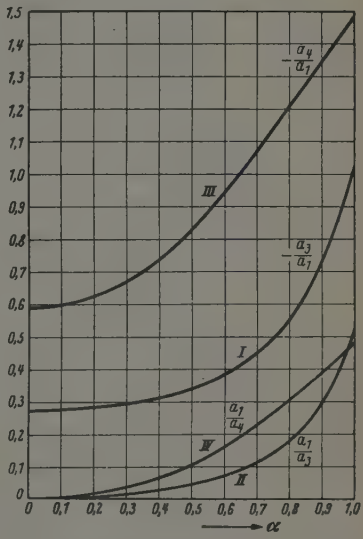


Fig. 2. Amplitudenverhältnisse der Deformationen der Z-Platte in Abhängigkeit von α im Bereich von 0 bis 1.

3. *Platte* $P_{0^\circ,\,90^\circ,\,0^\circ} = X_{90^\circ,\,0^\circ}$.

Als zweites Beispiel betrachten wir den bei dem Übergang vom Würfel zu einer quadratischen Platte mit zu der X- und Z-Achse parallelen Kanten

auftretenden Frequenzverlauf. In diesem Fall, bei dem die Plattendicke l_x geändert wird, ist in Gl. (1) $k_2 = k_3 = k = \frac{\pi}{l}$ und $k_1 = \frac{\pi}{l_x}$ zu setzen. Zur Abkürzung sei $\frac{k}{k_1} = \frac{l_x}{l} = \alpha$ für das Kantenverhältnis eingeführt. In den Scherungsgliedern sei wieder die Korrektur a^2 hinzugefügt. Gl. (1) zerfällt unter Beachtung des Schemas (7) in eine Gleichung vierten Grades, die die Spannungskomponenten $X_x Y_y Z_z$ und Y_z miteinander verknüpft, und eine quadratische, die Spannungen Z_x und X_y miteinander in Beziehung setzende Gleichung. Auf eine explizite Wiedergabe dieser beiden Gleichungen sei verzichtet. Die veränderliche Größe α tritt in dem ersten Diagonalglied der Gleichung vierten Grades und in dem zweiten Diagonalglied der quadratischen Gleichung auf. Die aus den in Abhängigkeit von α im Bereich von 0 bis 1 berechneten Wurzeln beider Gleichungen gebildeten, auf die unveränderte Kantenlänge $l_y = l_z = l$ bezogenen Schwingungskoeffizienten $N_i = \nu_i l$ sind in Fig. 3 angegeben (ausgezogene Kurven). Die Wurzeln der Gleichung vierten Grades sind mit $N_1 \ldots N_4$, diejenigen der quadratischen Gleichung mit N_5, N_6 bezeichnet, wobei die Bezeichnung der Wurzeln so gewählt ist, daß für den Würfel $\alpha = 1$ eine Übereinstimmung mit der vorher gegebenen Zuordnung besteht. Die berechneten Amplitudenverhältnisse der Deformationen der Schwingungen I bis IV, die sich

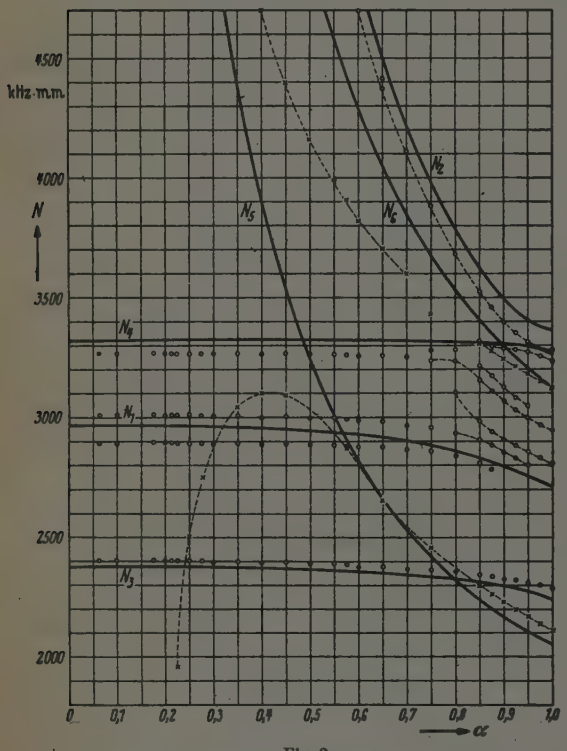


Fig. 3.
Schwingungskoeffizienten der Eigenschwingungen der X-Platte in Abhängigkeit vom Kantenverhältnis $l_x/l = \alpha$ im Bereich von 0 bis 1, bezogen auf die Kantenlänge l.

unter Berücksichtigung von (2) als Minoren der Gleichung vierten Grades ergeben, bezogen auf den Hauptschwingungstypus, sind in Fig. 4 bis 7 angegeben. Die drei Längsschwingungen I, III, IV, ebenso

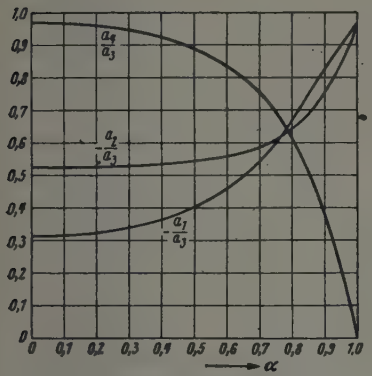


Fig. 4. Amplitudenverhältnisse der Deformationen der Längsschwingung N_1 der X-Platte in Abhängigkeit von α im Bereich von 0 bis 1.

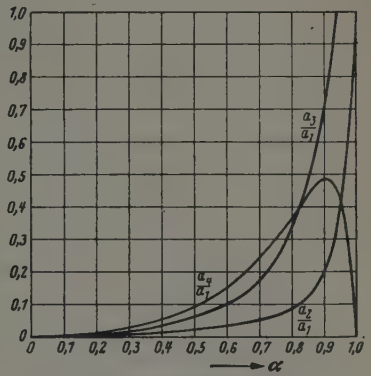


Fig. 5. Amplitudenverhältnisse der Deformationen der Dickenschwingung N_2 der X-Platte in Abhängigkeit von α im Bereich von 0 bis 1.

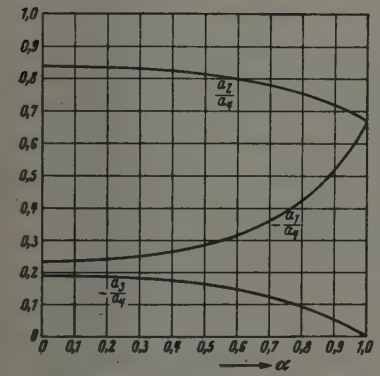


Fig. 6. Amplitudenverhältnisse der Deformationen der Längsschwingung N_3 der X-Platte in Abhängigkeit von α im Bereich von 0 bis 1.

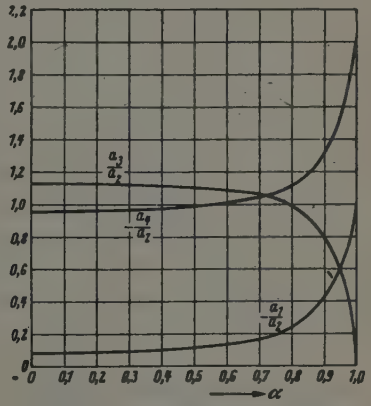


Fig. 7. Amplitudenverhältnisse der Deformationen der Längsschwingung N_4 der X-Platte in Abhängigkeit von α im Bereich von 0 bis 1.

die longitudinale Dickenschwingung II sind durch ein Feld E_x in Übereinstimmung mit (8) anregbar. Die gemessenen Frequenzwerte bzw. die daraus gebildeten Schwingungskoeffizienten sind ebenfalls in Fig. 3 eingetragen, und zwar sind wieder durch Kreise die durch das Feld E_z, durch Kreuze die durch das Feld E_y erregten Schwingungen bezeichnet.

Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung ist für die Längsschwingung III besonders gut, für die beiden Längsschwingungen I und IV ist sie befriedigend. Bei der Schwingung I tritt ein Dublett mit nahezu konstantem Abstand auf, dessen Entstehung nicht geklärt ist; bei der transversalen Dickenschwingung V beobachtet man wieder einen durch Einfluß einer Biegungsschwingung auf den Deformationsanteil $\frac{\partial u}{\partial y}$ hervorgerufenen, durch das Feld E_y anregbaren, von dem berechneten wesentlich abweichenden Verlauf. Bei der dünnen Platte sind die durch die Deformationsanteile $\frac{\partial v}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial w}{\partial x}$ bestimmten transversalen Dickenschwingungen V und VI durch das Feld E_y piezoelektrisch nicht anregbar. Für diese Schwingungen trifft die bei Gl. (11) gemachte Bemerkung zu, wonach der aus der Rechnung folgende, in Fig. 3 angegebene Verlauf der Schwingungskoeffizienten für N_5 und N_6 infolge der eingeführten Korrektur a nicht richtig wiedergegeben wird. Wegen der Nichtanregbarkeit dieser beiden Schwingungen läßt sich dies jedoch nicht nachprüfen. Wie die Betrachtung der Amplitudenverhältnisse der Deformation als Funktion von α zeigt, setzt sich die Längsschwingung I (Fig. 4) für kleinere Werte von α vorwiegend aus den Deformationen z_z und y_z zusammen, der Anteil von y_z wird mit wachsendem Wert von α kleiner und verschwindet für $\alpha = 1$, die Anteile von x_x und y_y nehmen mit wachsendem α zu und werden für $\alpha = 1$ gleich groß. Die Schwingung I ist infolge der Deformationsanteile $x_x y_y x_y$ anregbar, wogegen die Deformation z_z nach (8) nicht anregbar ist. Bei der longitudinalen Dickenschwingung II (Fig. 5), die für kleine Werte von α durch die Komponente x_x bestimmt ist, nimmt der Anteil z_z mit wachsendem α an Größe zu, der für $\alpha = 1$ denjenigen für x_x überwiegt, für $\alpha = 1$ wird $\frac{a_3}{a_1} = 1{,}934$, außerdem tritt ein Anteil y_z hinzu, der für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ verschwindet, bei $\alpha = 0{,}9$ ein Maximum besitzt. Die vorwiegend transversale Längsschwingung III (Fig. 6) setzt sich aus den Deformationskomponenten y_z und y_y zusammen, mit wachsendem Wert von α tritt x_x hinzu. Die Längsschwingung IV (Fig. 7) schließlich setzt sich bei kleineren Werten von α aus fast gleichen Deformationsanteilen y_z, z_z und y_z zusammen; bei größeren Werten von α überwiegt der Anteil der Scherung y_z beträchtlich.

4. Würfel.

Die mit $a = 1$ und $a = 0{,}877$ berechneten Schwingungskoeffizienten für den Würfel, die sich aus Gl. (9) für $\alpha = 1$ ergeben, ferner

die aus Gl. (14a) und (14b) unter Berücksichtigung der Korrektur a berechneten Verhältnisse der Amplituden $a_1 \ldots a_4$ sind in Tabelle 1 angegeben. Wie man erkennt, werden die Gl. (9b) und (9c) für $a = 1$

Tabelle 1. Eigenschwingungen des Würfels.

	$N_{ber.}$		$N_{beob.}$	$a_1 : a_2 : a_3 : a_4$	$\frac{N_{beob.} - N_{ber.}}{N_{ber.}}$
	$a = 1$	$a = 0{,}877$			
N_1	2708,5 kHz	2708,5 kHz	2939 kHz	1 1 − 1,034 0	+ 8,51 %
N_2	3368,9	3368,9	3280	1 1 1,934 0	− 2,71
N_3	2338,9	2237,8	2287	1 − 1 0 − 1,49	+ 2,20
N_4	3558,5	3265,5	3232	1 − 1 0 2,07	− 1,04
N_5	2338,9	2051,7	2113		+ 2,99
N_6	3558,5	3121,5	3122		+ 0,02

identisch, die Wurzeln N_3 und N_5, ebenso N_4 und N_6 stimmen überein. Weiter sind in Tabelle 1 die beobachteten Werte eingetragen. Während die Zuordnung der Schwingungen II bis VI eindeutig ist und auch bei den Schwingungen III bis VI der berichtigende Einfluß der Korrektur a zu erkennen ist, liegen die Verhältnisse bei der Schwingung I weniger klar. Bei der für N_1 gewählten Zuordnung, die vor allem durch den Verlauf in Fig. 8 (Abschnitt 5) und die bei dem Versuch auftretende Intensität der Schwingung eindeutig zu sein scheint, tritt gegen den berechneten Wert eine Abweichung von 8,5%, bei N_2 eine von 2,7% auf. Wir haben erwartet, daß gemäß der früheren Ergebnisse die Übereinstimmung zwischen den beobachteten Schwingungskoeffizienten und den aus Gl. (9a) berechneten besonders gut ist, da Gl. (9a) nur longitudinale Bewegungsvorgänge beschreibt und frei von einer willkürlich eingeführten Korrektur ist. Die Betrachtung der Figuren 1, 3 und 8 zeigt jedoch, daß die beim Würfel auftretenden Verhältnisse verwickelter sind und daß Gl. (9a) zur Beschreibung auch der longitudinalen Vorgänge in der Nähe $\alpha = 1$ nicht ausreicht.

5. *Stab* $S_{0°, 90°, 0°}$.

Durch Verringerung der Kanten parallel zur Y- und Z-Achse lassen wir aus dem Würfel einen Stab mit einer zur X-Achse parallelen Achse hervorgehen. Wir setzen wie früher $\frac{l_x}{l} = \alpha$ und lassen α von 1 bis ∞ durchlaufen. Bei dem Versuch wurde die Kante l_x konstantgehalten, während die beiden Kanten $l_y = l_z = l$ verringert wurden. Die berechneten, auf die konstante Kantenlänge l_x bezogenen Schwingungskoeffizienten $N_i = \nu_i l_x$ sind in Fig. 8 eingetragen (ausgezogene

Kurven), und zwar ist als Abszisse $1/\alpha$ gewählt. Die vorwiegend durch die Deformation x_x bestimmte Schwingung III mit dem Schwingungskoeffizienten N_3 stellt die axiale Längsschwingung des Stabes dar. Die übrigen fünf haben lateralen Charakter, und zwar besitzen die

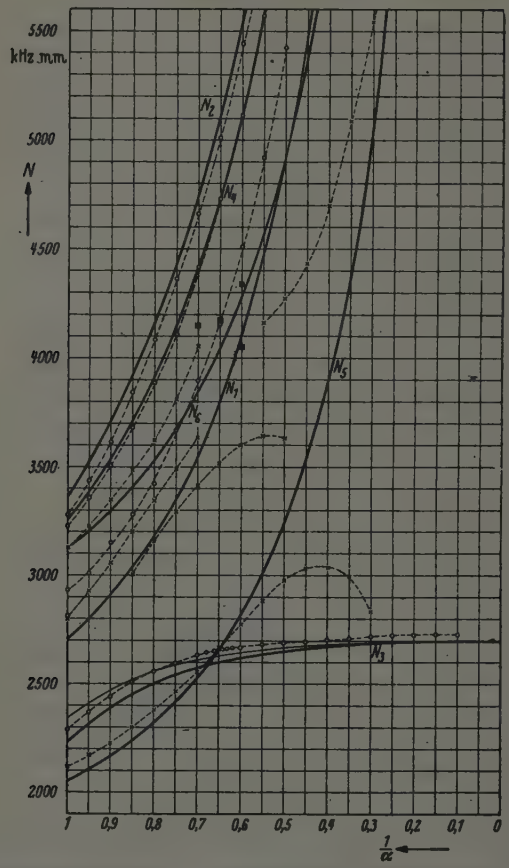


Fig. 8. Schwingungskoeffizienten der Eigenschwingungen des X-Stabes in Abhängigkeit des Kantenverhältnisses $l_x/l = 1/\alpha$ im Bereich von 1 bis 0, bezogen auf die Stablänge l_x.

Schwingungen I und II vorwiegend longitudinalen, die Schwingungen IV bis VI transversalen Charakter. Die Zusammensetzung der Schwingungen I bis IV ergibt sich aus den in Fig. 9 bis 12 dargestellten berechneten Amplitudenverhältnissen der am Schwingungsvorgang beteiligten Deformationskomponenten. Die Schwingung III besitzt in der Nähe von $\alpha = 1$ (Fig. 11) einen überwiegenden Anteil der Kom-

ponenten y_y und y_z, der sich mit wachsendem α verringert. Die mit α veränderlichen Anteile der Deformationen y_y und y_z bewirken die starke Abhängigkeit des Schwingungskoeffizienten N_3 von α (Fig. 8), wodurch

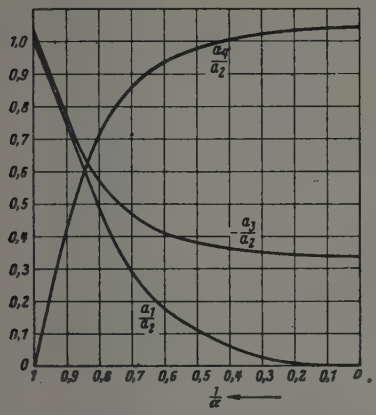


Fig. 9. Amplitudenverhältnisse der Deformationen der lateralen Schwingung N_1 des X-Stabes in Abhängigkeit von $1/\alpha$ im Bereich von 1 bis 0.

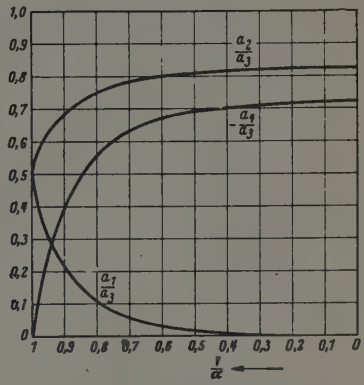


Fig. 10. Amplitudenverhältnisse der Deformationen der lateralen Schwingung N_2 des X-Stabes in Abhängigkeit von $1/\alpha$ im Bereich von 1 bis 0.

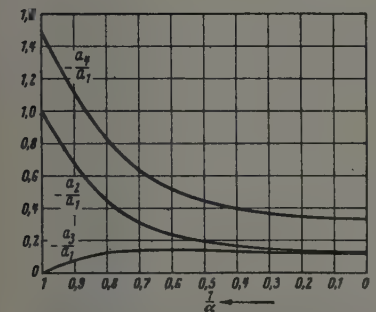


Fig. 11. Amplitudenverhältnisse der Deformationen der axialen Schwingung N_3 des X-Stabes in Abhängigkeit von $1/\alpha$ im Bereich von 1 bis 0.

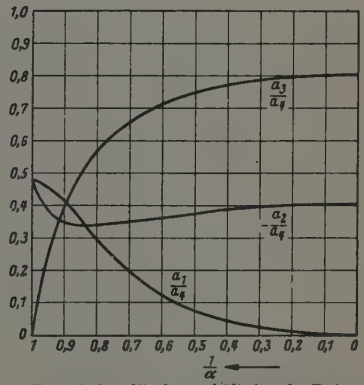


Fig. 12. Amplitudenverhältnisse der Deformationen der lateralen Schwingung N_4 des X-Stabes in Abhängigkeit von $1/\alpha$ im Bereich von 1 bis 0.

die große Harmonieabweichung der Oberschwingungen der axialen Längsschwingungen des Stabes hervorgerufen wird. Für den unendlich dünnen Stab, d. h. für $\alpha \to \infty$, ergeben sich als Grenzwerte $\frac{a_2}{a_1} = \frac{s_{12}}{s_{11}}$, $\frac{a_3}{a_1} = \frac{s_{13}}{s_{11}}$, $\frac{a_4}{a_1} = \frac{s_{14}}{s_{11}}$. Die aus den Meßwerten gebildeten Schwingungs-

koeffizienten sind ebenfalls in Fig. 8 eingetragen. Für die axiale Längsschwingung III ergibt sich eine sehr befriedigende Übereinstimmung, ebenso für die lateralen Schwingungen II und IV. Die gemessenen Werte für N_1 sind den berechneten gegenüber nach höheren Werten hin verschoben. Oberhalb $\alpha = 2\,(1/\alpha = 0{,}5)$ ist die Schwingung II nicht mehr anregbar. Ebenso ist die Schwingung VI nur bis etwa $\alpha = 1{,}4\ (1/\alpha = 0{,}7)$ anregbar. Die laterale Schwingung V geht wieder in eine Biegungsschwingung über. In Fig. 8 ist der für $a = 1$ berechnete Verlauf von N_3 eingetragen (dünn ausgezogene Kurve), um den Einfluß der Korrektur a zu veranschaulichen. Der Unterschied zwischen den mit $a = 1$ und $a = 0{,}877$ berechneten Werten beträgt für $\alpha = 1 : 4{,}52\,\%$, für $1/\alpha = 0{,}9 : 3{,}37\,\%$, für $1/\alpha = 0{,}6 : 0{,}61\,\%$, für $1/\alpha = 0{,}3 : 0{,}09\,\%$, für $1/\alpha = 0$ ist er Null. Der Einfluß der Korrektur a macht sich also bei der longitudinalen Längsschwingung des Stabes nur in dem Gebiet von $\alpha = 1$ bis 1,5 bemerkbar. Die in Fig. 8 mit gekreuzten Kreisen angegebenen Meßpunkte sind einzelne stark anregbare Schwingungen, die singulär auftreten und sich in den Verlauf der übrigen Kurven nicht einordnen lassen. Diese Schwingungen wurden nicht weiter verfolgt.

Herrn Ing. H. Goering, der die numerischen Rechnungen, Herrn Dipl.-Ing. G. Kühne und Herrn Dipl.-Ing. F. Schöfer, die die meßtechnische Auswertung durchgeführt haben, sowie Herrn Dipl.-Ing. F. Krones, der vorbereitende Messungen zu den in Fig. 1 und 3 dargestellten Beispielen ausgeführt hat, möchte ich hiermit meinen Dank aussprechen.

(Aus dem II. Physikalischen Institut der Universität Wien.)

Über Beziehungen zwischen den Halbwertszeiten der radioaktiven β-Strahler.

Von **Josef Schintlmeister.**

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 9. Oktober 1943.)

Es wird gezeigt, daß die Beziehungen zwischen den Halbwertszeiten der radioaktiven β-Strahler nichts mit einer etwaigen α-Teilchenstruktur der Kerne zu tun haben, wie Dickson und Konopinski behaupteten. Es lassen sich jedoch alle Kerne eines beliebig durch die Energieflächen geführten Schnittes einordnen, wenn unter Umständen die Halbwertszeit mit einem von acht Faktoren multipliziert oder dividiert wird, die aus dem Verhältnis der Halbwertszeiten isomerer Kernzustände gewonnen werden. Zum Schlusse werden noch die Ergebnisse einer statistischen Bearbeitung der vorkommenden Halbwertszeiten in Kurvenform mitgeteilt und besprochen.

Bei der Suche nach Beziehungen zwischen den Halbwertszeiten der β-Strahler haben Dickson und Konopinski[1]) die einzelnen radioaktiven Körper zu „Familien" zusammengefaßt, deren Mitglieder sich nur in der Zahl von α-Teilchen unterscheiden. Die einzelnen Familien sind also gekennzeichnet durch die Zahl der Überschußneutronen $N-Z$ und weiter noch dadurch, ob die Protonenzahl Z gerade oder ungerade ist. Für die Familien mit ungerader Zahl $N-Z$ (von der Zahl der Neutronen und der Protonen im Kern ist dann die eine gerade, die andere ungerade) erhielten sie einen recht befriedigenden Zusammenhang zwischen der Halbwertszeit T und der Ordnungszahl Z. Für die beiden Familien $N-Z = -1$ und Z gerade sowie ungerade ist er in Fig. 1 dargestellt[2]). Es fügen sich aber recht häufig Aktivitäten nicht in die Kurven ein, deren Zuordnung zu bestimmten Kernen außer Zweifel steht. Weiters zeigen alle Familien mit gerader Zahl $N-Z$ durchwegs solche Unregelmäßigkeiten, daß keine Kurven durch die Meßpunkte gezogen werden können.

Es ist nun allerdings nicht einzusehen, warum eine etwaige α-Teilchenstruktur der Kerne einen maßgebenden Einfluß auf die Halbwertszeit der β-Strahler haben soll. Bei einer ungeraden Zahl von Überschuß-

[1]) G. R. Dickson u. E. J. Konopinski, Phys. Rev. 58, 949, 1940. — [2]) Zugrunde gelegt sind dieser Abbildung wie der ganzen Untersuchung die Angaben von J. Mattauch und S. Flügge, Kernphysikalische Tabellen. Berlin, Springer, 1942.

neutronen gehören Ausgangs- wie Folgekern zum Typ gerade-ungerade, und gleichgültig, ob ein unpaariges Proton oder ein unpaariges Neutron enthalten ist, liegen diese Kerne auf derselben Energiefläche. Durch die Form dieser Fläche ist der Unterschied an Bindungsenergie zwischen Ausgangs- und Folgekern und damit die Zerfallsenergie und die Halbwertszeit gegeben. Vereinigt man die beiden Kurven der Fig. 1, so müßten sie sich also decken, wie es auch tatsächlich Fig. 2 zeigt. Allerdings haben bis etwa $Z = 15$ die Kerne, bei denen ein paariges Proton sich umwandelt, vergleichsweise eine etwas kleinere Halbwertszeit als die Kerne, bei denen das Proton des Ausgangskernes unpaarig ist. Der Faktor in der Halbwertszeit beträgt etwa 1,5 bis 1,6. Vielleicht bedeutet dieser Unterschied, daß in den beiden Fällen verschiedene räumliche Umlagerungen während des Zerfalls vor sich gehen. Der Unterschied findet sich nämlich nicht, wenn an Stelle der Halbwertszeit die obere Grenzenergie des kontinuierlichen β-Spektrums als Ordinate gewählt wird, wie aus der oberen Kurve der Fig. 2 zu ersehen ist[1]).

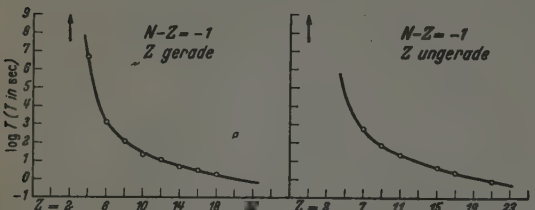


Fig. 1. Beziehung zwischen Halbwertszeiten und Ordnungszahlen für die Kerne mit gerader wie ungerader Ordnungszahl Z und mit $N - Z = -1$ nach Dickson und Konopinski. Alle diese Kerne sind Positronenstrahler, nur der Kern $^{7}_{4}$Be wandelt sich durch K-Einfang um. Die Pfeile bedeuten stabile Kerne.

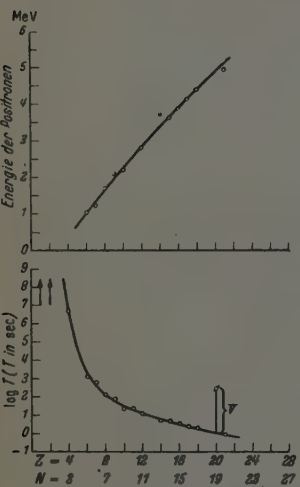


Fig. 2. Die Kurven der Fig. 1 sind vereinigt. Unten die Halbwertszeit, oben die Energie der Strahlen für die Kerne mit $N - Z = -1$.

Faßt man β-Strahler vom Kerntyp ungerade-gerade mit gleicher Zahl an Überschußneutronen zusammen, so greift man Kerne heraus, die auf parallelen Schnitten

[1]) Die Energie der Positronenstrahlung für die Kerne mit $N - Z = -1$ rührt allein von dem Unterschied an Coulomb-Energie zwischen Ausgangs- und Folgekern her, siehe z. B. M. G. White, L. A. Delsasso, J. G. Fox u. E. C. Creutz, Phys. Rev. **56**, 512, 1939; M. G. White, E. C. Creutz, L. A. Delsasso u. R. R. Wilson, ebenda **59**, 63, 1941 sowie D. R. Elliot u. L. D. P. King, ebenda **61**, 489, 1941. Die Zahl der Kernbausteine und damit das Volumen

durch die Energiefläche liegen. Es sind dann einander ähnliche Kurven für die Abhängigkeit der Halbwertszeit von der Protonen- oder der Neutronenzahl zu erwarten. Eine Anzahl solcher Kurven ist in Fig. 3 abgebildet. Der allgemeine Verlauf der Kurven ist dadurch gegeben, daß in nächster Nähe der stabilen Kerne (Pfeile) die Halbwertszeit groß sein muß; mit zunehmender Entfernung vom Gebiet der stabilen Kerne wird sie immer kleiner.

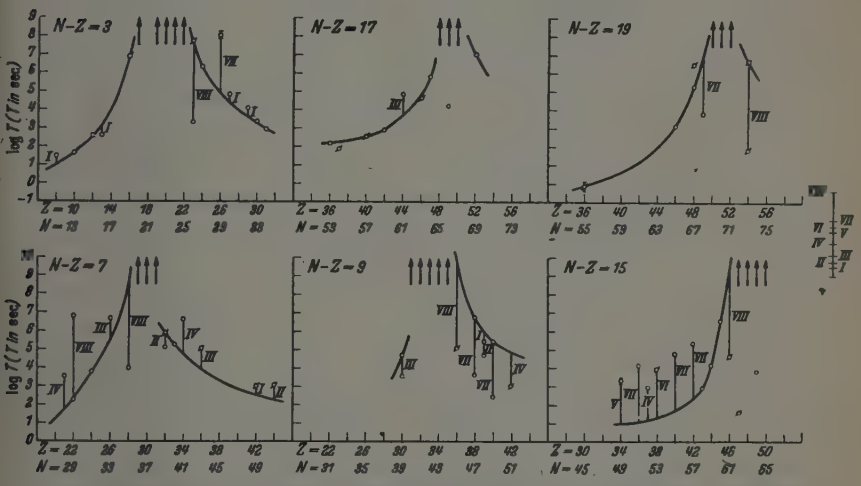


Fig. 3. Beispiele für Beziehungen zwischen Halbwertszeiten und Protonen- sowie Neutronenzahlen der Kerne vom Typ ungerade-gerade. Querstriche bedeuten eine zweifelhafte Zuordnung und Pfeile einen stabilen Kern.

Es ist ersichtlich, daß nicht bloß Punkte mit zweifelhafter Zuordnung, die durch einen Querstrich gekennzeichnet sind, sondern auch manche andere nicht auf den Kurven zu liegen kommen. Auffallend ist nun, daß bei dem gewählten logarithmischen Maßstab für die Halbwertszeit T der Abstand dieser herausfallenden Punkte von den Kurven ausnahmslos nur einige wenige, immer wiederkehrende Werte an-

und die Oberfläche des Kerns ändern sich nämlich während der Umwandlung nicht. Die Zahl der Überschußneutronen beträgt beim Ausgangskern -1 und beim Folgekern $+1$; bei der Berechnung des Unterschiedes der Bindungsenergie kompensiert sich also der Einfluß der Überschußneutronen. In bester Übereinstimmung mit anderen Methoden erhält man aus dem Unterschied an Coulomb-Energie für den Kernradius R die Beziehung $R = 1{,}47 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ cm, vorausgesetzt, daß die Ordnungszahl Z größer als etwa 8 ist. Leichtere Kerne bestehen aus einer zu geringen Zahl von Teilchen, als daß sie noch als homogen geladene, kugelförmige Flüssigkeitströpfchen konstanter Dichte aufgefaßt werden könnten.

nimmt. Es bedeutet dieser Sachverhalt, daß die Halbwertszeiten von β-Strahlern unter Umständen um bestimmte Faktoren zu vergrößern oder zu verkleinern sind, damit eine Einordnung gelingt. Er ist offensichtlich so zu deuten, daß hier die gleichen Umstände vorliegen, die auch die Unterschiede in den Halbwertszeiten isomerer Kerne hervorrufen. Tatsächlich kehren bei diesen dieselben Abstände wieder, wie schon aus den Beispielen der Fig. 3 zu ersehen ist.

Mittels der isomeren Kerne können die Faktoren somit genauer berechnet werden. In Tabelle 1 ist dies durchgeführt. Allerdings geben die Unterschiede zwischen dem metastabilen und dem stabilen Energieniveau eine gewisse Streuung dieser Verhältniszahlen, die jedoch in erträglichen Grenzen bleibt. Es sind in Tabelle 1 alle Fälle von Isomerie aufgenommen, auch bei Kernen vom Typ ungerade-gerade, die Mattauch in seinem Tabellenwerk als sichergestellt angibt. Es sind alle acht Faktoren, die man den Kurven entnimmt, bei den isomeren Kernen vertreten und umgekehrt findet man mit den acht Werten auch das Auslangen, um sämtliche Kerne einzuordnen.

Kerne mit ungerader Massenzahl bleiben bei der β-Umwandlung auf derselben Energiefläche. Sie haben ferner alle halbzahligen Spin. Während des Zerfalls braucht also wohl in der Mehrzahl der Fälle keine Spinänderung einzutreten. Führt man die Isomerie und damit die Faktoren auf Spinänderungen zurück, so sollten also nicht allzu viele Punkte außerhalb der Kurven der Fig. 3 liegen. Wandeln sich jedoch Kerne vom Typ ungerade-ungerade, die einen Spin mindestens 1 haben, durch β-Zerfall um, so entstehen Kerne vom Typ gerade-gerade, die alle den Spin 0 besitzen. Es ist also in diesen Fällen mit gerader Zahl der Überschußneutronen zu erwarten, daß bedeutend öfter die Punkte nicht auf die Kurven fallen. Aus diesem Grunde fanden Dickson und Konopinski hier keine Gesetzmäßigkeiten. Mit Benutzung lediglich der acht Faktoren der Tabelle 1 gelingt es aber, glatte Kurven zu gewinnen. Die Fig. 4 gibt Beispiele für solche Zusammenhänge. Nicht einordnen lassen sich nur sehr wenige Kerne, bei denen ausnahmslos die Zuordnung der Halbwertszeiten zweifelhaft ist. Außerdem würden die sehr langlebigen Kerne $^{87}_{37}$Rb und $^{76}_{71}$Cp größere Faktoren zur Einordnung benötigen.

Ein System zu finden, mit welchem Faktor die Halbwertszeit bestimmter Kerne zu multiplizieren oder zu dividieren ist, gelang bisher nicht. Diese Frage hängt anscheinend eng mit dem Problem zusammen, den Spin der Kerne und die anderen Kerneigenschaften

Tabelle 1.

Unterschiede in den Halbwertszeiten isomerer Kerne.

Kern	Halbwertszeiten	Zerfall	Verhältnisse der Halbwertszeiten		Gruppe
			Einzelwerte	Mittel	
$^{79}_{34}Se$ oder $^{81}_{34}Se$	19 m (57 ± 1) m	β^- γ	3,00	3,0	I
$^{87}_{39}Y$	(80 ± 3) h (14 ± 2) h	K γ	5,71	6,0	II
$^{104}_{45}Rh$	(41,8 ± 0,7) s (4,34 ± 0,06) m	β^- γ	6,22		
$^{44}_{21}Sc$	(4,1 ± 0,1) h (52 ± 2) h	β^+ γ	12,7	14	III
$^{69}_{30}Zn$	(57 ± 2) m (13,8 ± 0,4) h	β^- γ	14,5		
$^{80}_{35}Br$	(18,5 ± 0,5) m (4,54 ± 0,10) h	β^- γ	14,7		
$^{131}_{52}Te$	(25 ± 5) m (1,2 ± 0,2) d	β^- γ	69,0	63	IV
$^{135}_{54}X$	10 m (9,5 ± 0,4) h	— —	57,0		
$^{49}_{116}In$	13 s (56,8 ± 0,9) m	β^- β^-	262	280	V
$^{52}_{127}Te$	(9,3 ± 0,5) h (90 ± 2) d	β^- γ	232		
UZ UX_2	6,7 h 1,14 m	β^- β^-, γ	345		
$^{52}_{25}Mn$	K: 6,84 d; β^+: 130 d (21 ± 2) m	K, β^+ β^+	450	520	VI
$^{106}_{47}Ag$	(25,0 ± 0,5) m (8,2 ± 0,2) d	β^+ K	472		
$^{129}_{52}Te$	(72 ± 3) m (32 ± 2) d	β^- γ	640		
$^{85}_{38}Sr$	66 d 70 m	K γ	1360	1200	VII
$^{89}_{40}Zr$	(78 ± 1) h 4,5 m	β^+ γ	1040		
$^{114}_{49}In$	72 s (48,5 ± 2) d	β^- γ	58200	47000	VIII
$^{51}_{22}Ti$	(72 ± 2) d (2,9 ± 0,1) m	β^- β^-	35700		

wie magnetisches Dipolmoment oder das elektrische Quadrupolmoment voraus zu berechnen.

Da die Halbwertszeit nur von der Bindungsenergie der Kerne abhängt und von den Faktoren, gleichgültig, ob diese nun Spinänderungen oder räumliche Umlagerungen im Kern bedeuten, so ist klar, daß Zusammenhänge zwischen den Halbwertszeiten der β-Strahler immer auftreten müssen, gleichgültig wie man den Schnitt durch die Energie-

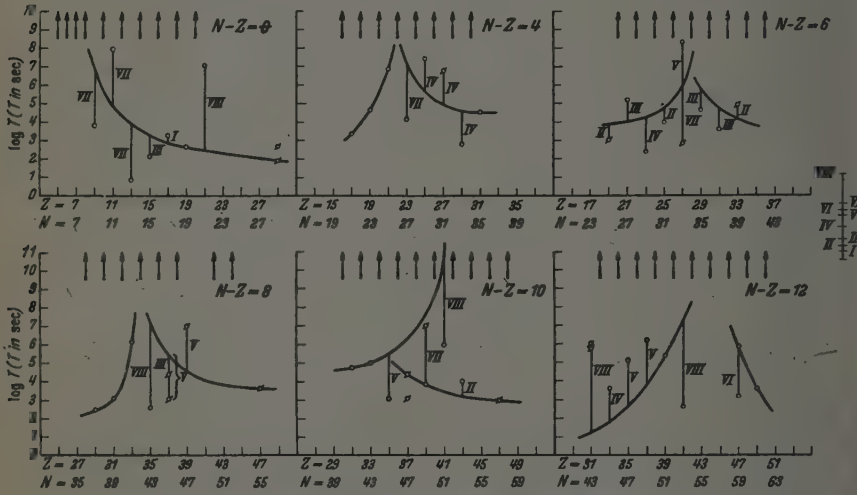


Fig. 4. Kurven entsprechend denen der Fig. 3, aber nunmehr für Kerne vom Typ ungerade-ungerade gezeichnet.

fläche legt. Fig. 5 gibt ein Beispiel hierfür aus dem Gebiet der natürlichen radioaktiven Körper. Eigentlich wäre zu erwarten, daß in Fig. 5 für jede Ordnungszahl zwei Kurven zu ziehen sind je nach dem Kerntyp. Daß Kerne vom Typ ungerade-ungerade sowie gerade-ungerade auf derselben Kurve liegen, ist wohl so zu verstehen, daß Gesetzmäßigkeiten in der gegenseitigen Lage der Energieflächen zueinander bestehen.

Wenn die Halbwertszeiten der β-Strahler, bei denen die Umwandlungen vom Grundzustand des Ausgangskernes in den Grundzustand des Folgekernes stattfinden, in der besprochenen Weise zusammenhängen mit den Halbwertszeiten der isomeren Kernzustände, so sollte sich dies auch bei einer statistischen Bearbeitung des gesamten Materials zeigen[1]). Aus Fig. 6 ist zu ersehen, daß erwartungsgemäß die

[1]) Eine Statistik über die Häufigkeiten der Halbwertszeiten der gesamten β-Strahler hat schon M. E. Nahmias, Phys. Rev. 52, 666, 1937 aufgestellt.

Häufigkeit sowohl der Elektronen- und Positronenstrahler und der Körper mit K-Umwandlung, wie auch der isomeren Kerne bei derselben Halbwertszeit von etwa $3 \cdot 10^9$ Sekunden gegen Null abfällt. Die größte Häufigkeit der Elektronen- und Positronenstrahler liegt bei etwa $2 \cdot 10^3$ Sekunden Halbwertszeit und stimmt überein mit dem ersten Maximum der Kurve für die isomeren Kerne. Sehr deutlich ist im übrigen auch zu sehen, daß die K-Umwandlung weniger wahrscheinlich ist als die Aussendung eines Positrons oder in Einzelfällen auch eines Elektrons und demgemäß nur dann häufiger auftritt, wenn

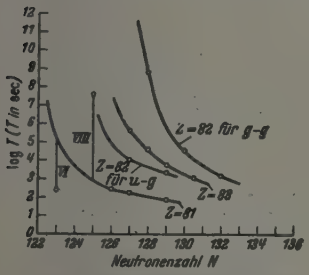


Fig. 5. Es sind nicht mehr wie bei Fig. 3 und 4 Kerne mit gleicher Zahl der Überschußneutronen zusammengefaßt, sondern Kerne mit gleicher Protonenzahl Z.

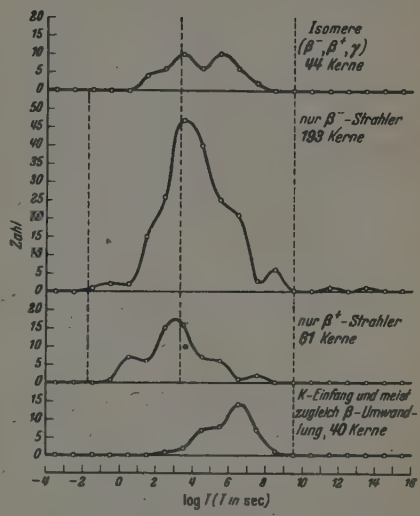


Fig. 6. Häufigkeitsverteilung der Halbwertszeiten der β-radioaktiven Kerne. Bei den isomeren Zuständen wurde kein Unterschied gemacht, ob Elektronen-, Positronen- oder γ-Strahlen ausgesendet werden. Kerne mit K-Einfangung haben in der Regel auch eine bestimmte Wahrscheinlichkeit für eine β-Aktivität, die jedoch unberücksichtigt blieb.

die Halbwertszeit für die β-Aktivität, insbesondere die Positronenaktivität, groß ist. Das Verzweigungsverhältnis zwischen K-Einfangung und β^+-Umwandlung wurde fast nie gemessen, so daß sich im einzelnen Fall die Zerfallswahrscheinlichkeiten für diese beiden Prozesse nicht trennen lassen. Eingetragen in Fig. 6 ist die Halbwertszeit, die sich aus der Summe der beiden Zerfallskonstanten ergibt. Es fehlt somit insbesondere in der Kurve für die β^+-Strahler im rechten, abfallenden Teil eine erhebliche Zahl von Körpern.

Sehr langlebige β-radioaktive Kerne sind selten ($^{40}_{19}$K, $^{87}_{37}$Rb, $^{176}_{71}$Cp, RaD, MsTh$_1$, Ac). Es dürfte berechtigt sein, aus Fig. 6 den Schluß zu ziehen, daß auch langlebige isomere Zustände im selben Ausmaße selten sind.

Zur Behandlung der Stoffmenge als Grundgröße.

Von R. W. Pohl und F. Stöckmann.

(Eingegangen am 30. November 1943.)

Es wird ein Beitrag zu der Frage geliefert, ob sich das Wort Mol anders als bisher definieren läßt.

Im Schrifttum finden wir viele Nebenbegriffe[1]): Ihr Zahlenwert hängt beispielsweise von der benutzten Masseneinheit ab, wenn diese in den hinter dem Zahlenwert stehenden Einheiten überhaupt nicht vorkommt! Im folgenden bedeutet Mol die individuellen Masseneinheiten, also

$$1\ \text{Mol} = (M)\ \text{gramm} \tag{1}$$

und

$$\text{Molekulargewicht } (M) = \frac{\text{Masse eines Moleküls}}{{}^1/_{16}\ \text{Masse des Sauerstoffatoms}}. \tag{2}$$

Die Unentbehrlichkeit der individuellen Masseneinheiten kann nicht oft und eindringlich genug betont werden: Mole anwenden heißt, Meßergebnisse auf Körper oder Mengen gleicher Molekülzahl beziehen.

Tabelle 1.

Neben der Anwendung allgemeiner Begriffe, wie z. B.	findet man die Anwendung von Nebenbegriffen, wie z. B.
spezif. Volumen $v = 22{,}4\ \frac{\text{Liter}}{\text{Mol}}$	*Molvolumen* $V = 22{,}4$ Liter
spezif. Wärme $c = 6\ \frac{\text{cal}}{\text{Mol} \cdot \text{Grad}}$	*Molwärme* $C = 6\ \frac{\text{cal}}{\text{Grad}}$
Gaskonstante $R = 0{,}082\ \frac{\text{Liter} \cdot \text{Atm.}}{\text{Mol} \cdot \text{Grad}}$	*molare Gaskonstante* $R^* = 0{,}082\ \frac{\text{Liter} \cdot \text{Atm.}}{\text{Grad}}$
spezif. Molekülzahl $N = \frac{6 \cdot 10^{23}}{\text{Mol}}$	*Loschmidt-Zahl* $N_L = 6 \cdot 10^{23}$
usw.	usw.

Seit einiger Zeit erscheinen nun im physikalisch-chemischen Schrifttum auffallende Begriffe. Sie haben, obwohl die Gleichung

[1]) Ihre Definitionsgleichungen finden sich bei R. W. Pohl, ZS. f. Phys. 121, 543, 1943. Sie werden dort wie hier durch Kursivdruck von normalen Begriffen unterschieden. Eine Verwechslung beider Begriffsarten muß unbedingt vermieden werden.

(M) gramm = Mol nicht anerkannt wird, die gleichen Zahlenwerte und Einheiten wie die allgemeinen Begriffe, werden aber mit den Namen und den Buchstaben der Nebenbegriffe bezeichnet. Beispiele:

Tabelle 2.

Man schreibt nicht mehr	sondern
Molvolumen $V = 22{,}4$ Liter	Molvolumen $V = 22{,}4 \frac{\text{Liter}}{\text{MOL}}$
Molwärme $C = 6 \frac{\text{cal}}{\text{Grad}}$	Molwärme $C = 6 \frac{\text{cal}}{\text{MOL} \cdot \text{Grad}}$
molare Gaskonstante $R^* = 0{,}082 \frac{\text{Liter} \cdot \text{Atm.}}{\text{Grad}}$	molare Gaskonstante $R^* = 0{,}082 \frac{\text{Liter} \cdot \text{Atm.}}{\text{MOL} \cdot \text{Grad}}$
Loschmidt-Zahl $N_L = 6 \cdot 10^{23}$	Loschmidt-Zahl $N_L = 6 \cdot 10^{23}/\text{MOL}$

Der Weg, auf dem man zu diesen neuen Begriffen mit der Einheit MOL gelangt, wird nur angedeutet; darum soll er hier ausführlicher beschrieben werden.

1. Die Stoffmenge (Newtons quantitas materiae) wird wie eine Grundgröße behandelt und der Masse als gleichberechtigt an die Seite gestellt. Die Stoffmenge, von uns provisorisch mit Z bezeichnet, soll als Oberbegriff sowohl Körper wie Mengen, z. B. Flüssigkeitsmengen, umfassen.

2. Als Einheitsstoffmenge gilt die Stoffmenge, die ebensoviel Moleküle enthält wie 32 gramm Sauerstoff.

3. Dieser Einheitsstoffmenge gibt man denselben Namen, den Ostwald für die individuellen Masseneinheiten (M) Gramm eingeführt hat, nämlich 1 MOL. Wir drucken MOL, um die Verwechslung mit Mol = (M) gramm zu verhindern. Die Einheit MOL ist bei den Messungen den Einheiten der Grundgrößen gleichberechtigt.

4. Zur Umrechnung von Größen, die die Masse M als Grundgröße enthalten, auf solche, die statt M die Stoffmenge Z als Grundgröße enthalten, dient das „Molgewicht" genannte Verhältnis[1])

$$\frac{\text{Masse } M}{\text{Stoffmenge } Z} = (M) \frac{\text{gramm}}{\text{MOL}}. \qquad (3)$$

[1]) Benutzt man mit Newton die Masse M als Maß der Stoffmenge, so liefert Gl. (3)

$$\text{MOL} = (M) \text{ gramm} = \text{Mol}.$$

und daraus folgend

$$\text{Stoffmenge } Z = \frac{\text{Masse } M}{(M)\ \text{gramm}}\ \text{MOL} = \frac{\text{Masse } M}{(M)\ \text{Kilogramm}} \cdot \text{KILOMOL}.$$

Anwendungsbeispiel: Das Gasgesetz lautet mit der Grundgröße Masse M

$$pV = M \cdot RT. \tag{4}$$

Dabei ist

$$R = \frac{0{,}082\ \text{Liter} \cdot \text{Atm.}}{(M)\ \text{Gramm} \cdot \text{Grad}} = \frac{0{,}082\ \text{Liter} \cdot \text{Atm.}}{\text{Mol} \cdot \text{Grad}}.$$

Wir setzen gemäß Gl. (3) in Gl. (4)

$$M = Z \cdot (M)\,\frac{\text{gramm}}{\text{MOL}}$$

und erhalten als Gasgesetz mit der Grundgröße Menge Z

$$pV = Z \cdot (M)\,\frac{\text{gramm}}{\text{MOL}} \cdot RT,$$

$$pV = Z \cdot R^* T.$$

Dabei ist

$$R^* = R \cdot (M)\,\frac{\text{gramm}}{\text{MOL}} = 0{,}082\,\frac{\text{Liter} \cdot \text{Atm.}}{\text{MOL} \cdot \text{Grad}}.$$

Das ganze Verfahren ist einwandfrei und in sich geschlossen, aber doch recht umständlich. Als Nachteile empfinden wir:

1. die Behandlung der Stoffmenge Z als Grundgröße;
2. die Verwendung des bereits vor Jahrzehnten anders definierten Wortes „MOL" für die Einheit dieser Grundgröße[1]);

Benutzt man hingegen die Molekülzahl n als Maß der Stoffmenge, so liefert Gl. (3)

$$\frac{\text{Masse}}{\text{Molekülzahl}} = \frac{(M)\ \text{gramm}}{\text{MOL}}$$

oder

$$\frac{\text{Molekülzahl}}{\text{Masse}} = \text{spezif. Molekülzahl } N = \frac{\text{MOL}}{(M)\ \text{gramm}} = \frac{6 \cdot 10^{23}}{(M)\ \text{gramm}},$$

also

$$\text{MOL} = 6 \cdot 10^{23}.$$

In diesem Fall ergibt sich aus den Beispielen der Tabelle 2 rechts:

Molvolumen $= 3{,}7 \cdot 10^{-23}$ Liter $= 1/N_v$; dabei ist $N_v = \frac{\text{Molekülzahl}}{\text{Volumen}}$,
Molwärme $C = 10^{-23}$ cal/Grad = Wärmekapazität eines Moleküls,
molare Gaskonstante $R^* = 1{,}36 \cdot 10^{-25}$ Liter Atm/Grad
$= 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Wattsek/Grad = Boltzmann-Konstante,
Loschmidt-Zahl N_L = Molekülzahl/Stoffmenge = 1,
d. h. Stoffmenge = Molekülzahl.

[1]) Das Wort Mol hat man schon einmal vergeblich umzudefinieren versucht, und zwar durch die Gleichungen

$$1\ \text{Mol} = N_L\ \text{Moleküle},$$

$$N_L = \frac{32\ \text{gramm}}{\text{Masse eines Sauerstoffmoleküls}}.$$

3. die Notwendigkeit, neben den mit Hilfe der Grundgröße Masse gebildeten Begriffen spezif. Volumen, spezif. Wärme usw. noch andere mit der Grundgröße Stoffmenge gebildete Größen Molvolumen, Molwärme usw. beizubehalten und so den Buchstabenbedarf für die Gleichungen unnötig zu vergrößern;

4. die Verwendung der gleichen Namen Molvolumen, Molwärme usw. für die neuen Begriffe, obwohl diese Namen seit Jahrzehnten für die oben aufgezählten, anders dimensionierten Nebenbegriffe festliegen;

5. die Notwendigkeit, neben dem dimensionslosen Molekulargewicht (M) einen „Molgewicht" genannten Umrechnungsfaktor einzuführen.

All das läßt sich vermeiden, wenn man konsequent Mole als individuelle Masseneinheiten anwendet[1]).

Dann heißt es z. B. für ideale Gase

$$c_p - c_v = R,$$

in Worten: Für ideale Gase ist die Differenz ihrer beiden spezifischen Wärmen gleich ihrer Gaskonstanten. Oder mit Zahlenwerten beispielsweise

$$7\,\frac{\text{cal}}{\text{Mol}\cdot\text{Grad}} - 5\,\frac{\text{cal}}{\text{Mol}\cdot\text{Grad}} = 2\,\frac{\text{cal}}{\text{Mol}\cdot\text{Grad}}.$$

Diese Gleichung bleibt ungeändert, wenn man für ein spezielles Gas auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens 1 Mol durch (M) Gramm ersetzt, z. B. für Sauerstoff mit (M) = 32:

$$0{,}218\,\frac{\text{cal}}{\text{gramm}\cdot\text{Grad}} - 0{,}156\,\frac{\text{cal}}{\text{gramm}\cdot\text{Grad}} = 0{,}062\,\frac{\text{cal}}{\text{gramm}\cdot\text{Grad}}.$$

Zusammenfassung.

Neuerdings erscheinen im physikalisch-chemischen Schrifttum auffallende Begriffe. Sie haben, obwohl die Gleichung (M) Gramm = Mol nicht anerkannt wird, die gleichen Zahlenwerte und Einheiten wie die allgemeinen Begriffe, werden aber mit den Namen und den Buchstaben der Nebenbegriffe bezeichnet. Es heißt z. B. nicht mehr Molvolumen $V = 22{,}4$ Liter, sondern Molvolumen $V = 22{,}4$ Liter/MOL.

Diese Dimensionierung beruht auf einer eigenartigen Festsetzung: Die Stoffmenge wird wie eine Grundgröße behandelt. Sie wird

[1]) Vgl. R. W. Pohl, Einführung in die Physik, Bd. I, 7. Aufl., §§ 131, 142; Bd. II, 10. Aufl., § 105.

den bisher gebräuchlichen fünf Grundgrößen Länge, Zeit, Masse, Temperatur und Ladung als gleichberechtigt an die Seite gestellt.

Der für ihre Einheit benutzte, schon anderweitig vergebene Name wird von uns MOL gedruckt, um Verwechslungen mit den individuellen Masseneinheiten Mol = (M) Gramm zu verhindern.

Zur Umrechnung von der Grundgröße Masse auf die Grundgröße Stoffmenge oder umgekehrt braucht man das „Molgewicht" genannte Verhältnis

$$\text{Masse/Stoffmenge} = (M)\ \text{gramm/MOL}.$$

Göttingen, I. Physikalisches Institut der Universität, November 1943.

(Mitteilung aus dem Laboratorium für Elektronenoptik der Siemens und Halske A.-G., Berlin-Siemensstadt.)

Über günstige Entwicklungsverfahren und Grenzauflösungsvermögen photographischer Platten für übermikroskopische Aufnahmen *).

Von B. v. Borries.

Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 26. Oktober 1943.)

Die für die Beurteilung der Eignung einer Emulsion für übermikroskopische Aufnahmen wichtigste Größe ist die Bildpunktarbeit. Sie kann aus den gemessenen Werten der Empfindlichkeit, der Körnigkeit und der Steilheit der Emulsion berechnet werden. Für einige Emulsionen wird durch Variation der Entwicklersubstanz und der Entwicklungszeit ermittelt, welche Minimalwerte der Bildpunktarbeit erreicht werden können. Es zeigt sich, daß man bei der günstigsten und damit für die Übermikroskopie geeigneten Kombination (Agfa-Spektral-Blau-Hart-Platte, Agfa-Methol-Hydrochinon-Entwickler 25 min, großer Elektronendichtekontrast) zur Schwärzung eines Bildpunktes etwa $3 \cdot 10^{-12}$ Ws benötigt. Im Gegensatz zu von anderer Seite vertretenen Auffassungen finden sich für die Agfa-Schumann-Hart-Platte wesentlich weniger günstige Ergebnisse, so daß zur Verwendung dieser Emulsion für übermikroskopische Aufnahmen auch wegen ihrer sonstigen Eigenheiten nicht geraten werden kann. Aus der minimalen Bildpunktarbeit lassen sich die Grenzen der Lebendmikroskopie errechnen: Es ergibt sich in Übereinstimmung mit einer früheren eigenen Untersuchung, daß mit dem Elektronenmikroskop auf der Grundlage der heute bekannten Emulsionen eine praktisch brauchbare Lebendmikroskopie hoher Auflösung nicht möglich ist. — Durch Aufnahme sehr scharfer, aber elektronenoptisch nur schwach vergrößerter Bilder von kolloidem Silber wird das Grenzauflösungsvermögen photographischer Platten unmittelbar bestimmt. Es erweist sich als in Übereinstimmung stehend mit dem aus Körnigkeit und Steilheit berechneten Auflösungsvermögen. Weiter wird gezeigt, daß man aus der Schwärzungsverteilung der Platte in Bereichen, die kleiner als das Auflösungsvermögen sind, keine Schlüsse mehr auf das abgebildete Objekt ziehen kann. In diesem Zusammenhang wird kritisch Stellung genommen zum Nachweis des Auflösungsvermögens von Elektronenmikroskopen aus elektronenoptisch ungenügend vergrößerten Bildern kleiner Objekte.

Benutzte Bezeichnungen.

δ [cm] Auflösungsvermögen des Übermikroskops, bezogen auf das Objekt.
δ_P [cm] Auflösungsvermögen der photographischen Platte, berechnet.
δ'_P [cm] Auflösungsvermögen der photographischen Platte, entnommen aus Testaufnahmen.
δ_A [cm] Auflösungsvermögen des Auges.
U [V] Strahlspannung.

*) Vierte Mitteilung über die Intensitätsverhältnisse am Übermikroskop. Erste bis dritte Mitteilung siehe Fußnoten [1]) auf S. 540, 541 u. 544. Fünfte Mitteilung siehe Fußnote [1]) S. 562.

S [1] Schwärzung der photographischen Platte (über Schleier).

$q_{0,5}\left[\frac{C}{cm^2}\right]$ Ladungsdichte der Elektronen zur Hervorrufung der Schwärzung $S = 0{,}5$.

$a_{0,5}\left[\frac{Ws}{cm^2}\right]$ Arbeitsdichte der Elektronen zur Hervorrufung der Schwärzung $S = 0{,}5$.

A_B [Ws] Bildpunktarbeit der Platte (Arbeit, die zur Schwärzung eines Bildpunktes erforderlich ist).

$q_1\left[\frac{C}{cm^2}\right]$ Ladungsdichte im Endbild einer festzuhaltenden Objekteinzelheit.

$q_2\left[\frac{C}{cm^2}\right]$ Ladungsdichte im Endbild der Umgebung der festzuhaltenden Einzelheit.

q_2/q_1 [1] Elektronendichtekontrast im Endbild.

ΔS [1] Schwärzungskontrast auf der photographischen Nachvergrößerung.

$\gamma_{0,5}$ [1] Steilheit der photographischen Platte bei $S = 0{,}5$.

γ_{Pap} [1] Steilheit des zur Vergrößerung benutzten photographischen Papieres.

K [1] Körnigkeit der photographischen Platte.

V_g [1] Zulässige Grenzvergrößerung der photographischen Platte.

A_e [1] Elektronenoptischer Abbildungsmaßstab des Übermikroskops.

A_l [1] Maßstab der nachträglichen Vergrößerung der Platte.

x [cm] Dicke des Objekts.

$\gamma'\left[\frac{g}{cm^3}\right]$ Spezifisches Gewicht des Objekts.

$P'\left[C\frac{cm^2}{g}\right]$ Objektionisierungsfaktor, für Abtötung des Objekts maßgebend.

HWD [r] Halbwertsdosis des lebenden Objekts (in Röntgen).

n [1] Anzahl der Aufnahmen bis zur 50%igen Abtötung.

t [min] Entwicklungsdauer.

ϑ [°C] Entwicklertemperatur.

Um in der übermikroskopischen Aufnahme ein Bildelement (Bildpunkt) festzuhalten, das als Quadrat mit der Kantenlänge δ_P, dem Auflösungsvermögen der Platte, angenommen wird, ist ein bestimmter kleiner Betrag an Elektronenenergie erforderlich. Dieser Energiebetrag, den wir als Bildpunktsarbeit A_B [Ws] bezeichnen, muß den Bildpunkt schwärzen. Als ausreichende Schwärzung eines masselosen Objektbereichs hat sich die Schwärzung $S = 0{,}5$ erwiesen, zu deren Hervorrufung im Bild die Arbeitsdichte $a_{0,5}$ [Ws/cm²] erforderlich ist, welche ein Maß für die Empfindlichkeit der photographischen Platte bildet; sie wird aus der Schwärzungskurve entnommen[1]). Die Bildpunktarbeit ist daher gegeben durch

$$A_B = a_{0,5} \cdot \delta_P^2 \text{ [Ws]} \qquad (1)$$

(vgl. auch die Darstellung und die Bezeichnungen der Fig. 1).

Das Auflösungsvermögen δ_P der photographischen Platte ist hauptsächlich durch die Körnigkeit der Platte und weniger durch die

[1]) B. v. Borries, Phys. ZS. 43, 190—204 u. 260, 1942.

räumliche Streuung der Elektronen in der Platte bedingt[1]). Entscheidend ist es, ob das Auge zwei in der photographischen Platte festgehaltene, punktförmige Einzelheiten noch einwandfrei als dem Objekt angehörig vom körnigen Untergrund der Platte trennen kann.

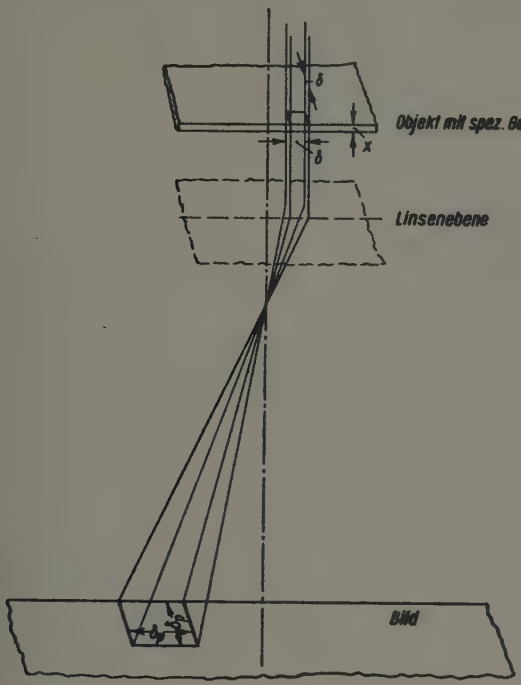


Fig. 1. Strahlengang und Grundbeziehungen.

Abbildungsmaßstab: $A \lessgtr \delta_P/\delta$.
Stromdichte im Bild j [A/cm^2], im Objekt $j_0 = A^2 \cdot j$ [A/cm^2].
Ladungsdichte im Bild $q = j \cdot t$ [C/cm^2], im Objekt $q_0 = A^2 \cdot q$ [C/cm^2].
Arbeitsdichte im Bild $a = q \cdot U$ [Ws/cm^2], im Objekt $a_0 = A^2 \cdot a$ [Ws/cm^2].
Strahlspannung U [V].

δ_P Auflösungsvermögen der Platte [cm].
δ Auflösungsvermögen im Objekt [cm].

Dies wird um so eher möglich sein, je stärker der Schwärzungskontrast ΔS zwischen der geschwärzten Einzelheit und dem Untergrund ist. Fig. 2 gibt die Abhängigkeit des Auflösungsvermögens δ_A des Auges vom Schwärzungskontrast zweier punktförmiger Einzelheiten wieder. Es zeigt sich, daß kontrastreiche Einzelheiten besser erkannt werden können als kontrastarme. Der Schwärzungskontrast ΔS des übermikroskopischen Bildes hängt nun ab 1. von der Steilheit der Platte, für die wir die Steilheit an der Stelle $S = 0{,}5$ mit $\gamma_{0,5}$ zugrunde legen;

[1]) B. v. Borries, ZS. f. angew. Photographie 4, 42—58, 1942.

2. von der Steilheit γ_{Pap} des zur Vergrößerung benutzten photographischen Papieres, und 3. von dem Elektronendichtekontrast q_2/q_1 zwischen dem intensiver bestrahlten Untergrund (q_2) und dem infolge Abstreuung von Elektronen weniger stromdichten Bild der zu trennenden Massenteilchen (q_1).

$$\Delta S = \gamma_{0,5} \cdot \gamma_{Pap} \cdot \log q_2/q_1. \qquad (2)$$

Für praktische Verhältnisse kann man mit $\gamma_{Pap} = 3$ rechnen, so daß sich das Auflösungsvermögen des Auges als Funktion des Elek-

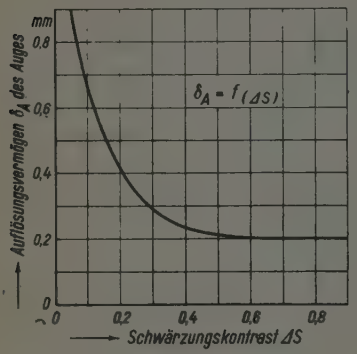


Fig. 2. Auflösungsvermögen δ_A des Auges für die Trennung zweier Punkte vom Schwärzungskontrast ΔS auf der photographischen Kopie.

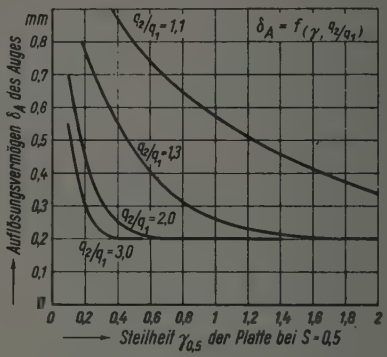


Fig. 3. Auflösungsvermögen δ_A des Auges für die Trennung zweier Punkte für verschiedene Elektronendichtekontraste q_2/q_1, abhängig von der Steilheit $\gamma_{0,5}$ der Platte bei $S = 0,5$. Die Kurven sind aus Fig. 2 entstanden, wobei ΔS auf der Kopie bestimmt ist nach der Beziehung $\Delta S = \gamma_{0,5} \cdot \gamma_{Pap} \cdot \log q_2/q_1$ mit $\gamma_{Pap} = 3$.

tronendichtekontrastes und der Plattensteilheit ergibt, wie in Fig. 3 aufgezeichnet ist.

Die von der photographischen Platte aufgelöste Strecke δ_P ist nun gegenüber dem Auflösungsvermögen des Auges δ_A um so viel kleiner, als die photographische Platte vergrößert werden darf, ohne daß das Sichtbarwerden der Kornstruktur dem Auge die Unterscheidung, ob festgestellte Einzelheiten dem untersuchten Objekt angehören oder auf die Plattenstruktur zurückzuführen sind, unmöglich macht:

$$\delta_P = \frac{\delta_A}{V_g} \text{ [cm]}. \qquad (3)$$

Die zulässige Vergrößerung V_g hängt von der Körnigkeit K der Platte nach der Beziehung

$$V_g \approx 100/K \qquad (4)$$

ab, wie in einer früheren Untersuchung sichergestellt wurde[1]). Die Körnigkeit wird photometrisch aus dem Callier-Quotienten bei der Schwärzung $S = 0{,}5$ bestimmt. Das Auflösungsvermögen der photographischen Platte ist also eine Größe, auf die die physiologischen Eigenschaften des Auges (Kontrastabhängigkeit der Augenauflösung), die Steilheit der photographischen Platte, ihre Körnigkeit und der im Bild vorhandene Elektronendichtekontrast einwirken. Um die Bildpunktarbeit zu ermitteln, müssen demnach die vollständigen Schwärzungskurven der untersuchten Emulsionen und die Körnigkeit im entwickelten Zustand bestimmt werden.

Durch den dem Bildpunkt entsprechenden, um den Abbildungsmaßstab A kleineren Objektpunkt der Kantenlänge δ (vgl. Fig. 1) muß mindestens die Bildpunktarbeit hindurchtreten, so daß deren Größe für die Mindestobjektbelastung maßgebend ist. Im Objekt wird ein mit wachsender Massendicke $\gamma' x$ des Objektpunktes steigender Anteil der durchtretenden Strahlung absorbiert und abgestreut. Die Energieaufnahme des Objektpunktes führt zu *Erwärmung* und *Ionisation*, die man in der Regel möglichst gering zu halten wünscht.

Die *Temperatur* des Objektes wird selbst bei sehr kurzzeitiger Bestrahlung nicht durch die vom Volumenelement $\delta^2 \cdot x$ aufgenommene Arbeit und seine Wärmekapazität bestimmt, sondern stellt sich im Gleichgewicht aus dem vom Volumenelement $\delta^2 \cdot x$ aufgenommener und von ihm abgeleiteter bzw. abgestrahlter Leistung ein. Die Größe der photographischen Bildpunktarbeit ist also nicht unmittelbar maßgebend für die Erwärmung des Objekts. Dennoch ist es mittelbar auch aus Gründen der Objekterwärmung erwünscht, photographische Emulsionen geringer Bildpunktarbeit zu verwenden, weil diese erlauben, mit nicht allzulangen Expositionszeiten auszukommen, wenn man bei kleiner Objektbelastung und daher mit dunklem Endbild arbeitet. Kurze Expositionszeiten sind erwünscht, um die Störmöglichkeiten durch Objektänderungen, Erschütterungen, Fremdfelder und Brennweitenschwankungen der Elektronenlinsen infolge Spannungs- und Stromschwankungen einzuschränken.

Von unmittelbarem Einfluß ist demgegenüber die Bildpunktarbeit auf die Möglichkeit der übermikroskopischen Untersuchung ionisationsempfindlicher Objekte, z. B. lebender Substanz. Beschränkt man die Exposition des Objekts auf die gleiche Zeit, während deren die Platte

[1]) B. v. Borries, ZS. f. angew. Photographie 4, 42—58, 1942.

exponiert wird, so ist die Bildpunktarbeit identisch mit der Elektronenenergie, die den (masselosen) Objektpunkt durchsetzt. Infolge von Ionisation wird im massebehafteten Objektpunkt dabei lebendes Material geschädigt, bis bei einer bestimmten Dosis, der sogenannten Halbwertsdosis, die Hälfte der untersuchten Lebensträger abgetötet ist. Bezeichnet HWD die Halbwertsdosis in Röntgen [r] für das betreffende Objekt, so ist das bei Abtötung von 50% der Objekte nach n Aufnahmen erzielbare Auflösungsvermögen nach einer früher[1]) abgeleiteten Beziehung

$$\delta = 1930 \sqrt{\frac{P'}{\mathrm{HWD}}\, n}\ [\mathrm{cm}], \tag{5}$$

$$P' = A_B \cdot \frac{s_0}{\gamma_L \cdot U} \left[C \cdot \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{g}}\right]. \tag{6}$$

Darin ist sowohl die Bildpunktarbeit A_B als auch die Größe $\frac{s_0}{\gamma_L \cdot U}$, die das Ionisationsvermögen der Elektronen beschreibt, eine früher mitgeteilte Funktion der Strahlspannung[1]). Neben der Halbwertsdosis ist also die Bildpunktarbeit die entscheidende Größe für die Möglichkeit der Übermikroskopie lebender Objekte.

In drei vorhergehenden Veröffentlichungen[2]) war das beschriebene Verfahren der Bestimmung der Bildpunktarbeit entwickelt worden und für eine größere Anzahl verschiedener Emulsionen die Bildpunktarbeit als Funktion der Strahlspannung bestimmt worden. Bei photographischen Untersuchungen ist die Zahl der Variablen recht groß, da, um ein vollständiges Bild zu gewinnen, folgende Größen variiert werden müssen: 1. Elektronendichte, 2. Elektronengeschwindigkeit, 3. Plattensorte, 4. Entwicklersubstanz, 5. Entwicklerkonzentration, 6. Entwicklungszeit, 7. Entwicklertemperatur. Um den Umfang der Arbeiten erträglich zu erhalten, wurde seinerzeit der Entwicklungsvorgang nach Substanz, Konzentration, Zeit und Temperatur im allgemeinen konstant gehalten, andererseits aber 17 Plattensorten untersucht und die Elektronengeschwindigkeit zwischen 12 und 220 kV variiert. Die Entwicklungstemperatur zu variieren schien nicht erforderlich, da höhere Temperatur das gleiche bewirken dürfte wie längere Entwicklungszeit. Es wurde seinerzeit jedoch bereits ein Vorversuch, in dem die Entwicklerkonzentration und die Entwicklungszeit variiert wurden, gemacht. Erwartungsgemäß zeigte sich, daß

[1]) B. v. Borries, ZS. f. Phys. 119, 498–521, 1942. — [2]) Siehe Fußnotenhinweise auf S. 540, 541 u. 544.

geringere Konzentration durch längere Entwicklungszeit wettgemacht werden kann; daher wurde die Konzentration nicht weiter verändert. Wohl aber ließ sich ein merklicher Einfluß der Entwicklungszeit feststellen. Durch stärkere Entwicklung kann man zunächst zu kleinerer Bildpunktarbeit kommen. Mit längerer Entwicklung einer Platte sinkt die zur Schwärzung $S = 0{,}5$ erforderliche Energiedichte $a_{0,5}$, so daß aus diesem Grunde die Bildpunktarbeit kleiner wird. Andererseits steigt die Körnigkeit, so daß das Auflösungsvermögen ungünstiger wird. Diese Verschlechterung des Auflösungsvermögens ist aber für kleine Elektronendichtekontraste gemildert dadurch, daß bei stärkerer Durchentwicklung $\gamma_{0,5}$ größer wird. Trotzdem kann man erwarten, daß die Bildpunktarbeit nur bis zu einer bestimmten Vergrößerung der Entwicklungszeit kleiner wird, weil schließlich der Einfluß der stärker werdenden Körnigkeit überwiegt.

Um die für die energetischen Grenzen der Übermikroskopie wichtige Frage zu beantworten, auf welche Werte die Bildpunktarbeit und damit die Objektbelastung gesenkt werden kann, wurde nun eine weitere Untersuchung in Angriff genommen, bei der für 5 verschiedene Emulsionen 5 verschiedene Entwickler mit je 5 verschiedenen Entwicklungszeiten untersucht wurden. Da bei photographischen Untersuchungen stets mit einer recht erheblichen Streuung der Einzelergebnisse gerechnet werden muß, wurden die Versuche dreimal hintereinander in ähnlicher Weise mit jeweils verbesserten Versuchsbedingungen durchgeführt. Diese Versuchsreihen sind im folgenden mit I, II, III bezeichnet, während die aus den früheren Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit mitverwerteten Einzelergebnisse als Versuchsreihe 0 aufgeführt sind. Nach dem beschriebenen Versuchsplan wurden demnach 375 Stufenkeile hergestellt, auf Schwärzung und Körnigkeit ausgemessen und ausgewertet.

In die Untersuchung gezogen wurden die in Tabelle 1 aufgeführten Plattensorten, die sämtlich mit allen in Tabelle 2 aufgeführten Entwicklern benutzt wurden. Die Entwicklungszeiten waren bei den Versuchsreihen I und II zwischen $2^1/_2$ und 15 Minuten je nach den von den Herstellern der Entwickler vorgeschriebenen normalen Entwicklungszeiten verschieden gewählt. Es stellte sich jedoch heraus, daß im allgemeinen bei diesen Entwicklungszeiten die Minimalwerte der Bildpunktarbeit noch nicht erreicht wurden, so daß bei der Versuchsreihe III für alle Platten und Entwickler außer der Agfa-Schumann-Hart-Platte die Entwicklungszeiten zwischen 4 und 25 Minuten gewählt

Tabelle 1. Die untersuchten Platten.

Nr.	Platte		Emulsions-Nr.	Emulsionsgewicht g/cm²
1	Agfa-Spektral-Blau-Hart		Wi/3173	0,0038
2	Agfa-Spektral-Blau-Ultrahart		Wi/3171	0,0033
3	Agfa-K		2066	0,0066
4	Perutz-Silber-Eosin		32883	0,0053
5	Agfa-Schumann-Hart	Reihe 0	1957	0,0025
6		„ I u. II	2059/IV	0,0019
7		„ III	2083/G.10	0,0026

Tabelle 2. Die benutzten Entwickler.

Nr.	Entwickler	Konzentration	
		g/l	Verdünnung
1	Agfa-Final	96	—
2	Tetenal-Medional	85	—
3	Agfa-Rodinal	—	1 : 20
4	Agfa-Eikonal	—	1 : 20
5	Agfa-Methol-Hydrochinon	—	1 : 5

wurden, während für die Agfa-Schumann-Hart-Platten bei allen Entwicklern die Entwicklungszeiten zwischen $2^1/_2$ und 15 Minuten lagen. Die Ergebnisse stützen sich im wesentlichen auf die mit den größten Vorsichtsmaßnahmen durchgeführte Versuchsreihe III; für die Perutz-Silber-Eosin-Platte, die bei Reihe III aus unbekannten Gründen geschleiert war, wurde dagegen auf die Reihen I und II zurückgegriffen.

Die Exposition der Platten und die Messung der aufgefallenen Elektronenmenge erfolgte im Übermikroskop nach dem früher[1]) beschriebenen Verfahren. Jede Platte wurde nach der Exposition jeweils in 5 Streifen geschnitten; jeder Streifen wurde mit den 4 entsprechend exponierten Streifen der anderen Emulsionen in einem Halter zusammengesteckt. Die 5 entstehenden Einheiten wurden dann zusammen in dem entsprechenden Entwickler entwickelt, wobei die Entwicklung jeder einzelnen Einheit nach der vorgeschriebenen Zeit abgebrochen wurde. Die Entwicklung erfolgte in offenen Schalen, die alle 15 Sekunden einmal geschaukelt wurden. Die Ausmessung der Platte auf Körnigkeit sowie die Schwärzungsmessung wurden ebenfalls nach dem früher[1]) beschriebenen Verfahren durchgeführt*).

[1]) Siehe die Fußnote auf S. 540 u. 541.

*) Die Körnigkeitsbestimmung konnte im Wissenschaftlichen Zentrallaboratorium der Agfa (I. G. Farbenindustrie A.-G.), Wolfen, durchgeführt werden. Für dieses Entgegenkommen und für wertvolle Diskussionen danke ich Herrn Prof. Dr. J. Eggert und Herrn Dr. A. Küster herzlich.

Alle gemessenen Schwärzungen wurden für die drei Versuchsreihen I bis III in Form von Schwärzungskurven aufgetragen, die hier nicht alle wiedergegeben werden können. In Fig. 4 sind als Beispiel die Schwärzungskurven der Agfa-Spektral-Blau-Hart-Platte, die nach den weiter unten mitgeteilten Ergebnissen die kleinste Bildpunktarbeit liefert, für die 5 verschiedenen Entwickler bei je 5 Entwicklungszeiten dargestellt; eingetragen ist dabei jeweils die Schwärzung über Schleier. Man erkennt, daß die Schwärzungskurven mit steigender Entwicklungszeit rasch zu kleineren Elektronendichten wandern. Die an die Kurven angeschriebenen, mit Kreisen umzogenen Körnigkeitswerte steigen dagegen nur langsam an. In Fig. 5 sind die Schwärzungskurven für je 5 verschiedene Entwicklungszeiten wiedergegeben, die bei den 5 untersuchten Emulsionen mit Methol-Hydrochinon als Entwickler erhalten wurden; dieser Entwickler liefert, wie sich weiter unten zeigen wird, für alle Platten die kleinste Bildpunktarbeit.

Aus den Schwärzungskurven wurden für die Schwärzung $S = 0{,}5$ die Werte von $\gamma_{0,5}$ und von $q_{0,5}$ entnommen; dann wurde $a_{0,5} = U \cdot q_{0,5}$ errechnet. Mit Hilfe der Fig. 3 wurden für die drei angenommenen Elektronendichtekontraste $q_2/q_1 = 1{,}1$, 1,3 und 2,0 die zugehörigen Werte von δ_A ermittelt, aus denen mit (3) und (4) sowie den gemessenen Werten von K die Größen des Plattenauflösungsvermögens δ_P berechnet wurden. Mit steigendem Elektronendichtekontrast q_2/q_1 wird dabei δ_P günstiger. $q_2/q_1 = 1{,}1$ kann als recht kleiner Elektronendichtekontrast gewertet werden; wählt man q_2/q_1 größer als 2, so erzielt man keine günstigeren Ergebnisse mehr, weil bei voller Durchentwicklung alle Emulsionen $\gamma_{0,5} > 0{,}5$ lieferten, so daß bereits für $q_2/q_1 = 2$ nach Fig. 3 der Minimalwert für δ_A erreicht wird.

In Tabelle 3 ist die Größe des so berechneten Plattenauflösungsvermögens δ_P in μ für die 5 Platten und die 5 Entwickler, abhängig vom Elektronendichtekontrast q_2/q_1 und der Entwicklungszeit t, eingetragen. Wir sehen, daß bei kleinem q_2/q_1 das Auflösungsvermögen δ_P mit der Entwicklungszeit t weder einheitlich wächst, noch abnimmt. Das liegt daran, daß die bessere Durchentwicklung einerseits die Körnigkeit verschlechtert, so daß δ_P nach (3) und (4) steigen müßte, andererseits aber die Steilheit $\gamma_{0,5}$ verbessert, was sich nach Fig. 3 in Richtung auf kleineres δ_P auswirkt. Diese beiden gegeneinanderlaufenden Einflüsse verursachen die Schwankungen von δ_P mit t. Bei großem Elektronendichtekontrast dagegen erhält man von vornherein in Fig. 3 die Minimalwerte von δ_A, weil der Kontrast auch bei kleinem $\gamma_{0,5}$ bereits für das Auge

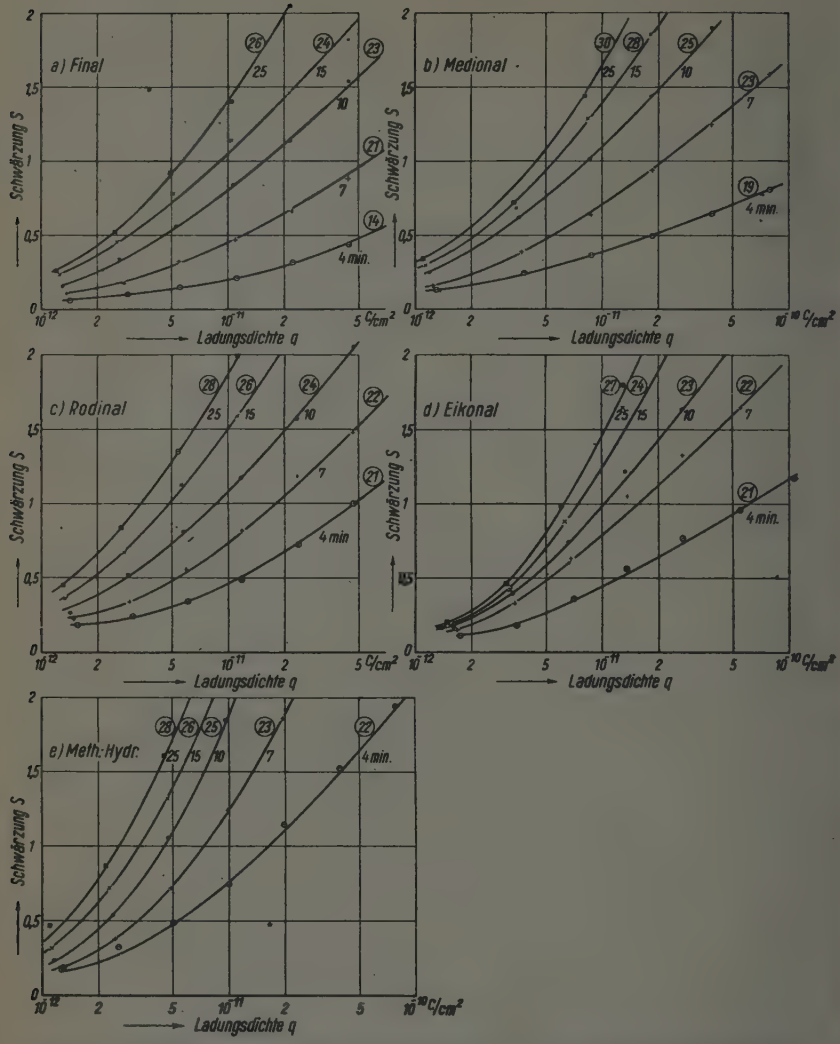


Fig. 4. Schwärzungskurven der Agfa-Spektral-Blau-Hart-Platte bei verschiedenem Entwickler und verschiedener Entwicklungsdauer t. Entwicklertemperatur: $17^0 < \vartheta < 19^0$. Entwicklerkonzentration: Siehe Tabelle 2. Strahlspannung der Elektronen: $U = 80{,}5$ kV. Die an die Kurven geschriebenen, mit einem Kreis umzogenen Zahlen geben die Körnigkeit K an; die einfach angeschriebenen Zahlen bedeuten die Entwicklungsdauer in Minuten. Alle Bilder aus Reihe III.

optimal ist; die mit t steigende Steilheit $\gamma_{0,5}$ ist also hier nicht mehr von Einfluß, so daß die wachsende Körnigkeit K einen mit t stetig steigenden Gang von δ_p bewirkt.

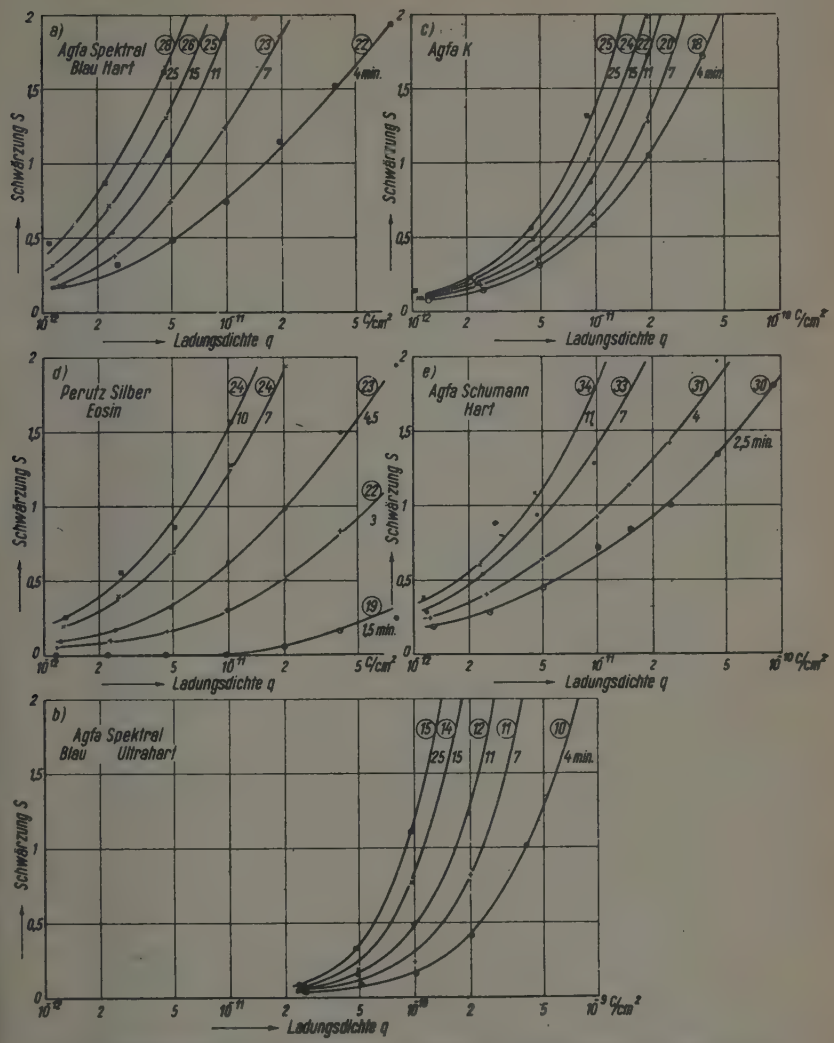


Fig. 5. Schwärzungskurven der untersuchten Emulsionen bei Entwicklung mit Methol-Hydrochinon. Entwicklertemperatur: $17° < \vartheta < 19°$. Entwicklerkonzentration: Siehe Tabelle 2. Strahlspannung der Elektronen: $U = 80{,}5$ kV [bei d) $U = 78$ kV]. Die an die Kurven geschriebenen, mit einem Kreis umzogenen Zahlen geben die Körnigkeit K an; die einfach angeschriebenen Zahlen bedeuten die Entwicklungsdauer in Minuten. Bilder a), b), c) und e) aus Reihe III, Bild d) aus Reihe I.

Die günstigsten Werte des Auflösungsvermögens erhält man mit 20 μ für große Werte von q_2/q_1 und kurze Entwicklungszeit bei der Agfa-Spektral-Blau-Ultrahart-Platte, bei der infolge ihrer großen Steil-

Tabelle 3. Auflösungsvermögen-δ_P der untersuchten 5 Emulsionen bei 5 Entwicklern, 3 Elektronendichtekontrasten q_2/q_1 und 5 Entwicklungszeiten t.

Versuchsreihe:	III				III				III				I				III			
	Agfa-Spektral-Blau-Hart				Agfa-Spektral-Blau-Ultrahart				Agfa-K				Perutz-Silber-Eosin				Agfa-Schumann-Hart			
Entwickler	t \ q_2/q_1	1,1	1,3	2,0	t \ q_2/q_1	1,1	1,3	2,0	t \ q_2/q_1	1,1	1,3	2,0	t \ q_2/q_1	1,1	1,3	2,0	t \ q_2/q_1	1,1	1,3	2,0
	min	μ	μ	μ	min	μ	μ	μ	min	μ	μ	μ	min	μ	μ	μ	min	μ	μ	μ
Final	4	104	57	29	4	62	29	20	4	79	40	22	4	114	60	32	2,5	124	80	37
	7	150	80	41	7	64	29	24	7	106	50	33	6	138	71	39	4	147	89	42
	10	146	71	45	10	67	32	27	10	110	50	37	8	143	69	43	7	173	98	49
	15	146	68	47	15	75	36	33	15	123	56	43	11	138	63	45	10	206	109	58
	25	144	65	51	25	76	38	36	25	140	64	49	15	140	65	47	15	233	120	67
Medional	4	156	97	45	4	59	29	22	4	100	47	32	3	138	72	39	2,5	158	98	46
	7	151	74	45	7	67	31	27	7	118	56	37	5	146	76	41	4	193	116	54
	10	154	73	49	10	67	32	29	10	133	62	43	7	144	71	43	7	244	141	69
	15	165	75	55	15	67	33	31	15	126	58	45	10	153	74	49	10	—	—	—
	25	170	79	59	25	73	36	35	25	139	64	41	13	160	77	53	15	—	—	—
Rodinal	4	146	79	41	4	56	26	22	4	112	55	36	2,5	153	91	43	2,5	243	143	68
	7	145	71	43	7	62	29	26	7	110	50	37	4	154	85	43	4	235	128	66
	10	146	68	47	10	71	32	29	10	118	54	41	6	152	79	43	7	216	103	67
	15	148	68	51	15	72	34	31	15	121	54	49	9	148	72	45	10	222	104	70
	25	152	69	55	25	71	35	33	25	132	60	49	15	130	60	45	15	—	—	—
Eikonal	4	148	77	41	4	50	24	22	4	105	50	33	2	148	86	41	2,5	220	129	60
	7	130	58	43	7	50	25	24	7	104	48	35	3,5	149	82	41	4	212	112	60
	10	124	56	45	10	52	27	26	10	106	49	37	5	142	72	41	7	202	96	63
	15	120	54	47	15	57	29	29	15	108	49	39	7	140	67	43	10	—	—	—
	25	127	58	55	25	61	32	32	25	120	54	45	10	139	64	45	15	—	—	—
Methol-Hydrochinon	4	136	65	43	4	43	21	20	4	101	46	35	1,5	128	65	37	2,5	207	108	59
	7	124	56	45	7	45	22	22	7	106	47	39	3	138	65	43	4	201	97	61
	10	125	56	49	10	45	24	24	10	108	50	43	4,5	133	64	45	7	196	91	65
	15	125	60	51	15	47	28	28	15	114	53	47	7	130	59	47	10	199	92	67
	25	129	60	55	25	47	29	29	25	115	54	49	10	127	56	47	15	—	—	—

heit auch für mittlere und kleine Elektronendichtekontraste die Plattenauflösung δ_P noch recht günstig ist. Als nächste Emulsion folgt die Agfa-K-Platte, worauf sich mit etwa den gleichen Werten von δ_P die Perutz-Silber-Eosin-Platte und die Agfa-Spektral-Blau-Hart-Platte anschließen. Das ungünstigste Auflösungsvermögen hat schließlich die Agfa-Schumann-Hart-Platte, die wegen ihrer geringen Steilheit besonders bei kleinem Elektronendichtekontrast mit etwa 0,2 mm sehr merklich höhere Werte von δ_P liefert als die anderen Emulsionen.

Aus der Arbeitsdichte $a_{0,5}$ und dem berechneten Auflösungsvermögen wurde nach (1) die Bildpunktarbeit A_B berechnet und für alle Versuchsreihen, alle Platten, alle Entwickler und je 3 Elektronendichtekontraste als Funktion der Entwicklungszeit aufgetragen. Im allgemeinen mag es genügen, in den folgenden Kurventafeln (Fig. 6 bis 10) die bei Reihe III erzielten Ergebnisse wiederzugeben; nur in einigen Fällen sollen zum Nachweis der Reproduzierbarkeit der Ergebnisse auch die anderen Reihen mitberücksichtigt werden. Um die Unterscheidung der den verschiedenen Meßreihen entstammenden Werte zu erleichtern, ist in Tabelle 4 die Kennzeichnung der Meßpunkte und Kurven zusammengestellt.

Tabelle 4. Zur Kennzeichnung der Versuchsergebnisse in den Fig. 6 bis 10 nach Versuchsreihe und Elektronendichtekontrast q_2/q_1.

	q_2/q_1	Versuchsreihen 0	I	II	III
Meßpunkte	1,1	△	⊕	⊗	⊙
	1,3	▲	◆	■	●
	2,0	⅄	+	×	•
Kurven		—·—·—	— — —	·····	———

Die Fig. 6 bis 10 fassen die Ergebnisse der Untersuchungen zusammen. Für die Agfa-Spektral-Blau-Hart-Platte ist in Fig. 6 an den Ergebnissen der Versuchsreihen I bis III dargestellt, daß die Resultate in einem für photographische Untersuchungen, bei denen stets mit erheblicher Streuung zu rechnen ist, sehr befriedigende Maße reproduzierbar sind. In ähnlicher Übereinstimmung waren die drei Versuchsreihen bei den anderen Platten, wie z. B. auch aus Fig. 9 hervorgeht,

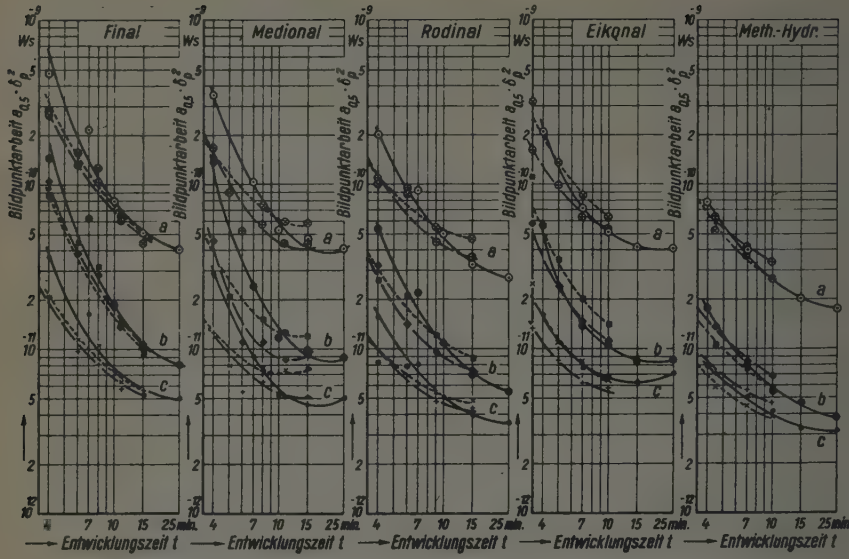


Fig. 6. Bildpunktarbeit A_B der Agfa-Spektral-Blau-Hart-Platte für fünf verschiedene Entwickler und drei verschiedene Elektronendichtenkontraste q_2/q_1, abhängig von der Entwicklungszeit t; a) $q_2/q_1 = 1{,}1$, b) $q_2/q_1 = 1{,}3$, c) $q_2/q_1 = 2{,}0$. Es sind die Versuchsergebnisse der drei Versuchsreihen I, II und III dargestellt.

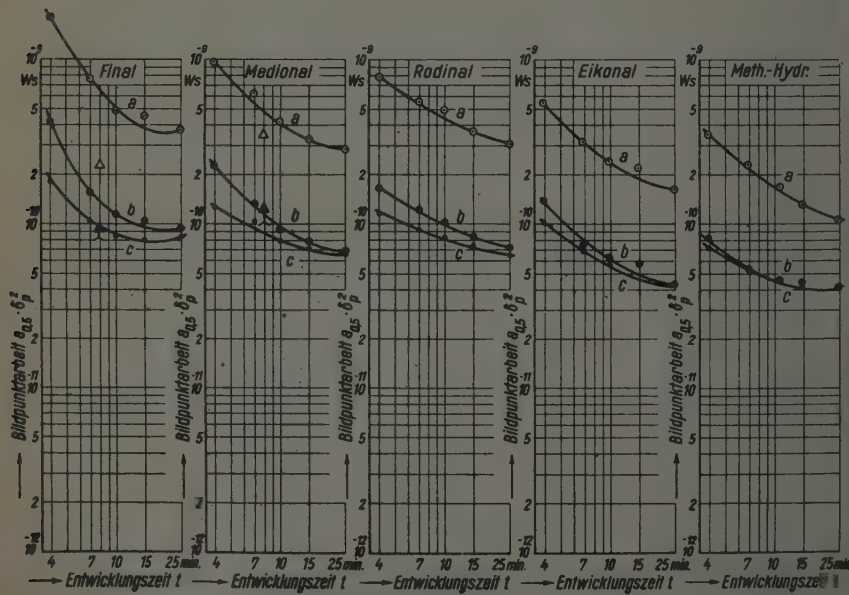


Fig. 7. Bildpunktarbeit A_B der Agfa-Spektral-Blau-Ultra-Hart-Platte für fünf verschiedene Entwickler und drei verschiedene Elektronendichtekontraste q_2/q_1, abhängig von der Entwicklungszeit t; a) $q_2/q_1 = 1{,}1$, b) $q_2/q_1 = 1{,}3$, c) $q_2/q_1 = 2{,}0$. Es sind die Versuchsergebnisse der Versuchsreihen 0 und III dargestellt.

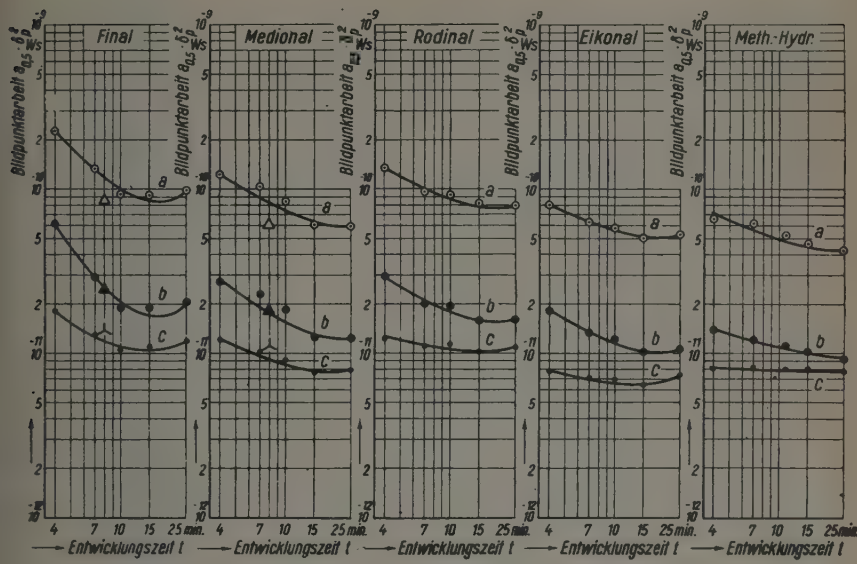


Fig. 8. Bildpunktarbeit A_B der Agfa-K-Platte für fünf verschiedene Entwickler und drei verschiedene Elektronendichtekontraste q_2/q_1, abhängig von der Entwicklungszeit t; a) $q_2/q_1 = 1{,}1$, b) $q_2/q_1 = 1{,}3$, c) $q_2/q_1 = 2{,}0$. Es sind die Versuchsergebnisse der Versuchsreihen 0 und III dargestellt.

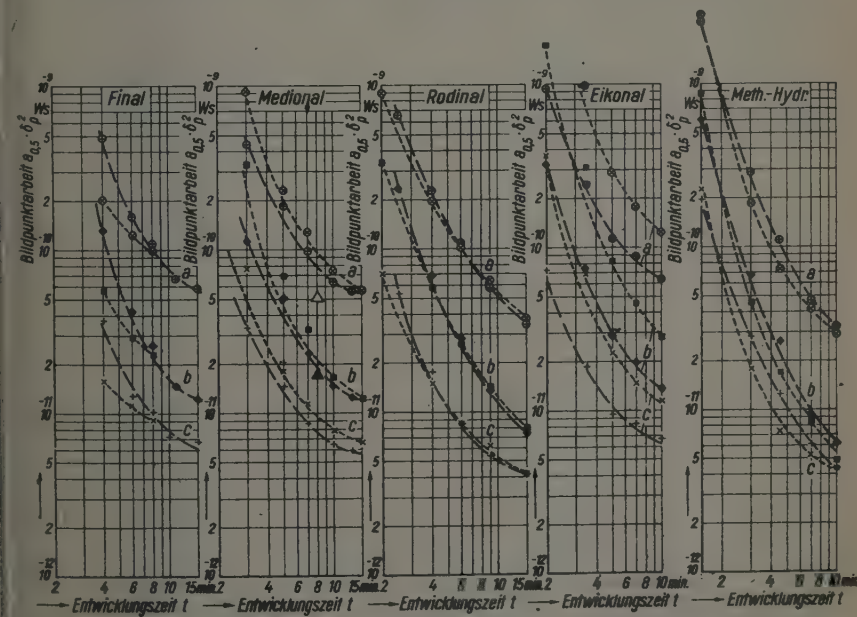


Fig. 9. Bildpunktarbeit A_B der Perutz-Silber-Eosin-Platte für fünf verschiedene Entwickler und drei verschiedene Elektronendichtekontraste q_2/q_1, abhängig von der Entwicklungszeit t; a) $q_2/q_1 = 1{,}1$, b) $q_2/q_1 = 1{,}3$, c) $q_2/q_1 = 2{,}0$. Es sind die Versuchsergebnisse der Versuchsreihen 0 und I und II dargestellt.

die für die Perutz-Silber-Eosin-Platte die Ergebnisse der Reihen I und II darstellt: Abweichungen, wie sie hier bei der Eikonalentwicklung auftreten, gehörten zu den Seltenheiten. Bemerkenswert ist übrigens, daß Unterschiede in den Resultaten der verschiedenen Versuchsreihen bei kleiner Entwicklungszeit größer waren als bei Durchentwicklung. Fig. 10 gibt für die Agfa-Schumann-Hart-Platte die Ergebnisse

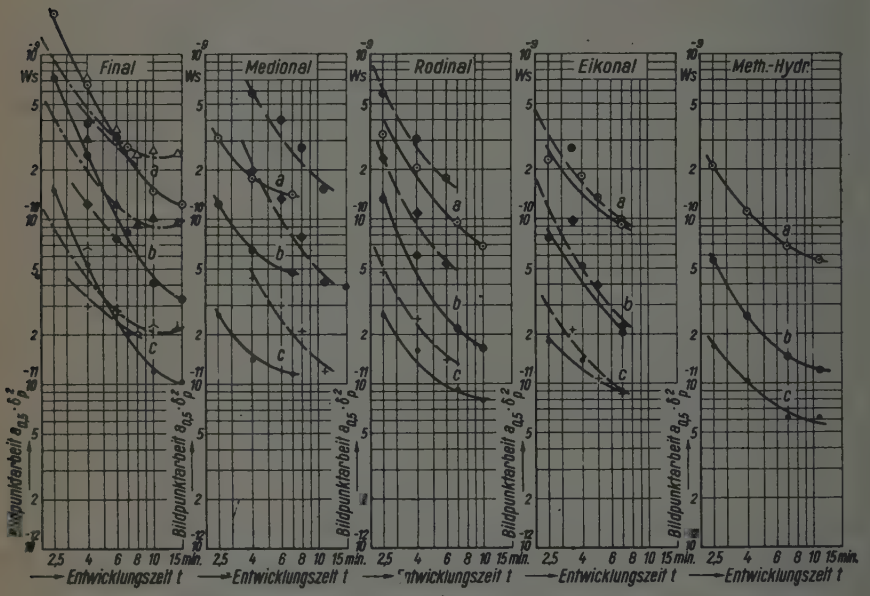


Fig. 10. Bildpunktarbeit A_B der Agfa-Schumann-Hart-Platte für fünf verschiedene Entwickler und drei verschiedene Elektronendichtekontraste q_2/q_1, abhängig von der Entwicklungszeit t; a) $q_2/q_1 = 1{,}1$, b) $q_2/q_1 = 1{,}3$, c) $q_2/q_1 = 2{,}0$. Es sind die Versuchsergebnisse der Versuchsreihe I (Em. 2059/IV) und III (Em. 2083/G. 10) und 0 (Em. 1957) dargestellt.

der Versuchsreihen I und III wieder, weil bei diesen nach Tabelle 1 Platten verschiedener Emulsionsnummer verwendet wurden. Bei Berücksichtigung dieser Tatsache kann man die Übereinstimmung als gut bezeichnen. — Die Ergebnisse der Vorversuchsreihe 0 sind in den Fig. 7 und 8 als Punkte bei Final und Medional, in Fig. 9 als Punkte bei Medional und in Fig. 10 als Kurven bei Final eingetragen. In Anbetracht dessen, daß es sich bei den alten Untersuchungen um Platten anderer Emulsionsnummern gehandelt hatte, ist die Übereinstimmung mit den jetzigen Ergebnissen sehr befriedigend.

Beim Vergleich der Fig. 6 bis 10 fällt zunächst auf, daß die minimal erreichbare Bildpunktarbeit von Plattensorte zu Plattensorte wesentlich

verschiedener ist als von Entwickler zu Entwickler. Innerhalb jeder Abbildung ergibt sich für die gleiche Platte bei den verschiedenen Entwicklern ungefähr das gleiche Bild sowohl nach dem allgemeinen Verlauf der Kurven als nach dem erreichten Minimum. Bei Platten mit normal aufgebauten und normal empfindlichen Emulsionen (Agfa-Spektral-Blau-Hart und Perutz-Silber-Eosin) beobachten wir eine starke Abhängigkeit der Bildpunktarbeit von der Entwicklungszeit; offenbar dringt bei diesen Schichten der Entwickler erst allmählich ein. Einen sehr kleinen Einfluß hat die Entwicklungszeit auf die Bildpunktarbeit der Agfa-K-Platte, was dadurch zu erklären sein dürfte, daß bei dieser Platte besonderer Wert darauf gelegt ist, eine silberlose Deckschicht zu vermeiden, so daß der Entwickler rasch angreifen kann. Bei der feinkörnigen und unempfindlichen Agfa-Spektral-Blau-Ultrahart-Platte ist die Bildpunktarbeit merklich größer als bei den anderen Emulsionen, wie auch schon in den früheren Untersuchungen festgestellt wurde. Hier ist wegen der großen Steilheit dieser Platte bei großen Entwicklungszeiten schon für mittleren Elektronendichtekontrast $q_2/q_1 = 1{,}3$ die minimale Bildpunktarbeit erreicht und für $q_2/q_1 = 2$ ergeben sich dann die gleichen Werte. Bei der Agfa-Schumann-Hart-Platte beobachten wir ebenfalls ein sehr deutliches Absinken der Bildpunktarbeit mit der Entwicklungszeit. Dies ist dadurch zu erklären, daß bei dieser Emulsion für Elektronen der verwendeten Geschwindigkeit nur der kleinere Teil der photographischen Wirkung in der dem Entwickler rasch zugänglichen, silberreichen und gelatinearmen Schumann-Schicht liegt, während die Hauptschwärzung in so tiefer Schicht entsteht, daß auch hier der Entwickler nur langsam angreifen kann. Bei der Agfa-Schumann-Hart-Platte darf die Entwicklung nicht weiter fortgesetzt werden, als in Fig. 10 eingetragen ist, weil mit größerer Entwicklungszeit beginnend an den stark exponierten Stellen in steigendem Maße Ausscheidungen metallisch glänzenden Silbers auf der Plattenoberfläche entstehen, die die Schicht für die Erzeugung eines Bildes unbrauchbar machen; diese Erscheinung tritt bei verschiedenen Emulsionsnummern verschieden früh auf.

In Tabelle 5 ist die minimale Bildpunktarbeit in 10^{-12} Ws eingetragen, die sich aus den Fig. 6 bis 10 für die 5 Platten, 5 Entwickler und 3 Elektronendichtekontraste bei der jeweils günstigsten Entwicklungszeit ergibt. Es stellt sich heraus, daß für alle Entwickler und alle Elektronendichtekontraste die niedrigste Bildpunktarbeit bei der Agfa-Spektral-Blau-Hart-Platte erreicht wird, die daher in Überein-

Tabelle 5. Minimale Bildpunktarbeit $(a_{0,5} \cdot \delta_P^2)$ min in 10^{-12} Ws für 5 Platten, 5 Entwickler und 3 Elektronendichtekontraste q_2/q_1.

Entwickler / Platte	Agfa-Spektral-Blau-Hart			Agfa-Spektral-Blau-Ultrahart			Agfa-K			Perutz-Silber-Eosin			Agfa-Schumann-Hart		
q_2/q_1	1,1	1,3	2,0	1,1	1,3	2,0	1,1	1,3	2,0	1,1	1,3	2,0	1,1	1,3	2,0
Final	38	7,5	5,0	360	90	75	90	19	11	53	11,5	6,0	120	32	10
Medional	38	8,5	4,5	280	65	50	60	12	7,5	52	11	5,6	140	42	11
Rodinal	26	5,2	3,6	290	70	65	80	16	10,5	27	6	4	75	16	8
Eikonal	40	8,5	5,8	160	45	45	50	10	6,3	50	10	6	95	21	8,5
Methol-Hydrochinon	18	3,8	3,1	100	42	42	44	9,5	7,5	20	4,5	3,5	55	12	6

stimmung mit der diesbezüglichen Empfehlung der Herstellerin als für die Aufnahme von Elektronenstrahlen besonders gut geeignet bezeichnet werden muß. An zweiter Stelle ist die Perutz-Silber-Eosin-Platte zu nennen, die vor allem für höhere Spannungen zu empfehlen ist, wie früher festgestellt wurde[1]). Allerdings ist hier zu erwähnen, daß der Schleier dieser Platte höher liegt als der der anderen. Für niedrige Strahlspannungen ist die sehr schleierarme, klare Bilder liefernde Agfa-K-Platte recht geeignet, wie ebenfalls früher ermittelt wurde und jetzt bestätigt werden kann. Es folgt die Agfa-Schumann-Hart-Platte, die für großen Elektronendichtekontrast ungefähr die gleiche Bildpunktarbeit benötigt wie die Agfa-K-Platte, für kleine aber merklich höhere, weil ihre Steilheit nur relativ klein ist. Im Mittel über die 5 Entwickler und die 3 Elektronendichtekontraste liefert die Perutz-Silber-Eosin-Platte die 1,21fache, die Agfa-K-Platte die 1,97fache, die Agfa-Schumann-Hart-Platte die 2,84fache und die Agfa-Spektral-Blau-Ultrahart-Platte die 9,2fache minimale Bildpunktarbeit gegenüber der bei der Agfa-Spektral-Blau-Hart-Platte erzielbaren.

Die hier mitgeteilten Versuchsergebnisse lassen eine Entscheidung der seit längerer Zeit behandelten Frage zu, ob bindemittelarme photographische Schichten nach Schumann für die Übermikroskopie besonders gut geeignet sind. Im Laboratorium für Elektronenoptik der Siemens & Halske A.-G. war seit langem mit gutem Erfolg die der heute lieferbaren Agfa-Spektral-Blau-Hart-Platte ähnliche Agfa-Normal-Platte für übermikroskopische Aufnahmen verwendet worden, als v. Ardenne[2]) [3]) empfahl, bindemittelfreie Photoschichten zu verwenden,

[1]) B. v. Borries, ZS. f. Phys. 119, 498–521, 1942. — [2]) M. v. Ardenne, ebenda 114, 379–388, 1939. — [3]) M. v. Ardenne, Elektronenübermikroskopie, S. 122. Berlin, Springer, 1940.

Da wir bei der Erprobung dieser Schicht keinerlei Vorteile gegenüber der Normalplatte, sondern neben ihrer photographischen Unterlegenheit nur große praktische Schwierigkeiten in der Behandlung und der Beständigkeit dieser Platte fanden, wurde im Rahmen einer größeren Untersuchung[1]) mit zahlreichen anderen Platten auch die Schumann-Hart- und die Schumann-Rapid-Platte auf ihre Eignung bezüglich Empfindlichkeit, Gradation, Auflösungsvermögen und Bildpunktarbeit untersucht. In keinem dieser Punkte wurde eine Überlegenheit der Schumann-Platten gefunden, auch dann nicht, wenn die Schumann-Hart-Platte im Gegensatz zu den anderen seinerzeit untersuchten Platten voll durchentwickelt wurde. Es wurde daher über die Eignung der Schumann-Platten für übermikroskopische Aufnahmen ein negatives Urteil gewonnen und ausgesprochen. In einer Notiz: „Zur Eignung bindemittelarmer Photoschichten in der Elektronenübermikroskopie" hat v. Ardenne[2]) dann kürzlich zu dieser Untersuchung Stellung genommen. Er gab die bei 6 min Eikonal 1 : 15 für die Schumann-Hart-Platte erreichbare Bildpunktarbeit mit $13{,}5 \cdot 10^{-12}$ Ws für $q_2/q_1 = 1{,}31$ und mit $4{,}0 \cdot 10^{-12}$ Ws für $q_2/q_1 = 2$ an; diese Werte setzte er in Vergleich zu der niedrigsten vom Verfasser früher bei einer mäßig vollständigen Entwicklung für die Perutz-Silber-Eosin-Platte gemessenen Bildpunktarbeit und schloß daraus auf eine Überlegenheit der Schumann-Platte für großen Elektronenkontrast. Demgegenüber finden wir für die Schumann-Hart-Platte aus Fig. 10 dieser Arbeit bei der dem v. Ardenneschen Versuch etwa gleichen Entwicklung 8 min Eikonal 1 : 20 $A_B = 20 \cdot 10^{-12}$ Ws für $q_2/q_1 = 1{,}3$ und $A_B = 8{,}5 \cdot 10^{-12}$ Ws für $q_2/q_1 = 2$, also etwa doppelt so hohe Werte, wie v. Ardenne angab.

v. Ardenne entnimmt in der obengenannten Notiz seine Angaben über die Bildpunktarbeit der Agfa-Schumann-Hart-Platte nicht aus einer eigenen *Messung* der Ladungsdichte $q_{0,5}$ und der Körnigkeit K bzw. der Grenzvergrößerung V_g oder des Plattenauflösungsvermögens δ_P, sondern berichtet nur über einen Vergleichsversuch; er ermittelte, um welchen Faktor sich $q_{0,5}$ verkleinerte und V_g vergrößerte, wenn er statt einer sehr wenig vollständigen Entwicklungsart, wie sie der Verfasser ursprünglich für diese Emulsion nach der Anweisung des Herstellers gewählt hatte, seine oben gekennzeichnete, recht weit ausentwickelnde Vorschrift mit Eikonal verwendete. Mittels dieses Faktors errechnete

[1]) Siehe die Fußnotenhinweise auf S. 540, 541 u. 544. — [2]) M. v. Ardenne, ZS. f. Phys. **121**, 1—6, 1943.

er dann, ausgehend von den vom Verfasser für die kurze Entwicklung früher gemessenen Werten, seine oben mitgeteilten Werte. Da, wie wir oben sahen, gerade bei sehr kurzen Entwicklungszeiten erhebliche Streuungen der Meßergebnisse vorkommen, ist mit diesem Verfahren die Möglichkeit eines Fehlers gegeben. Außerdem scheint es uns nicht zulässig zu sein, eine Emulsion, für die man eine günstige, vollständige Entwicklung erprobt hat, als überlegen zu bezeichnen bei Vergleich mit einer anderen Emulsion, ohne daß man auch für diese das geeignete Entwicklungsverfahren ermittelt und zugrunde legt.

Die neuen Ergebnisse des Verfassers beruhen demgegenüber auf unmittelbarer Messung aller eingehenden Größen, sind durch dreifache Ermittlung in den Versuchsreihen I, II und III bestätigt und werden zudem durch den Verlauf der Kurven, aus denen sie nur einen Punkt darstellen, gestützt. Aus diesen Gründen glaubt der Verfasser, bezüglich der *absoluten* Höhe der mit der Schumann-Hart-Platte erreichbaren Bildpunktarbeit den eigenen Messungen eine größere Beweiskraft zusprechen zu können als den Schlüssen aus dem v. Ardenneschen Versuch. Aber auch einen zuverlässigen *Vergleich* verschiedener Platten erhält man nur, wenn man alle Emulsionen den gleichen Messungen und Versuchsvariationen unterwirft. Das ist in der vorliegenden Untersuchung — im Gegensatz zu der Notiz v. Ardennes — geschehen, indem nicht nur wie bei der Schumann-Hart-Platte, sondern auch bei den anderen Emulsionen die Entwicklungszeit bis zur Ermittlung des Optimums variiert wurde. Mit allen diesen Vorsichtsmaßnahmen ergab sich dann die Tabelle 5, nach deren oben mitgeteilter Auswertung die Schumann-Hart-Platte bezüglich der Festhaltung eines Bildpunktes im Mittel um den Faktor 2,8 ungünstiger liegt als die Agfa-Spektral-Blau-Hart-Platte. Wir können daher der neueren Feststellung[1]) v. Ardennes nicht zustimmen, wenn er sagt: „Ungefähr um den Faktor 2 günstiger als die günstigste handelsübliche Schicht mit Bindemittel wird die Agfa-Schumann-Hart-Platte, wenn der Elektronenkontrast 2 zugrunde gelegt wird. Daß diese Überlegenheit besteht, darf nicht überraschen, denn die Schädlichkeit eines die Elektronen zerstreuenden und den Abstand zwischen den einzelnen Bromsilberkörnern heraufsetzenden, für den photographischen Prozeß selbst nicht aktiven Bindemittels ist unmittelbar einzusehen. Die Überlegenheit der bindemittelarmen Schicht ist allerdings nicht mehr so groß, wie früher vom Verfasser angenommen." Die Schumann-Schicht ist geschaffen und mit Erfolg erprobt für eine

[1]) M. v. Ardenne, ZS. f. Phys. **121**, 1—6, 1943.

kurzwellige Ultraviolettstrahlung, deren Durchdringungsvermögen wesentlich kleiner ist als das der Elektronen. Über den Grund, warum die Schumann-Platte bei Elektronenstrahlung zu weniger günstigen Ergebnissen führt als die handelsüblichen Schichten, vergleiche man die nachfolgende Arbeit von Nissen [1]). Offenbar liegt die wesentliche Schwärzung dieser Emulsion gar nicht in der auf die Oberfläche aufgebrachten Schumann-Schicht, sondern in tieferen Lagen der Emulsion [2]). Hiervon kann man sich während der Entwicklung leicht überzeugen: Während nämlich die Platte auch im durchentwickelten Zustand von der Vorderseite gesehen noch annähernd die gelbliche Farbe der unentwickelten Schicht zeigt, beobachtet man von rückwärts die volle Schwärzung; erst unmittelbar nach dem Einlegen in die Fixiersalzlösung sieht man auch von der Vorderseite die Schwärzung, wenn die dünne Oberflächenschicht ausfixiert ist.

Nach allem Gesagten halten wir demnach unsere Ergebnisse aufrecht, daß die Schumann-Platten der uns bekannten Ausführung für übermikroskopische Zwecke weniger leistungsfähig sind als handelsübliche Schichten und dieserhalb sowie wegen ihrer übrigen Nachteile — große Empfindlichkeit gegen mechanische Beschädigung, Unbeständigkeit und Neigung zu Ausscheidungen — nicht für Zwecke verwendet werden sollten, für die sie nicht bestimmt sind.

Die Fig. 6 bis 10 und die Tabelle 5 zeigen, daß von allen benutzten Entwicklern bei allen Platten und bei allen Elektronendichtekontrasten die besten Ergebnisse mit Methol-Hydrochinon erzielt wurden. Es folgen etwa gleichwertig in bei den verschiedenen Platten nicht immer gleicher Reihenfolge die ebenfalls rapide wirkenden Entwickler Rodinal und Eikonal, und mit durchschnittlich höheren Werten der Bildpunktarbeit die Tankentwickler Medional und Final. Einen Anhaltspunkt für die Verschiedenheit der Entwickler möge die Angabe bieten, daß man im Mittel über die 5 Platten und die 3 Elektronendichtekontraste bei Rodinal das 1,50fache, bei Eikonal das 1,56fache, bei Medional das 1,84fache und bei Final das 2,05fache der bei Methol-Hydrochinon erzielbaren Bildpunktarbeit erhält. Insgesamt erscheinen diese Unterschiede nicht allzu erheblich.

[1]) H. F. Nissen, ZS. f. Phys. **122**, 573—588, 1944. — [2]) Ob dies auch für die von v. Ardenne ursprünglich (ZS. f. Phys. **114**, 379—388, 1939) untersuchten Schumann-Platten zutrifft, steht nicht fest. Die Arbeit von v. Ardenne (ZS. f. Phys. **121**, 1—6, 1943) bezieht sich jedoch auf die neuen Schumann-Platten, die aus zwei Schichten, beide Bromsilber enthaltend, aufgebaut sind.

Von besonderem Interesse ist der niedrigste Wert der minimalen Bildpunktarbeit, der von der Agfa-Spektral-Blau-Hart-Platte bei 25 min Entwicklung in Methol-Hydrochinon mit $18 \cdot 10^{-12}$ Ws für

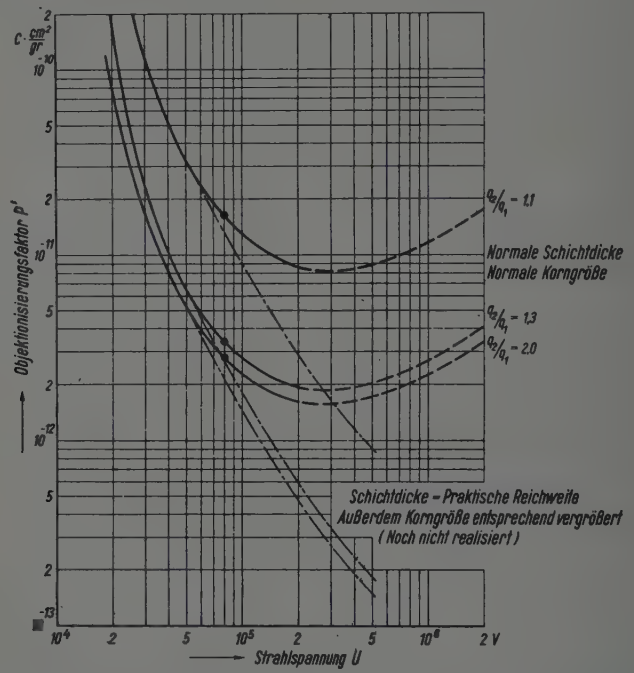


Fig. 11. Zur Berechnung der im Objekt bei einer Aufnahme durch Ionisierung entstehenden Ladungsdichte p_0 und der ohne Abtötung lebender Substanz erzielbaren Auflösung.

p_0 = $\gamma' x/\delta^2 \cdot P' = f(U, q_2/q_1)$,
p_0 = in ein cm² des Objekts entstandene Ladung [C/cm²],
$\gamma' x$ = Massendicke des Objekts [g/cm²],
δ = gewünschte Objektauflösung [cm],
U = Strahlspannung [V],
q_2/q_1 = Elektronendichtekontrast im Bild,
P' = $s_0/\gamma_L \cdot 1/U \cdot a_{0,5} \cdot \delta_P^2$,
s_0 = Sekundärelektronenerzeugung in 1 cm Luftweg bei Parallelfall, [cm⁻¹],
γ_L = spezifisches Gewicht der Luft [g/cm³],
$a_{0,5}$ Arbeitsdichte für $S = 0{,}5$ [Ws/cm²],
δ_P = Auflösungsvermögen der Platte [cm].

Nur die dick eingezeichneten Punkte sind in der vorliegenden Arbeit gemessen. Die Spannungsabhängigkeit war bekannt aus der Arbeit Fußnote [1]) auf S. 544, Fig. 8, die durch diese neue Figur ersetzt wird.

$q_2/q_1 = 1{,}1$, $3{,}8 \cdot 10^{-12}$ Ws für $q_2/q_1 = 1{,}3$ und $3{,}1 \cdot 10^{-12}$ Ws für $q_2/q_1 = 2{,}0$ erreicht wird. Bei der hier zugrunde gelegten Strahlspannung von 80 kV war in einer früheren Untersuchung[1]) mit der seinerzeit günstigsten Perutz-Silber-Eosin-Platte und 8 min Entwicklung in Medional für $q_2/q_1 = 1{,}14$ eine Bildpunktarbeit von 50

[1]) Fußnote [1]) auf S. 544.

$\cdot 10^{-12}$ Ws, für $q_2/q_1 = 1{,}31$ $A_B = 16 \cdot 10^{-12}$ Ws und für $q_2/q_1 = 2{,}0$ $A_B = 8{,}5 \cdot 10^{-12}$ Ws erreicht worden. Wir können also feststellen, daß durch die Erprobung eines geeigneteren Entwicklers und einer längeren Entwicklungszeit gegenüber den seinerzeit erreichten Minimalwerten eine Verbesserung um etwa den Faktor 3 für die niedrigsten Werte der Bildpunktarbeit erzielt ist. Man darf die Vermutung äußern, daß diese Verbesserung gegen die früheren Ergebnisse auch bei höheren Strahlspannungen erhalten bleibt, daß sie aber bei den kleineren Strahlspannungen allmählich kleiner wird, weil hier die Schichten auch schon bei einer Entwicklung von 8 min in Medional um so vollständiger durchentwickelt sein dürften, je geringere Schichtdicken durch die Elektronen exponiert sind. Für die Größe P', die nach Gl. (5) und (6) für das bei Lebendmikroskopie erreichbare Auflösungsvermögen maßgebend ist, würden wir damit unter Zugrundelegung der früher ermittelten Spannungsabhängigkeit [vgl. dazu Fig. 8 in Arbeit [1])] etwa den in Fig. 11 eingetragenen Verlauf erwarten dürfen. Wie seinerzeit ist auch hier wiederum strichpunktiert der Verlauf eingetragen, der möglicherweise mit sehr grobkörnigen, in ihrer Dicke der Elektronenreichweite entsprechenden Spezialschichten erreicht werden könnte, deren Realisierbarkeit jedoch nicht sicher ist.

Wir können nun mit den neuen Werten von P' abermals[1]) berechnen, welches Auflösungsvermögen bei der übermikroskopischen Untersuchung lebender Substanz ohne Abtötung erzielbar ist. Für drei charakteristische Objekte sind in Tabelle 6 die Werte zusammengestellt, die sich aus Gl. (5) und Fig. 11 ergeben. Für die Halbwertsdosis der drei als Beispiele betrachteten Objekte sind Angaben aus einer kürzlich erschienenen, die Ergebnisse der bisher bekanntgewordenen Strahlenabtötungsversuche zusammenfassenden Arbeit von Zimmer[2]) benutzt worden. In Tabelle 6 sind sicher erreichbar die Werte der ersten Zeile und wahrscheinlich erreichbar die der zweiten Zeile, wogegen es sehr unsicher ist, ob die erwähnte Spezialschicht der dritten Zeile realisierbar ist. Selbst wenn man das aber annimmt, würde man bei einem primitiven Objekt, wie es immerhin auch Colibakterien darstellen, und bei der nur sehr niedrigen Forderung, daß man sich mit der Aufnahme von vier Zuständen der Objekte begnügt, nur ein Auflösungsvermögen von 500 mμ erzielen, das also durchaus im lichtmikroskopischen Bereich liegt. Danach läßt sich eine Übermikroskopie lebender

[1]) B. v. Borries, ZS. f. Phys. **119**, 498—521, 1942. — [2]) K. G. Zimmer, Biolog. Zentralbl. **63**, 72—107, 1943.

Tabelle 6. Das bei einer Aufnahme unter Abtötung von 50% der Objekte erreichbare Auflösungsvermögen δ in mμ.
Zugrunde gelegt ist der günstige Fall eines hohen Elektronendichtekontrastes $q_2/q_1 = 2$; bei n Aufnahmen verschlechtert sich das erreichbare Auflösungsvermögen um $\sqrt{n}$.

U kV	Bemerkungen	P' $10^{-12}\,C\,\frac{cm^2}{g}$	Sporen von Penicillum HWD = 150000 r	Bacterium Coli HWD = 3000 r	Eier von Drosophila melanogaster HWD = 190 r
80	Agfa-Spektral-Blau-Hart nach vorliegenden Messungen	2,8	83	590	2350
220	Agfa-Spektral-Blau-Hart, extrapoliert nach früheren Messungen	1,6	63	450	1780
220	Noch nicht realisierte, günstigstmögliche Spezialschicht	0,42	32	230	910

Substanz mit Elektronenstrahlen auf den photographischen Schichten der bisher bekannten Art trotz der durch vollständige und zweckmäßige Entwicklung der Emulsionen erzielten Verkleinerung der Bildpunktarbeit leider nicht aufbauen, wenn man darunter die Beobachtung mehrerer Phasen im Ablauf eines Lebensgeschehens verstehen will.

Außer den energetischen Schwierigkeiten, die durch das Verhältnis der Elektronenempfindlichkeit der Objekte einerseits und der photographischen Schicht andererseits sowie durch Objekterwärmung[1]) gegeben sind, hat eine praktische Übermikroskopie lebender Substanz noch mit den besonderen Verhältnissen zu rechnen, die durch die sonstigen Eigenschaften des Übermikroskops und der Lebensträger bedingt sind. Beim Lichtmikroskop erstreckt sich die Lebendmikroskopie auf Auflichtmikroskopie größerer Teile lebender Körper und auf die Untersuchung von einzelnen Zellen oder sonstigen dünnen durchsichtigen Objekten in feuchter Umgebung. Die erstere Aufgabe ist beim Übermikroskop nach der Methode der Lackhautabzüge[2]) nur so lösbar, daß in gewissen Zeitabständen Häute hergestellt, abgehoben und untersucht werden, was eine laufende Beobachtung nicht voll ersetzen kann. Außerdem zeigt die Lackhaut nur die wirkliche *Oberfläche*, während bei der Auflichtmikroskopie mit Licht

[1]) B. v. Borries u. W. Glaser, Kolloid-ZS. **106**, 123—128, 1944. — [2]) F. Krause u. H. Mahl, Kolloid-ZS. **105**, 53—55, 1943.

auch tiefere Schichten gut erfaßt werden. Eine Rückstrahlabbildung der Oberfläche stößt im Übermikroskop wegen der hier besonders hohen Elektronenbelastung auf noch erheblich größere Schwierigkeiten als eine Durchstrahlungsabbildung. Die Durchstrahlungsabbildung im Übermikroskop ist aus apparativen Gründen beschränkt, weil die Lebewesen nicht nur teilweise, wie das beim Lichtmikroskop genügt, vor das Objektiv gebracht zu werden brauchen, sondern ohne durch das Vakuum abgetötet zu werden vollständig in den Vakuumraum eingeführt werden müssen, wenn nicht sehr große experimentelle Schwierigkeiten in Kauf genommen werden sollen. Dieser Forderung genügen von den lichtmikroskopisch lebend untersuchbaren Objekten nur wenige, z. B. gewisse Zellen wie Bakterien und nichtcelluläre Elemente wie Viruselementarkörper, Bakteriophagen usw. Trotz neuerer erfolgreicher Versuche[1]), auch bei höheren in der Nachbarschaft des Objektes herrschenden Gasdrucken zu beobachten, wird man auch weiterhin im wesentlichen mit der Tatsache rechnen müssen, daß die Objekte in einem Raum stark herabgesetzten Gasdrucks mehr oder weniger intensiv getrocknet untersucht werden. Damit befinden sie sich im Augenblick der Beobachtung in einem Milieu, das — abgesehen von den Elektronenstrahlen — zwar nicht abtötet, den Ablauf der Lebensfunktionen aber praktisch unterbricht. Man kann nach einer übermikroskopischen Aufnahme eine auf einer Lebensfunktion beruhende Änderung des Objektes nur erwarten, wenn der Lebensträger danach wieder in feuchte Umgebung, in Nährflüssigkeit oder z. B. beim Virus gar in eine lebende Zelle gebracht wird. Das Wiederfinden der identischen Objekte nach diesen Einwirkungen ist sehr schwierig oder unmöglich, wenn man nicht das Objekt auf seinem Trägerfilm belassen kann. Aus diesem Grunde kann man beim Virus eine Lebensfunktion nur feststellen, wenn man die Wirtszelle durchstrahlen kann, so daß das Virus in ihr zu beobachten ist. Günstiger liegen diese Verhältnisse bei den Bakteriophagen[2]), bei denen einmal die Wirtszelle (das Bakterium) im Vergleich zu anderen Zellen ungewöhnlich klein ist und zum anderen der Vermehrungsvorgang sich wahrscheinlich auf der Zelloberfläche abspielt.

In der vorliegenden Untersuchung ist das bei Abbildung lebender Substanz erreichbare elektronenmikroskopische Auflösungsvermögen berechnet worden mit der Forderung an die photographische Platte,

[1]) E. Ruska, Kolloid-ZS. **100**, 212—219, 1942. — [2]) H. Ruska, Erg. d. Hyg. **25**, 437—498, 1943.

daß sie die darzustellenden Objekteinzelheiten wiedergeben soll, ohne durch ihre Körnigkeit die Möglichkeit zu Mißdeutungen zu bieten. Es wird also verlangt, daß zwei auf der photographischen Platte festgehaltene Masseteilchen sich so deutlich aus dem körnigen Untergrund herausheben, daß das Auge nicht durch die statistischen Zusammenballungen der Silberkörner in der Sicherheit des Urteils beeinträchtigt wird. Diese Forderung prägt sich aus in der in Gl. (4) eingeführten Konstanten 100 [1]), welche die zulässige Vergrößerung so begrenzt, daß die Körnigkeit der Platte für ein normales Auge aus 25 cm Betrachtungsabstand unterhalb der Störgrenze bleibt. — In der oben erwähnten Notiz „Zur Eignung bindemittelarmer Photoschichten in der Elektronenübermikroskopie" erörtert v. Ardenne [2]), daß das für die Lebendmikroskopie verwendbare Auflösungsvermögen der photographischen Platte um den Faktor 2 günstiger liege, weil man sich bei solchen Aufnahmen über die zu erwartenden Strukturen aus höher vergrößerten Bildern von abgetöteten Objekten orientieren könne. Demgegenüber ist darauf hinzuweisen, daß es ja einerseits gerade der Sinn der Lebendmikroskopie ist, solche Einzelheiten sichtbar zu machen, die beim lebenden Objekt anders sind als beim toten, die also nicht durch Vergleich erschlossen werden können. Andererseits ist es Aufgabe der Lebendmikroskopie, *Änderungen* des Ortes, der Größe oder der Form gewisser Strukturelemente festzuhalten, die sich zwischen verschiedenen Aufnahmen als Funktion des Lebens ereignet haben. Dabei ist aber zu bedenken, daß bei den bisher wichtigen biologischen Objekten der Übermikroskopie eine Lebensfunktion im ausgetrockneten Zustand nicht beobachtet worden ist, so daß, um solche herbeizuführen, die Objekte nach dem oben Gesagten zwischen den Aufnahmen in Wasser, in Nährflüssigkeit oder gar in lebende Zellen gebracht werden müssen. Aus der übermikroskopischen Aufnahme muß dann also entschieden werden, ob die fragliche Veränderung eine echte Lebensfunktion darstellt oder ob sie nur auf den inzwischen wirksam gewesenen Milieuveränderungen beruht. Auch dafür ist ja wohl eine besonders große Sicherheit bei der Ausdeutung der übermikroskopischen Aufnahmen erforderlich.

Um zu einer Entscheidung der Frage zu kommen, wieweit das in Tabelle 3 eingetragene und für die Abschätzung der Grenzen der Lebendmikroskopie zugrunde gelegte Auflösungsvermögen von den untersuchten

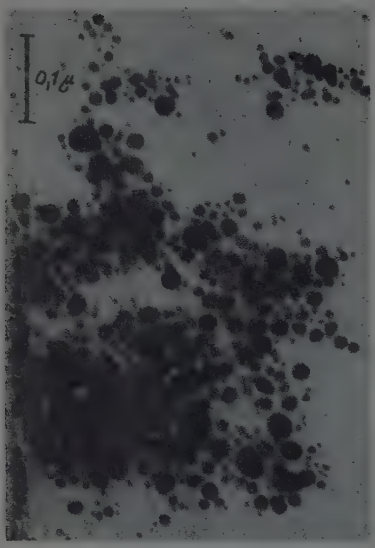
[1]) B. v. Borries, ZS. f. angew. Photographie 4. 42—58, 1942. — [2]) M. v. Ardenne, ZS. f. Phys. 121, 1—6, 1943.

Emulsionen im Experiment erreicht wird, und ob vielleicht mit einer gewissen Unsicherheit auch noch kleinere Strecken aufgelöst werden können, wurde die im folgenden beschriebene Versuchsreihe angesetzt.

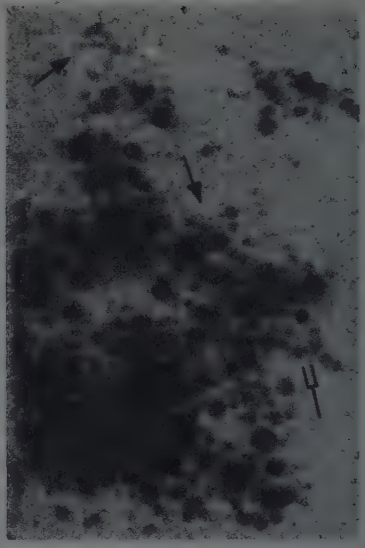
Mit Hilfe eines Übermikroskops, das rasch von großen zu kleinen Vergrößerungen überzugehen erlaubt[1]), wurde ein bestimmtes Objekt (kolloides Silber auf einer Kollodiummembran) einmal in 40000facher Vergrößerung aufgenommen, wobei die wahre Größe und gegenseitige Lagerung der einzelnen Kolloide bequem vermessen werden konnten. Sodann wurde mit unveränderten Verhältnissen am Objektiv, d. h. mit gleicher Objektauflösung, der gleiche Objektausschnitt in nur 4000facher Vergrößerung auf vier der untersuchten Emulsionen aufgenommen (Agfa-Spektral-Blau-Hart, Agfa-Spektral-Blau-Ultrahart, Agfa-K und Agfa-Schumann-Hart). Weil das Auflösungsvermögen des benutzten Leuchtschirmes schlechter als das der zu untersuchenden Platten war, konnten diese 4000fach vergrößerten Aufnahmen nicht visuell scharf gestellt werden. Es wurden daher für jede Plattensorte mehrere (5 bis 8) Blindaufnahmen mit sehr wenig verschiedenen Objektivströmen gemacht, die um den von der hochvergrößerten Aufnahme her bekannten Scharfstellungspunkt streuten; aus jeder Reihe wurden die Bilder bester Schärfe herausgesucht. Für diese kann angenommen werden, daß die Auflösung des Elektronenbildes ebenso gut war wie bei dem hochvergrößerten Bild, so daß die gegenüber diesem zutage tretende Bildverschlechterung allein durch die mangelnde Objekttreue der Emulsionen hervorgerufen ist. Da die Aufnahmen einer Reihe auch stets etwas verschieden exponiert waren, konnte in Übereinstimmung mit früheren Ergebnissen festgestellt werden, daß die Abbildungstreue einer photographischen Platte bei sehr kleinen Grundschwärzungen und bei sehr großen Grundschwärzungen schlechter ist als bei einer mittleren von etwa $S = 0{,}5$ bis $S = 1$.

Das Ergebnis der Untersuchung zeigt die Fig. 12. Alle Aufnahmen sind auf den gleichen Endmaßstab $A = 120000$ gebracht worden. Fig. 12a zeigt die dreifach nachvergrößerte 40000fache Aufnahme mit dem wahren Aussehen der untersuchten Gruppe des Silberkolloids. In Fig. 12b bis 12d sind bei jeweils 30facher lichtoptischer Nachvergrößerung drei verschiedene Exemplare der Agfa-Spektral-Blau-Hart-Platte wiedergegeben, während für die Agfa-Spektral-Blau-Ultrahart-Platte und die Agfa-K-Platte in Fig. 12e und 12f in ebenfalls 30facher Nachvergrößerung je nur ein Beispiel gebracht wurde. Für

[1]) E. Ruska, Kolloid-ZS. 107, 2—16, 1944.

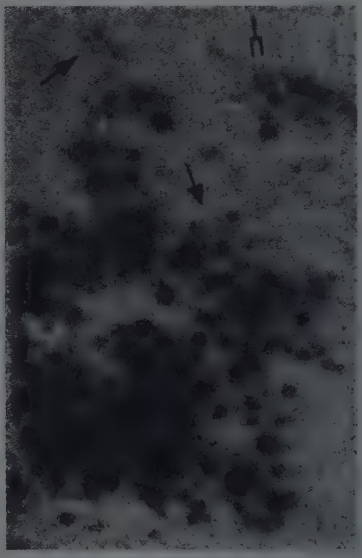


a) 5080/43. $A_\varrho = 40000$; $A_l = 3{,}0$; $A = 120000$.



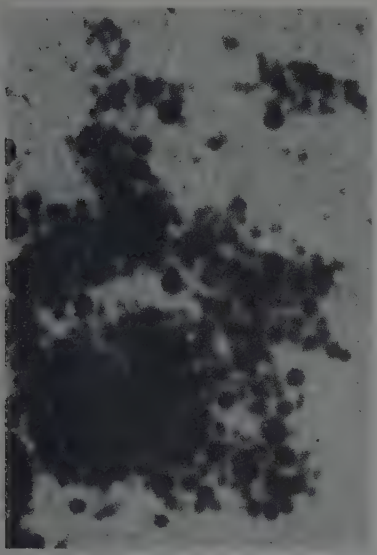
b) Agfa-Spektral-Blau-Hart. 5133/43. $A_\varrho = 4000$; $A_l = 30$; $A = 120000$; $S = 0{,}75$; Methol-Hydrochinon 1:5; $3^1/_2$ min. Kopie auf Brovira Normal. $\delta_P = 50\ \mu$; $\delta_P = 42\ \mu$.

c) Agfa-Spektral-Blau-Hart. 5134/43. $A_\varrho = 4000$; $A_l = 30$; $A = 120000$; $S = 0{,}76$; Methol-Hydrochinon 1:5; $5^1/_2$ min. Kopie auf Brovira Normal. $\delta_P = 50\ \mu$; $\delta_P = 44\ \mu$.

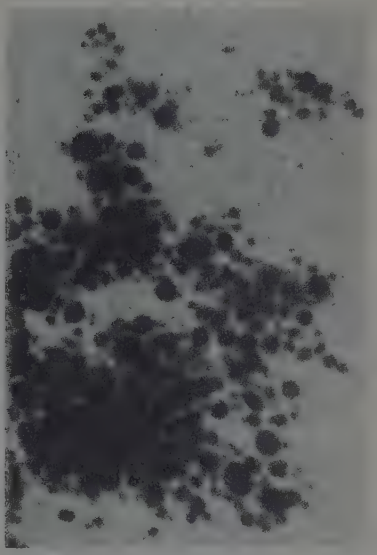


d) Agfa-Spektral-Blau-Hart. 5135/43. $A_\varrho = 4000$; $A_l = 30$; $A = 120000$; $S = 0{,}85$; Methol-Hydrochinon 1:5; $5^1/_2$ min. Kopie auf Brovira Normal. $\delta_P = 50\ \mu$; $\delta_P = 44\ \mu$.

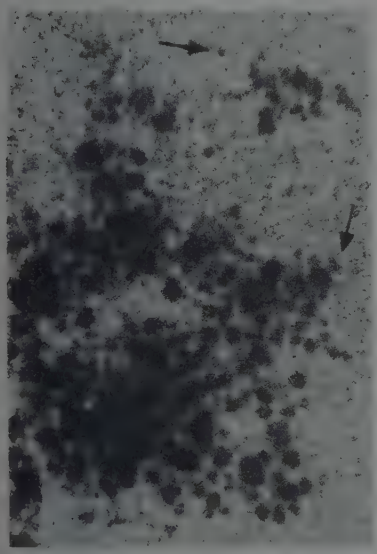
Abb. 12. Vergleich der Abbildungstreue und des Auflösungsvermögens der Emulsionen. $A_\varrho =$ F maßstab; $S =$ Schwärzung des Untergrundes der Platte; Strahlspannung $U = 78$ kV; $\delta_P =$ Steilheit $\gamma_{0,5}$ nach Gl. (3), (4), (2) und Abb. 3 für $q_2/q_1 = 2$ bestimmt



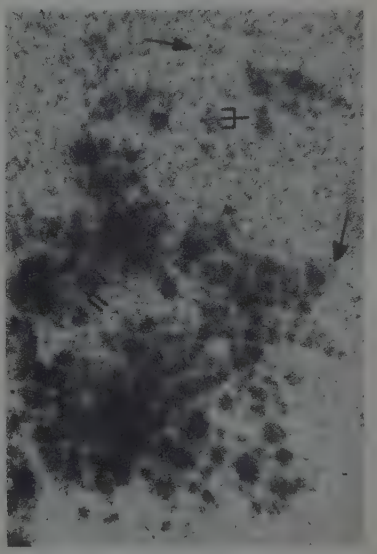
e) Agfa-Spektral-Blau-Ultrahart. 5084/43. $A_e = 4000$; $A_l = 30$; $A = 120000$; $S = 0{,}44$; Methol-Hydrochinon 1:5; 25 min. Kopie auf Brovira Hart. $\delta_P = 37\,\mu$; $\delta_P = 29\,\mu$.



f) Agfa-K. 5137/43. $A_e = 4000$; $A_l = 30$; $A = 120000$; $S = 1{,}10$; Methol-Hydrochinon 1:5; $5^1/_2$ min. Kopie auf Brovira Normal. $\delta_P = 40\,\mu$; $\delta_P = 37\,\mu$.



g) Agfa-Schumann-Hart. 5071/43. $A_e = 4000$; $A_l = 30$; $A = 120000$; $S = 0{,}42$; Eikonal 1:20; 3 min. Kopie auf Brovira Hart. $\delta_P = 67\,\mu$; $\delta_P = 60\,\mu$.



h) Agfa-Schumann-Hart. 5072/43. $A_e = 4000$; $A_l = 30$; $A = 120000$; $S = 0{,}45$; Eikonal 1:20; 3 min. Kopie auf Brovira Hart. $\delta_P = 67\,\mu$; $\delta_P = 60\,\mu$.

...nenoptischer Abbildungsmaßstab; A_l = Lichtoptische Nachvergrößerung; A = Gesamt-Abbildungs-...sungsvermögen aus der Aufnahme bestimmt; δ_P = Auflösungsvermögen aus Körnigkeit K und ...ch Tabelle 3). Entwicklertemperatur: 18° C; Objekt: kolloides Silber.

die Agfa-Schumann-Hart-Platte schließlich sind wieder zwei auf verschiedene Platten gemachte 4000fache Aufnahmen in 30facher lichtoptischer Nachvergrößerung wiedergegeben. In der Unterschrift zu den Bildern sind die Entwicklungsdaten eingetragen.

Ein Vergleich der Bilder zeigt sehr deutlich die verschiedene Abbildungstreue und das verschiedene Auflösungsvermögen dieser Emulsionen. Die klarsten Bilder liefert der Erwartung gemäß die Agfa-Spektral-Blau-Ultrahart-Platte und die Agfa-K-Platte. Tatsächlich ist die Agfa-Spektral-Blau-Ultrahart-Platte noch etwas überlegen, wenn dies auch in den Fig. 12e und 12f nicht so sehr deutlich zur Geltung kommt, weil in dem einen Fall die nicht so günstige Schwärzung $S = 0{,}44$ und die lange Entwicklungszeit von 25 min, und in dem anderen Fall die sehr günstige Schwärzung $S = 1{,}1$ bei kleiner Entwicklungszeit von $5^1/_2$ min vorlag. Die in Fig. 12g und 12h wiedergegebene Agfa-Schumann-Hart-Platte liefert auch unter Berücksichtigung der hier vorhandenen nicht optimalen Schwärzungen von $S = 0{,}42$ und $S = 0{,}45$ deutlich die wenigst getreue Wiedergabe des Objektes. Abgesehen von dem geringen Auflösungsvermögen ist hier das Kornbild besonders stark zerrissen. Aus den Bildern läßt sich für die verschiedenen Emulsionen derjenige Abstand entnehmen, den zwei noch sicher voneinander getrennt dargestellte Objekte haben. Dieses aus den Aufnahmen bestimmte Auflösungsvermögen ist als δ'_P bezeichnet und in den einzelnen Unterschriften vermerkt. Daneben ist der Wert des Auflösungsvermögens δ_P eingetragen, der sich für die betreffende Emulsion und die angewendete Entwicklungszeit aus der Messung von Körnigkeit und Steilheit nach Gleichungen (2), (3), (4) und Fig. 3 bei einem Elektronenkontrast $q_2/q_1 = 2$ aus Tabelle 3 findet. Es zeigt sich, daß das experimentell erreichbare Auflösungsvermögen nicht ganz so gut wie das für diesen hohen Elektronenkontrast berechnete ist, sondern um 8 bis 28 % ungünstiger liegt. Dies mag vielleicht zum Teil daran liegen, daß die Silberkolloide, welche bei diesem Versuch einen Durchmesser von 9 bis 17 mμ aufweisen, nicht ganz den Elektronenkontrast 2 verursachen. Indessen kann man auch bei lebender Substanz im Bereich der interessierenden Teilchengrößen keinen besseren Kontrast erwarten, weil bei einem spezifischen Gewicht von 1,4 Partikel von 70 bis 130 mμ Dicke in der Kontrastwirkung etwa den in unserem Versuch benutzten Silberkolloiden entsprechen. Trotz der kleinen Abweichung steht aber die aus den gemessenen Werten berechnete Größe des Auflösungsvermögens δ_P mit der hier unmittelbar bestimmten δ'_P in sehr befriedigender

Übereinstimmung. Man erkennt jedenfalls, daß die Emulsionen sicher keine Schlüsse mehr zulassen über Einzelheiten des Elektronenbildes, die halb so groß sind wie die in den Bildunterschriften eingetragenen Werte des von uns berechneten und in Tabelle 3 zusammengestellten Auflösungsvermögens δ_P, welches bereits kleiner ist als das experimentell erreichte Auflösungsvermögen δ'_P. Infolgedessen ist die Annahme von v. Ardenne, man könne aus einer photographischen Emulsion ein um den Faktor 2 besseres Auflösungsvermögen erhalten, als der Verfasser in einer früheren Arbeit nach dem auch hier angewendeten Verfahren bestimmt hat, nicht berechtigt. Entsprechend sind auch die von v. Ardenne daran geknüpften Folgerungen über das bei Lebendmikroskopie erreichbare Auflösungsvermögen nicht gesichert.

Für die Agfa-Spektral-Blau-Hart-Platte wurden drei verschieden vergrößerte Aufnahmen und für die Agfa-Schumann-Platte zwei verschieden vergrößerte Aufnahmen der gleichen Objektstelle wiedergegeben, weil gezeigt werden sollte, daß aus einer allzu hoch nachvergrößerten photographischen Aufnahme Trugschlüsse gezogen werden können. Man beobachtet in den Fig. 12b bis 12d und 12g bis 12h z. B. an den mit einem Pfeil bezeichneten Stellen Objekte, die sehr wohl auf einer der beiden Aufnahmen zu sehen, auf einer anderen aber im Korn untergegangen sind. Andererseits beobachtet man gelegentlich, z. B. an den mit einer Gabel bezeichneten Stellen, dicht nebeneinander Schwärzungshäufungen in einem Bild, die man als dem Objekt zugehörig bezeichnen könnte, die man aber auf einer zweiten Aufnahme desselben Objektes nicht findet und die tatsächlich auch nicht vorhanden war, wie der Vergleich mit dem in unserem Falle durch die Fig. 12a genau bekannten Objekt ergibt. Diese Erscheinung zeigt, daß das Auflösungsvermögen einer Emulsion durch *eine* — von der Entwicklung und vom Elektronenkontrast abhängige — Strecke nicht vollständig angegeben werden kann, sondern daß sie genau nur beschrieben wird durch die Wahrscheinlichkeit, mit der zwei Objekteinzelheiten bestimmten Abstandes, welche den betreffenden Kontrast liefern, von der photographischen Platte jedes einzeln für sich und beide richtig voneinander getrennt wiedergegeben werden. Diese Wahrscheinlichkeitsfunktion hat für Objekte von 1,5fachem Abstand des von uns als δ'_P angegebenen Auflösungsvermögens bereits den Wert 1 erreicht und fällt in der Nähe von δ'_P dann rasch auf 0 ab.

Der Frage des Auflösungsvermögens photographischer Platten wurde in der vorliegenden Arbeit eine so ausführliche Untersuchung

Tabelle 7. Das beim Nachweis des Auflösungsvermögens δ von Übermikroskopen in Anspruch genommene Auflösungsvermögen $A_e \cdot \delta$ der photographischen Platten. A_e = elektronenoptischer Abbildungsmaßstab.

Nr.	Jahr	Autor	Zeitschrift	δ mμ	A_e —	$\delta \cdot A_e$ μ	Emulsion	Bemerkungen
			A. Durchstrahlungs-Übermikroskope.					
1	1934	E. Ruska	ZS. f. Phys. **87**, 580, 1934	50	8 000	400	Herzog-Artho-Isodux	Von Leuchtschirm photographiert
2	1935	E. Driest u. H. O. Müller	ZS. wiss. Mikrosk. **52**, 53, 1935	40	5 000	200		
3	1937	D. Beischer u. F. Krause	Naturwiss. **25**, 825, 1937	45	2 500	112		
4	1937	D. Beischer u. F. Krause	Naturwiss. **25**, 825, 1937	10	3 100	31		
5	1938	B. v. Borries u. E. Ruska	Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Werken **17**, 99, 1938	10	20 400	204	Agfa-Normal	
6	1939	B. v. Borries u. E. Ruska	ZS. f. techn. Phys. **20**, 232, 1939	7	27 000	189	Agfa-Normal	
7	1939	H. Mahl	ZS. f. techn. Phys. **20**, 316, 1939	15	5 000	75		
8	1939	O. E. Radczewski, H. O. Müller u. W. Eitel	Zement **28**, 693, 1939	5	31 000	155	Agfa-Normal	
9	1940	M. v. Ardenne	Naturwiss. **28**, 113, 1940	4	31 000	124	Agfa-Schumann-Hart	
10	1940	H. Mahl	Jahrb. d. AEG-Forschung **7**, 43, 1940	8	6 000	48		
11	1940	M. v. Ardenne	ZS. f. Phys. Chem. (A) **187**, 1, 1940.	3	—	—		A_e nicht bekannt
12	1940	B. v. Borries u. E. Ruska	Erg. d. exakt. Naturwiss. **19**, 271, 1940	2,5	29 000	73	Agfa-Normal	
13	1941	M. v. Ardenne	Phys. ZS. **42**, 72, 1941	2,2	24 000	53		
14	1944	E. Ruska	Kolloid-ZS. **107**, 2, 1944	2,0	44 000	88	Agfa-Spektral-Blau-Rapid	
			B. Rückstrahlungs-Übermikroskop.					
15	1940	B. v. Borries	ZS. f. Phys. **116**, 370, 1940	25	5 700	142	Agfa-Normal	
			C. Emissions-Übermikroskope.					
16	1942	E. Brüche (W. Mecklenburg)	Ramsauer, Elektronenmikroskopie, Berlin, Springer, 1942	140	—	—		A_e nicht bekannt
17	1942	H. Boersch	Naturwiss. **30**, 120, 1942	70	320	22		
18	1942	E. Brüche (W. Mecklenburg)	Kolloid-ZS. **100**, 192, 1942	55	1 800	99		
19	1942	E. Kinder	Naturwiss. **30**, 591, 1942	140	1 800	252		

gewidmet, weil man sich der geschilderten Zusammenhänge bei der Deutung übermikroskopischer Bilder bewußt sein muß. Wie durch die Wellennatur der Elektronenstrahlen mancherlei Einzelheiten im übermikroskopischen Bild auftreten, die, wenn sie dem Objekt zugerechnet werden, zu Täuschungen führen [vgl. hierzu eine kürzlich erschienene zusammenfassende Darstellung[1])], so können auch durch die photographische Platte infolge statistischer Anhäufung von Körnern Schwärzungsverteilungen entstehen, die keiner Modulation der Elektronenverteilung entsprechen und daher ebenfalls Objektstrukturen nur vortäuschen. Bei der Diskussion von Einzelheiten, die in der Nähe des Auflösungsvermögens der photographischen Platte liegen, muß daher stets sehr sorgfältig untersucht werden, ob die beobachteten Schwärzungsverteilungen wirklich objektbedingt sind.

Besonders notwendig ist eine solche Prüfung bei der Bestimmung des Auflösungsvermögens von Übermikroskopen aus Bildern kleiner Objekte. In der Tabelle 7 ist zusammengestellt, welche Größe des Auflösungsvermögens der photographischen Platte von den verschiedenen Autoren bei ihrem Nachweis des Auflösungsvermögens der Elektronenmikroskope in Anspruch genommen wurde. Bei den aus unserem Arbeitskreis hervorgegangenen Untersuchungen (Nr. 1, 2, 5, 6, 8, 12, 14, 15 der Tabelle 7) ist der Wert $A_e \cdot \delta$ stets ausreichend größer als das Plattenauflösungsvermögen. Dagegen lag bei anderen Arbeiten mehrfach die zur Bestimmung des Auflösungsvermögens des Mikroskops benutzte Strecke sehr in der Nähe des Plattenauflösungsvermögens oder gar unter den Werten, die in der vorliegenden systematischen Untersuchung selbst für die feinkörnigste der untersuchten Emulsionen nachgewiesen werden konnten. Es ist wenig wahrscheinlich, daß bei diesen Untersuchungen Platten verwendet wurden, die wesentlich feinkörniger als die Agfa-Spektral-Blau-Ultrahart- oder die ähnliche Agfa-Diapositiv-Platte sind. Die einzige hier in Betracht kommende Emulsion, die Printon-Platte, die etwa die halbe Körnigkeit liefert, ist nämlich wiederum etwa zehnmal unempfindlicher als die eben genannten, bereits sehr unempfindlichen Emulsionen. Bei der Beurteilung dieser Arbeiten muß noch berücksichtigt werden, daß das Auflösungsvermögen der Platten um so schlechter wird, je kleiner die abgebildeten Partikel sind und je geringer infolgedessen der Elektronenkontrast ist. Der Nachweis des Auflösungsvermögens eines Übermikroskops kann daher in diesen

[1]) E. Ruska, Kolloid-ZS. **105**, 43–52, 1943.

Fällen nicht als einwandfrei nachgewiesen anerkannt werden, zumal dann nicht, wenn die verwendete Emulsion nicht bekannt ist.

Erlaubt ein Übermikroskop keine so hohe elektronenoptische Vergrößerung, daß das Auflösungsvermögen seines Objektivs genügend hoch über das Auflösungsvermögen der photographischen Platte vergrößert werden kann, so läßt sich ein einwandfreier Nachweis des Auflösungsvermögens des Objektivs nur führen, wenn das Objekt auf mehrere Platten aufgenommen wird und übereinstimmende Schwärzungsverteilung dieser verschiedenen Platten sicher ergibt, daß die getrennten Schwärzungshäufungen durch die Massenverteilung des Objekts bedingt sind.

Wir haben aus der Kenntnis dieser Zusammenhänge von jeher die Auffassung vertreten und in die Tat umgesetzt, daß zur Ausnutzung des hohen Auflösungsvermögens des Übermikroskops im Gerät selbst eine ausreichend hohe elektronenoptische Vergrößerung erzielt werden muß. Die vorliegende Untersuchung zeigt, daß diese Forderung berechtigt ist, wenn Täuschungen durch photographische Veruntreuungen ausgeschlossen sein sollen.

Aus dem Wissenschaftlichen Zentral-Laboratorium der Photographischen Abteilung der I. G. Farbenindustrie A.-G. (Agfa).

Zur Elektronenempfindlichkeit verschiedener photographischer Schichten.

Von Dipl.-Ing. **H. F. Nissen.**

Mit 16 Abbildungen. (Eingegangen am 8. Februar 1944.)

Die zunehmende Bedeutung der Elektronenmikroskopie lenkt die Aufmerksamkeit auf die Frage nach geeignetem Aufnahmematerial. Die vorliegende Arbeit berichtet über einige Vergleiche an photographischen Schichten der Agfa, die in einer Siemens-Apparatur bestrahlt wurden.

Mit der Einführung des Elektronenmikroskops erhebt sich die Frage nach den für die verschiedenen Anwendungszwecke möglichst geeigneten photographischen Schichten. Abgesehen von den älteren Untersuchungen über die Einwirkung von Elektronenstrahlen auf Silberbromidschichten[1]) haben in letzter Zeit v. Borries[2]) und v. Ardenne[3]) auf diesem Gebiet gearbeitet. Während v. Borries systematisch vorging und eine größere Anzahl von Schichten unter verschiedenen elektrischen und photographischen Bedingungen verglich, begnügte sich v. Ardenne mit einem schmaleren experimentellen Ausschnitt, wobei er zu einem überraschenden Empfindlichkeitsgewinn bei der Schumann-Schicht gelangte. Um selbst einen Überblick über das Verhalten unserer Schichten zu erhalten und um die Möglichkeit einer Verbesserung derselben zu prüfen, wurden verschiedene Untersuchungen angestellt, über die nachfolgend berichtet wird.

Die Messungen wurden mit einem Elektronenmikroskop (Ausführung Siemens & Halske) bei 61,5 kV durchgeführt, das wir zur Bestimmung der Strahlstromstärke mit einem Auffangkäfig versehen

---

[1]) W. Seitz u. G. Harig, Phys. ZS. **30**, 758, 1929; A. Becker u. E. Kipphan, Ann. d. Phys. (5) **10**, 15, 1931. — [2]) B. v. Borries, I. Phys. ZS. **43**, 190, 1942; II. ZS. f. angew. Photogr. **4**, 42, 1942; III. ZS. f. Phys. **119**, 498, 1942. — [3]) M. v. Ardenne, ZS. f. Phys. **121**, 1, 1942.

haben. Die Bestrahlungsdauer, die hier Belichtungszeit genannt sei, wurde nach einem Metronom eingehalten. Durch das stufenweise Öffnen eines Schiebers bekommt man Belichtungs*zeit*-Abstufungen. Eine *intensitäts*mäßige Änderung wäre zweckmäßiger, ist jedoch nur schwer durchführbar. Nachprüfungen ergaben aber, daß innerhalb der erzielten Genauigkeit die für die Zeitskala erhaltenen Ergebnisse auf die Intensitätsabstufung übertragen werden können, was erforderlich ist, um den praktischen Verhältnissen innerhalb eines Bildes zu entsprechen.

Mehrere Streifen verschiedener Platten wurden in eine Kassette gebracht und gemeinsam bestrahlt und entwickelt. Von den erhaltenen Streifen wurde die Schwärzungskurve ermittelt und die für die Schwärzung 0,5 erforderliche Energie q bestimmt. Ferner erhält man aus der Kurve die Steilheit γ für die gleiche Schwärzung 0,5. Mit dem visuellen Granulometer wird die Körnigkeit K_v ermittelt, aus der man die Körnigkeit K_{ph}, die dem Korndurchmesser proportional ist, bestimmt[1]).

Um aus den verschiedenen Meßdaten zu einer einfachen Bewertung der Schichten zu gelangen, wird das Gütemaß $G = \frac{\gamma}{K_{ph} \cdot q}$ gebildet. Je größer diese Zahl ist, um so günstiger dürfte das Material sein. Indessen glauben wir nicht, daß es zweckmäßig ist, die Brauchbarkeit einer photographischen Schicht nur durch eine solche einfache Zahl zu kennzeichnen, da sie die jeweiligen Eigentümlichkeiten des Objektes nicht berücksichtigt.

Bei der Elektronenmikroskopie ist man zwar nicht an ein bestimmtes γ-Produkt, wie in der Bildphotographie, gebunden. In sehr vielen Fällen sind aber erfahrungsgemäß die vorhandenen Kontraste so außerordentlich hoch, daß bei Verwendung eines steilarbeitenden Materials von den Objekten lediglich Silhouetten erhalten werden. Es hat uns somit den Anschein, als wäre es in manchen Fällen von Vorteil, eine „weichere" Abbildung zu wählen, da aus deren zarteren Kontrastabstufungen mehr zu entnehmen ist als aus einer bloßen Konturenzeichnung. Während v. Borries diesen uns nicht unwichtig erscheinenden Punkt in gleichem Sinne nur auf S. 503 seiner Arbeit III kurz streift, wird das Auflösungsvermögen von ihm ausführlich be-

[1]) J. Eggert u. A. Küster, Veröff. Agfa, Bd. IV, S. 49. Leipzig 1935

handelt und auf die Bedeutung der Kontraste im Hinblick auf die Mindestenergie zur Erzielung eines annehmbaren Bildes hingewiesen.

Die untersuchten Schichten.

Für die Auswahl der Schichten waren folgende Gesichtspunkte zu berücksichtigen:

1. Eine hohe Empfindlichkeit ist anzustreben. Dafür ist erforderlich, daß
   a) die Dicke der Schicht ausreichend ist,
   b) der Silberbromidgehalt der Schicht hinreichend hoch ist.
2. Die Steilheit γ der Schwärzungskurve soll groß sein, wenn Teilchen mit geringem Kontrast aufzunehmen sind; hingegen muß γ klein gewählt werden, sobald Objekte mit starken Kontrasten (großer Absorption) vorliegen.
3. Je feinkörniger eine Schicht ist, um so stärker kann, entsprechend ihrem Auflösungsvermögen, optisch nachvergrößert werden.
4. Eine Sensibilisierung für Elektronenstrahlung ist nicht bekannt. Es ist zu erwarten, daß eine Sensibilisierung für Licht auf die Elektronenempfindlichkeit ohne Einfluß ist. Immerhin war die Wirkung von Sensibilisatoren zu überprüfen.

Es wurden zwei Reihen und einige einzelne Platten- und Filmsorten der Agfa untersucht. Die 1. Reihe enthält die drei Elektronenplatten mit der Gradationsabstufung Rapid, Normal und Hart, die 2. Reihe die Spektral-Blau-Platten: Ultrarapid, Rapid, Hart, Extrahart und Ultrahart.

In der Fig. 1 sind die Schwärzungskurven der Elektronenplatten wiedergegeben, und daneben die Körnigkeiten K_{ph}, die Steilheiten γ für $S = 0{,}5$ sowie die Gütewerte G ermittelt worden (Tabelle 1). Zu erkennen ist, daß die Gradationsunterschiede der Elektronenplatten nur gering sind, daß jedoch Empfindlichkeitsunterschiede in den Grenzen 1 : 6 auftreten. Wie zu erwarten, steigt die Empfindlichkeit mit zunehmender Körnigkeit an.

In Fig. 2 sind die Schwärzungskurven der fünf Platten der Spektral-Blau-Serie in gleicher Weise dargestellt. Auch hier unterscheiden sich die Platten durch den $\gamma_{0,5}$-Wert, abgesehen von der Spektral-Blau-Extra-

Hart- und Ultrahart-Platte, nur unbedeutend. Mit dem Empfindlichkeitsanstieg ist hier ebenfalls, wie aus Tabelle 1 hervorgeht, eine Vergröberung

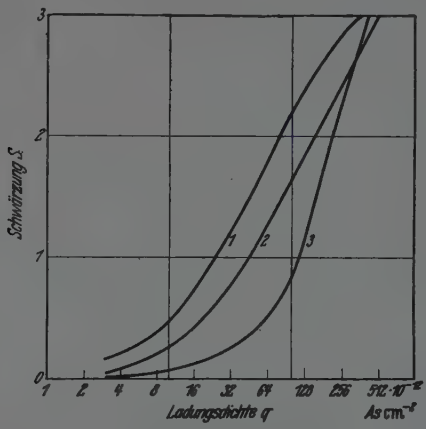


Fig. 1. Schwärzungskurven der Agfa-Elektronenplatten 1. Rapid, 2. Normal, 3. Hart. Entwickelt 5 Minuten in Metol-Hydrochinon 1 : 4 verdünnt, bei 18° C, Schleierwerte abgezogen.

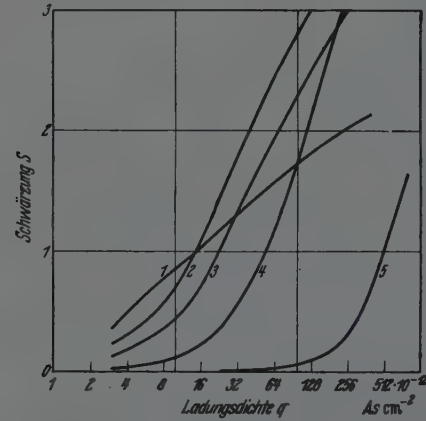


Fig. 2. Schwärzungskurven der Agfa-Platten Spektral-Blau 1. Ultrarapid, 2. Hart, 3. Rapid, 4. Extrahart, 5. Ultrahart. Entwickelt 5 Minuten in Metol-Hydrochinon 1 : 4 verdünnt, bei 18° C, Schleierwerte abgezogen.

des Kornes zu beobachten[1]). Zu beachten ist jedoch, daß die Schwärzungskurve der Spektral-Blau-Ultrarapid-Platte im ganzen und be-

[1]) Daß die Kurve der Sorte Hart noch vor derjenigen der Sorte Rapid gelegen ist, und nicht umgekehrt, hat seinen Grund darin, daß die Bezeichnung der Schichten nach ihrem Verhalten dem Licht gegenüber erfolgt ist.

Tabelle 1.

Steilheit γ, Körnigkeit K_{ph}, Energie q (Ladungsdichte) zur Erreichung der Schwärzung 0,5 und Gütemaß G für einige photographische Schichten.

Sorte der Agfa-Platten	$\gamma_{S=0,5}$	$K_{ph}: S=0,5$	$q_{S=0,5}$ 10^{-12} As cm^{-2}	$G_{S=0,5}$ 10^9
Elektronenplatte Rapid	1,0	17	11	5,3
„ Normal	1,0	15	20	3,3
„ Hart	1,2	11,5	65	1,6
Spektral-Blau Ultrarapid	1,0	20	5	10
„ Rapid	1,0	14	11	6,5
„ Hart	1,0	13	7	11
„ Extrahart	1,4	12	30	4
„ Ultrahart	2	9	320	0,7
Schumann-Platte Hart	0,4	10	120	0,3

sonders bei höheren S-Werten, wesentlich flacher gelegen ist als die Kurven der übrigen Schichten; diese Schicht, Fig. 2, 1, liefert somit den größten Bildumfang (die weichste Abbildung). — Zur Zeit sind zwei Sorten von Agfa Elektronenplatten im Handel, und zwar die Typen „Hart" und „Rapid", die etwa den Kurven von Fig. 2, 4 und Fig. 2, 1 entsprechen. Vergleicht man die Ergebnisse mit den von v. Borries gefundenen, so stimmen diese im wesentlichen überein.

Wieweit die Dicke der untersuchten Schichten den zu stellenden Anforderungen genügt, wurde mit Hilfe von Dünnschnitten ermittelt. Diese wurden an Stufenbelichtungen durchgeführt, und zwar an einer Stelle, die der Schwärzung $S = 0,5$ am nächsten kommt. Da die Glasschicht einen Dünnschnitt unmöglich macht, wurde die fertig entwickelte Schicht gequollen, dann vorsichtig abgelöst und auf einem Filmstück mit Gelatine aufgeklebt. Der getrocknete Film wurde dann geschnitten und vor dem Photographieren wieder gequollen. (Die Dicken der Schichten sind wegen der dabei auftretenden Unterschiede nicht ohne weiteres miteinander vergleichbar.) Die Fig. 3 zeigt die besonders dicke Schicht einer Agfa K-Platte. Deutlich erkennt man die beschränkte Eindringtiefe der Elektronen von 61,5 kV Beschleunigung. Die Fig. 4 bis 7 geben einige der untersuchten Platten wieder. Bei den Schichten der Elektronenplatte Hart und Spektral-Blau-Ultrarapid ist deutlich eine Abnahme der Korndichte mit zunehmender Eindringtiefe der Elektronen zu bemerken, während bei Spektral-Blau-Extrahart und Rapid diese Abnahme nur gering ist, d. h. in diesen Fällen wird die Strahlung von der etwas zu geringen Schichtdicke nicht ganz ausgenutzt (Fig. 4 und 5 gegenüber 6 und 7). Für Strahlen

größerer Eindringtiefe, d. h. höherer Beschleunigungsspannung, müssen die Schichtdicken erhöht werden. Auch dieses entspricht den Er-

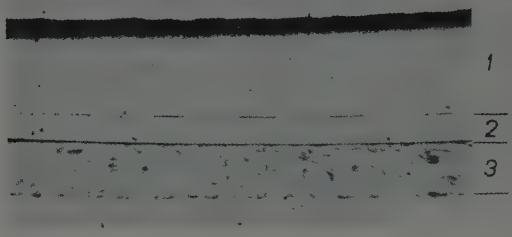


Fig. 3. Dünnschnitt der Schicht einer Agfa-K-Platte (Vergrößerung 50 fach).

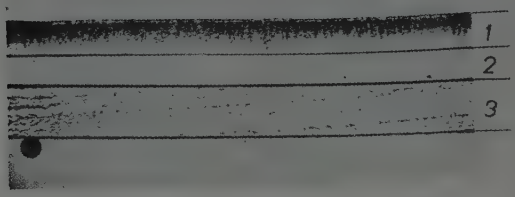


Fig. 4. Dünnschnitt der Schicht einer Agfa-Elektronenplatte Hart (Vergrößerung 50 fach).

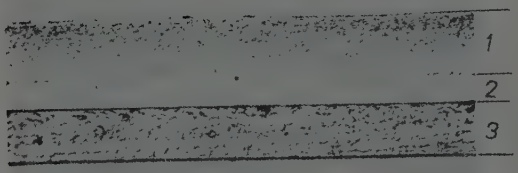


Fig. 5. Dünnschnitt der Schicht einer Agfa-Spektral-Blau-Platte Ultrarapid (Vergrößerung 50 fach).

fahrungen von v. Borries, der eine Abnahme der Empfindlichkeit bei höheren Spannungen feststellen konnte.

Zu jenen Untersuchungen von v. Borries sei im Vergleich zu unseren Beobachtungen kurz das Folgende vermerkt: Führt man solche

Empfindlichkeitsmessungen an mehreren Plattenserien, auch an solchen anderer Emulsionsnummern aus, so streuen die Meßwerte, da die verschiedensten Faktoren zur Auswirkung kommen. Es seien nur genannt: die Dicke der Schicht, ihre Zusammensetzung, die Art, Temperatur

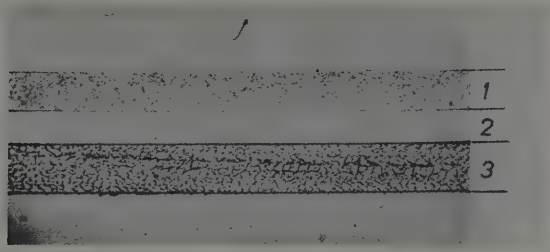


Fig. 6. Dünnschnitt der Schicht einer Agfa-Spektral-Blau-Platte Rapid (Vergrößerung 50fach).

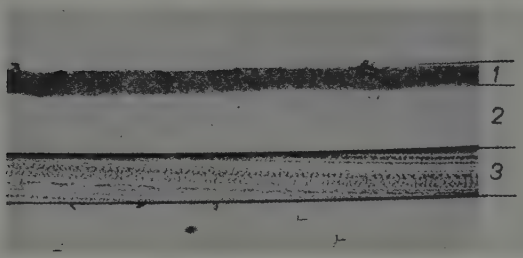


Fig. 7. Dünnschnitt der Schicht einer Agfa-Spektral-Blau-Platte Extrahart (Vergrößerung 50fach).

Zu Fig. 3 bis 7. Schicht 1: Emulsionsschicht gequollen. [Schicht 2: Klebeschicht. Schicht 3: Stützfilm. (2 und 3 plattenfremde Schichten).

und Einwirkungsdauer des Entwicklers sowie die Bestrahlungsintensität. Am geringsten ist der Einfluß auf die Körnigkeitswerte K_{ph}, die sich nur um einen geringen Betrag ändern. Hier wirkt sich im wesentlichen die Art des Entwicklers aus, wenn auch geringe Schwankungen in der Korngröße des Silberbromids auftreten. — Für die Gradation der Schwärzungskurve sind bereits mehrere Einflußgrößen festzustellen, da hier außer der Zusammensetzung des Entwicklers die Temperatur und Einwirkungsdauer desselben sowie die Dicke und Zusammensetzung der

Emulsionsschicht maßgebend sind, wobei auch die Beschleunigungsspannung nicht ohne Einfluß ist. — Beim Vergleich von Empfindlichkeitsangaben sind die meisten störenden Einflüsse wirksam. So ist bereits eine starke Abhängigkeit vom γ-Wert festzustellen, wobei zu erörtern wäre, wie diese Größe in die Definition der Empfindlichkeit einzugehen hat. Abweichungen um etwa den Faktor 2 sind ohne weiteres zu erwarten. Werden nun von verschiedenen Verarbeitern Vergleiche angestellt, so können die Unterschiede noch beträchtlich größer werden, so daß unter Umständen nicht mehr von einem Vergleich gesprochen werden kann.

Es sei noch hinzugefügt, daß — wie auch bei sensitometrischen Untersuchungen auf anderen Gebieten (Licht, Röntgenstrahlen) — man sich vor der Überschätzung absoluter Angaben hüten sollte, ehe nicht die verschiedenen an der Elektronenmikroskopie interessierten Stellen eine sorgfältig geprüfte Norm über die Versuchsbedingungen verabredet haben. Bis dahin sollte man sich nach Möglichkeit mit relativen Vergleichen begnügen. — Dennoch stimmen die nachstehend angeführten Ergebnisse mit denen von v. Borries[1]) im Rahmen der gegebenen Vergleichsmöglichkeiten hinreichend überein. —

	v. Borries			Nissen		
	Ua	As cm^{-2}	γ	Ua	As cm^{-2}	γ
Spektral-Blau, Hart .	70 kV	$8 \cdot 10^{-12}$	0,6	61 kV	$7 \cdot 10^{-12}$	1,0
Schumann Hart.....	50 „	$90 \cdot 10^{-12}$	0,5	61 „	$120 \cdot 10^{-12}$	0,4

Eine Schicht mit besonders hohem Silberbromidgehalt, jedoch von sehr geringer Dicke, kennzeichnet die Agfa Schumann-Platte. Die Schumannschicht wird auf einer dünnen silberbromidhaltigen Emulsionsschicht, die der Haftung dient, sedimentiert. Um zu einer exakten Beurteilung dieses Materials zu kommen, ist zu ermitteln, wieweit die beiden Schichten am Bildaufbau beteiligt sind. Hierzu wurde eine Schumann-Platte gequollen und in feuchtem Zustand ein Streifen von der sehr leicht abwischbaren eigentlichen „Schumannschicht" befreit. Die getrocknete Platte wurde stufenweise im Elektronenmikroskop bestrahlt, so daß zwei nebeneinanderliegende Schwärzungstreppen

[1]) B. v. Borries I, S. 195, 197.

mit und ohne Schumannschicht entstanden. Von der fertigen Platte wurde schließlich auf der noch nicht abgewischten Seite ein weiterer Streifen von der Schumannschicht entfernt. Die erhaltenen drei Schwärzungsreihen sind in der Fig. 8 dargestellt. Der durch die Schumannschicht bedingte Anteil an der Gesamtschwärzung ist, wie überraschenderweise von den Benutzern der Agfa Schumann-Platte für elektronenmikroskopische Zwecke bisher nicht bemerkt wurde, *nicht* sehr groß, und wird von dem Anteil übertroffen, den die an sich unwichtige und nur der Herstellung der Platte dienende Haftschicht liefert. Wohlgemerkt tritt bei der *normalen* Verwendung der Schumann-Platte in der UV-Spektroskopie diese Unterlagschicht nicht

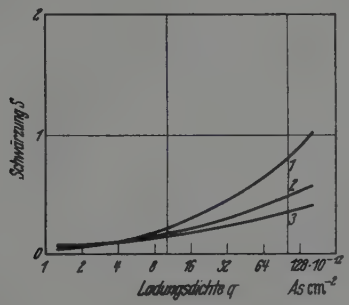


Fig. 8. Schwärzungskurven der Agfa Schumann-Platte Hart. Entwickelt 5 Minuten in Final-Röhrchenentwickler bei 18° C, Schleierwerte abgezogen. 1. vollständige Schicht, 2. Haftschicht ohne Schumannschicht bestrahlt, 3. Haftschicht durch die Schumannschicht bestrahlt.

in Tätigkeit oder in Erscheinung, da die UV-Strahlen nicht bis zu ihr dringen können, weil diese von der Schumannschicht schon ganz absorbiert werden, im Gegensatz zu den energiereicheren Kathodenstrahlen, die, wie wir sehen, beide Schichten entwicklungsfähig machen und außerdem noch zum beträchtlichen Anteil unabsorbiert bleiben. Auch die Absorption des dünnen abwischbaren Silberbromidüberzuges kann nicht sehr groß sein, da kein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden von der Schumannschicht befreiten Streifen besteht.

Einen Dünnschnitt zeigt die Fig. 9. Deutlich ist zu erkennen, daß die Schumannschicht, die sich in dem Dünnschnitt lediglich als zarte schwarze Linie darstellt, sehr dünn ist. Um die Absorption zu erhöhen, wurden versuchsweise einige Platten mit erheblich dickerer Schumannschicht angefertigt.

Die Ergebnisse sind als Schwärzungskurven in Fig. 10 dargestellt. Danach tritt zwar durch die Erhöhung der Dicke der Schumannschicht ein geringer Zuwachs an Empfindlichkeit auf, der mit der allgemeinen Aufrichtung der Kurve zusammenhängt, jedoch stehen diese bescheidenen Vorzüge in so geringem Verhältnis zu dem Aufwand in der

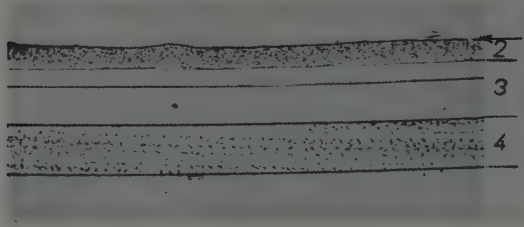


Fig. 9. Dünnschnitt der Schicht einer Agfa Schumann-Platte in entwickeltem und gequollenem Zustand (Vergrößerung 50fach). 1. Schumannschicht, 2. Haftschicht, 3. Klebeschicht, 4. Stützfilm (3 und 4 plattenfremde Schichten).

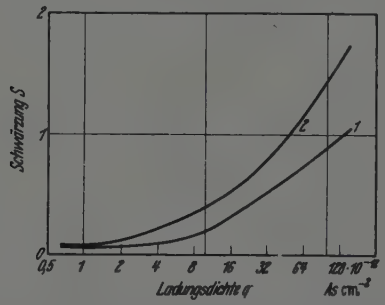


Fig. 10. Schwärzungskurven der Agfa Schumann-Platte Hart. Entwickelt 5 Minuten in Eikonal 1 : 20 verdünnt, bei 18° C. Schleierwerte abgezogen. 1. Schicht normaler Dicke, 2. Schicht erhöhter Dicke.

Herstellung solcher dicken Schumannschichten, daß eine laufende Fabrikation nicht in Betracht kommt — ganz abgesehen davon, daß die Schumannschichten infolge ihrer leichten mechanischen Verletzbarkeit schwer zu verarbeiten sind.

Die Frage, ob der von uns angegebene Final-Röhrchenentwickler zweckmäßig ist oder durch einen kräftiger arbeitenden zu ersetzen ist, wie v. Ardenne empfiehlt, bedarf der Klarstellung. Die von uns gegegebene Vorschrift ist für das eigentliche Anwendungsgebiet der Schumann-Platte, die Ultra-Violett-Spektroskopie, ausgearbeitet worden.

Bei Benutzung kräftiger arbeitender Entwickler ist zu berücksichtigen, daß sich die gelatinearme Schumannschicht in ihren Eigenschaften dem reinen Silberbromid nähert. Dieses hat die Eigentümlichkeit, von Entwicklern unter Umständen auch schon ohne eine Belichtung

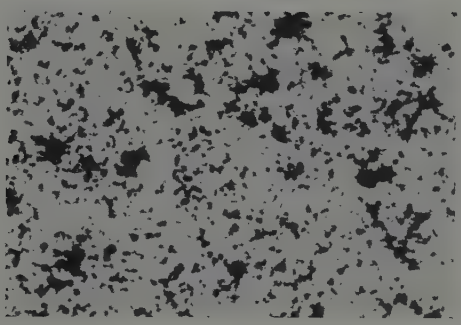


Fig. 11. Kornvergröberung der Schicht einer Agfa Schumann-Platte durch Metol-Hydrochinonentwickler (Vergrößerung 400fach).

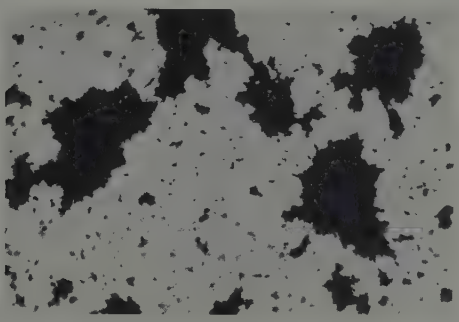


Fig. 12. „Schleierkörner" der unbelichteten Schicht einer Agfa Schumann-Platte mit Metol-Hydrochinon entwickelt (Vergrößerung 400fach).

reduziert zu werden[1]). Um das zu vermeiden, sind mild wirkende Entwickler (z. B. Final-Röhrchenentwickler) zu benutzen. Dabei wird die Gradation flacher und das Korn feiner. Bei dem kräftig wirkenden Metol-Hydrochinonentwickler dagegen scheint eine Art Kettenreaktion aufzutreten, durch die auch Silberbromidkörner entwickelbar werden, die nicht bestrahlt wurden, wohl aber in Kontakt mit einem entwickel-

[1]) H. Arens, Veröff. Agfa, Bd. V, S. 159. Leipzig 1937.

baren Korn stehen. In der Fig. 11 sind solche Kornballungen zu erkennen. Fig. 12 zeigt den gleichen Effekt an einer unbelichteten Schicht, die mit einem üblichen Metol-Hydrochinonentwickler behandelt wurde. Die Entwicklung wird dadurch undefinierter, da die Schwärzungswerte den entsprechenden Belichtungen nur mit größerer Unsicherheit zugeordnet werden können, wie aus der stärkeren Streuung der Meßwerte folgt. Ermittelt man auch für die Schumannschichten die Gütewerte G bei Anwendung kräftiger Entwickler, so zeigen diese zwar eine Erhöhung

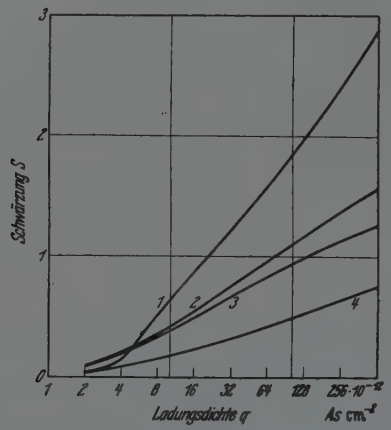


Fig. 13. Schwärzungskurven der Agfa Schumann-Platte Hart. Entwickelt 5 Minuten in verschiedenen Entwicklern bei 18° C. Schleierwerte abgezogen.
1. Metol-Hydrochinon, 1 : 4 verdünnt; 2. Rodinal, 1 : 20 verdünnt; 3. Eikonal, 1 : 20 verdünnt; 4. Final-Röhrchenentwickler, nach Vorschrift angesetzt.

gegenüber dem als brauchbar anerkannten Final-Röhrchenentwickler, aber die Aufnahme kann leicht entsprechend den Fig. 11 und 12 durch die Korngruppen eine Güteminderung aufweisen. In Fig. 13 sind die

Tabelle 2.

Steilheit γ, Körnigkeit K_{ph}, Energie q (Ladungsdichte) zur Erreichung der Schwärzung 0,5 und Gütemaß G für die Agfa Schumann-Hart-Platte, mit vier verschiedenen Entwicklern behandelt.

Entwickler	$\gamma_{S=0,5}$	K_{ph}; $S=0,5$	$q_{S=0,5}$ 10^{-12} As cm^{-2}	$G_{S=0,5}$ 10^{9}
Final	0,4	10	120	0,3
Eikonal 1 : 20	0,6	16	18	2,1
Rodinal 1 : 20	0,7	18	14	2,8
Metol-Hydrochinon 1 : 4	1,2	21	8	7,2

Schwärzungskurven der Schumann-Hart-Schicht für vier Entwickler wiedergegeben, aus denen die den G-Werten zugrunde liegenden Zahlen hervorgehen (Tabelle 2). Um übrigens zu einem brauchbaren Vergleich mit anderen Plattensorten zu gelangen, muß auch bei diesen eine entsprechend kräftigere Entwicklung angewandt werden. Wie v. Borries in der vorangehenden Arbeit gezeigt hat (S. 539), ist es möglich, bei längerer Entwicklung oder kräftigerem Entwickler bessere Ergebnisse zu erzielen. Eigene Versuche, auf die hier nicht eingegangen werden soll, haben dieses Ergebnis bestätigt.

Unsere Beobachtungen sind auch in Übereinstimmung mit denen von v. Ardenne, der bei Entwicklung der Agfa-Schumann-Hart-Platte mit Eikonal statt mit Finalröhrchen eine Empfindlichkeitssteigerung ermittelte. Nach unseren Messungen (Tabelle 2) vergrößert sich der q-Wert unter diesen Umständen zwar nur um den Faktor 7, und erst bei Verwendung von noch kräftigeren Entwicklern weiter bis zum Faktor 15, den v. Ardenne bereits bei Eikonal übertroffen findet. Es ist jedoch nach unseren Erfahrungen, wie betont, bei derartig heftig angreifenden Entwicklern immer zu berücksichtigen, daß bei Benutzung von Schumann-Platten Anomalien in der Entwicklung, z. B. jene Klumpenbildung unter den Silberkörnern, statthaben können.

Wirkung einer Sensibilisierung oder Desensibilisierung.

Die bisher untersuchten Platten sind alle unsensibilisiert. Da die meisten hochempfindlichen Platten des Handels jedoch sensibilisiert sind, so war es von gewissem Interesse, den Einfluß der Sensibilisatoren auf die Elektronenempfindlichkeit der Schichten zu prüfen. Eine Absorptionserhöhung für Elektronen ist durch die überaus geringen Farbstoffmengen praktisch nicht zu erwarten und folglich auch keine Empfindlichkeitssteigerung. Entsprechendes gilt für die Desensibilisatoren.

Die Wirkung von Sensibilisatoren wurde an einer Emulsion erprobt, die einmal eine Sensibilisierung mit Orthochrom und ein anderes Mal eine mit Eosin erhielt. Die Schwärzungskurven der Fig. 14 zeigen keinen nennenswerten Unterschied. Man darf annehmen, daß dasselbe für die üblichen Sensibilisierungs-Farbstoffe auch zutrifft. Ein Vorteil ist somit durch Sensibilisatoren nicht zu erreichen.

Eine weitere Plattensorte wurde vor der Bestrahlung mit einem Desensibilisator normal, und in einem zweiten Versuch stark behandelt.

In der Fig. 15 sind die erhaltenen Schwärzungskurven dargestellt. Zu erkennen ist, daß eine geringe Empfindlichkeitsabnahme bei der starken

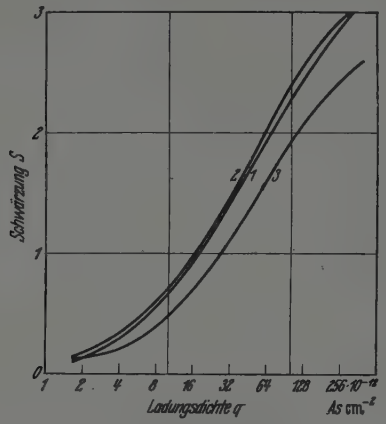


Fig. 14. Schwärzungskurven einiger Agfa Spektralblau-Hart-Platten. Entwickelt 5 Minuten in Metol-Hydrochinon 1 : 4 verdünnt, bei 18° C, Schleierwerte abgezogen.
1. unsensibilisierte Schicht, 2. sensibilisiert mit Eosin, 3. sensibilisiert mit Orthochrom.

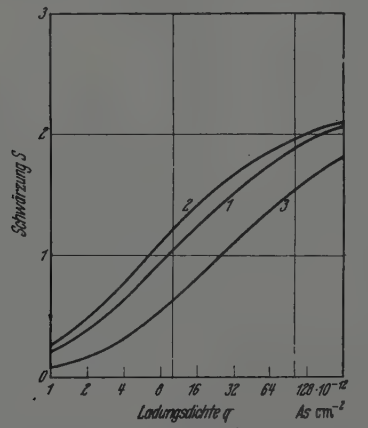


Fig. 15. Schwärzungskurven einiger photographischer Schichten. Entwickelt 5 Minuten in Metol-Hydrochinon 1 : 4 verdünnt, bei 18° C. Schleierwerte abgezogen. 1. Normale unsensibilisierte Schicht. 2. Dieselbe desensibilisiert. 3. Dieselbe stark desensibilisiert.

Desensibilisierung eintritt. Die hier vorliegenden Verhältnisse sind etwa mit denen auf dem Röntgengebiet vergleichbar. Demnach kann man für Elektronenaufnahmen desensibilisierte Platten benutzen, um die Verarbeitung in der Dunkelkammer zu erleichtern oder um eine Schleier-

bildung zu vermeiden, die durch das von der Kathode ausgestrahlte Licht oder durch nicht genügende Abdunkelung des Raumes während der Öffnung der Kassette entstehen kann.

Film oder Platte.

Zur Beantwortung der Frage, ob sich im Endeffekt Unterschiede oder Vorteile ergeben, je nachdem eine Emulsion auf Film oder Platte vergossen ist, wurde ein entsprechender Vergleich angestellt. Fig. 16

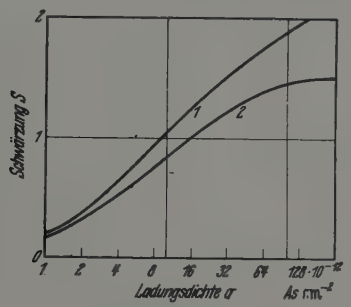


Fig. 16. Schwärzungskurven der Agfa Spektralblau-Hart-Emulsion. Entwickelt 5 Minuten in Metol-Hydrochinon 1 : 4 verdünnt, bei 18° C, Schleierwerte abgezogen. 1. Auf normale Glasplatten vergossen. 2. Auf Film vergossen.

zeigt die erhaltenen Ergebnisse. Die Schwärzungskurve des Films besitzt eine etwas geringere Steilheit als die der Platte, was in diesem Falle — und übrigens auch in der Regel — lediglich auf die etwas schwächere Begußstärke beim Film zurückzuführen ist.

Ferner ist zu berücksichtigen, daß beim Einbringen der Filme und Platten in das Vakuum der Apparatur ein Trocknungsprozeß einsetzt, so daß eine Verschlechterung des Vakuums entsteht. Da bei der Platte nur die Emulsionsschicht, beim Film hingegen auch die Trägerschicht Dämpfe abgibt, so ist die Platte zweifellos in dieser Beziehung überlegen. Es sei darauf hingewiesen, daß, wie bekannt[1]), beim Trocknen auch die Sprödigkeit des Films erhöht wird.

Zusammenfassung.

Die Wirkung von Elektronenstrahlung auf verschiedene Silberbromidschichten wird untersucht. Die Empfindlichkeit der Schicht

[1]) M. v. Ardenne, ZS. f. Phys. 120, 397, 1943.

steigt mit der Körnigkeit des Silberbromids. Gleichzeitig wird die Steilheit der Schwärzungskurve kleiner. Ein Gütemaß gestattet einen Vergleich der Platten, wenn auch die Wahl des Aufnahmematerials nach Möglichkeit nicht nur nach dem Gesichtspunkt der geringsten aufzuwendenden Strahlungsenergie, sondern auch nach den Absorptionsverhältnissen im aufzunehmenden Objekt selbst getroffen werden sollte. Schumannschichten ergeben keinen nennenswerten Vorteil gegenüber anderen Platten. Sensibilisatoren und Desensibilisatoren sind für Elektronenstrahlen nicht wirksam. Schichten auf Filmen als Träger sind solchen auf Glas unterlegen.

(Mitteilung aus den Laboratorien der Telefunken-Gesellschaft, Berlin und der Ostmarkwerke, Prag.)

Axiale Längsschwingungen eines geraden Stabes aus kristallinem Material.

Von **R. Bechmann** und **V. Petržílka.**

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 16. Oktober 1943.)

Mittels einer kürzlich entwickelten Theorie elastisch gekoppelter Freiheitsgrade gelingt es, die bei axialen Längsschwingungen dünner kristalliner Stäbe auftretende Neigung der Bewegungsrichtung gegen die Fortpflanzungsrichtung zu klären. Es ergibt sich, daß die Richtung der Bewegung durch die Normalenrichtung der Polarfläche vierter Ordnung, die durch den in die Fortpflanzungsrichtung weisenden Radiusvektor erzeugt wird, bestimmt ist; die Ebene der Bewegung bei fortschreitender, die Knotenebene bei stehender Bewegung verläuft parallel zu der an die Polarfläche gelegten Tangentialebene. Die Untersuchungen an schmalen Quarzstäben des Schnittes $X_{90°,\,\gamma}$ bestätigen dies Ergebnis.

Die Differentialgleichung, die die Fortpflanzung axialer elastischer Schwingungen in einem dünnen Stab aus anisotropem Medium beschreibt, gleicht derjenigen für den isotropen Stab. Bei kristallinem Material ist nach Voigt[1]) lediglich in dem die elastische Kraft darstellenden Glied dieser Gleichung der für die Richtung der Stabachse charakteristische Elastizitätskoeffizient einzuführen. Die sich längs eines dünnen Stabes ausbreitenden elastischen Wellen bzw. die axialen Längsschwingungen eines dünnen Stabes unterscheiden sich jedoch von denen des isotropen Stabes dadurch, daß die Bewegungsrichtung im Stab nicht mehr parallel zur Stabachse, d. h. zur Fortpflanzungsrichtung verläuft; die Ebene der Bewegung und ebenso die Knotenebene sind gegen die Stabachse geneigt, eine Erscheinung, die sich an piezoelektrisch erregten Quarzstäben besonders eindringlich beobachten läßt[2]).

Während die klassische Theorie der Elastizität eine Ableitung der Neigung der Bewegungsrichtung gegen die Fortpflanzungsrichtung nicht gestattet, liefert die kürzlich entwickelte Theorie elastisch gekoppelter Freiheitsgrade[3]) eine einfache Darstellung dieser Erscheinung, wie im folgenden gezeigt wird.

[1]) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, S. 674. Leipzig 1928. — [2]) H. Straubel, Hochfrequenztechn. u. Elektroakt. **38**, 14, 1931. — [3]) R. Bechmann, ZS. f. Phys. **117**, 180, 1941.

Eine Lösung für die axialen Längsschwingungen eines dünnen, geraden Stabes aus kristallinem Material mit rechteckigem Querschnitt ergibt sich aus dem erwähnten allgemeinen Ansatz für die Schwingungen eines Parallelepipeds im Grenzfall für zwei gegen Null strebende Dimensionen[1]). Legt man die Z'-Achse eines willkürlich gegen die Hauptachsen des Kristalls geneigten Koordinatensystems X', Y', Z' in die Stabachse und läßt die beiden Dimensionen des Stabes in der X'- und Y'-Richtung in gleicher Weise zu Null gehen, so ergibt sich aus der früher aufgestellten allgemeinen Frequenzgleichung für die axialen Längsschwingungen eines geraden kristallinen Stabes

$$\omega = k_3 \sqrt{\frac{1}{\varrho s'_{33}}} = k_3 v, \tag{1}$$

wobei $k_3 = \frac{n\pi}{l_{z'}}$, $l_{z'}$ die Stablänge, n eine die Ordnung der Schwingung angebende ganze Zahl, s'_{33} den Elastizitätskoeffizienten für die mit der Stabachse zusammenfallende Richtung und schließlich v die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit im Stab bedeuten. Die Eigenfrequenzen der axialen Schwingungen lauten

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n}{2l_{z'}} \sqrt{\frac{1}{\varrho s'_{33}}}. \tag{2}$$

Die Fortpflanzungsrichtung der Bewegung ist durch die Richtung der Stabachse, im betrachteten Fall durch die Richtung Z' festgelegt. Die Komponenten der Verrückungen sind nach dem früheren[1]) durch

$$\left.\begin{matrix} u' \\ v' \\ w' \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{k_3} \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\} \cos k_3 z' \, e^{i\omega t} \tag{3}$$

gegeben, wobei das Verhältnis der Größen a, b, c im Grenzfall des unendlich dünnen Stabes durch[2])

$$a : b : c = s'_{53} : s'_{43} : s'_{33} \tag{4}$$

bestimmt ist. Hieraus erhält man die Richtung der Bewegung. Seien die Richtungscosinus der Bewegungsrichtung mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ bezeichnet, so wird

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= -\frac{s'_{53}}{\sqrt{s'^2_{53} + s'^2_{43} + s'^2_{33}}}, \quad \cos\beta = -\frac{s'_{43}}{\sqrt{s'^2_{53} + s'^2_{43} + s'^2_{33}}}, \\ \cos\gamma &= -\frac{s'_{33}}{\sqrt{s'^2_{53} + s'^2_{43} + s'^2_{33}}}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1]) R. Bechmann, ZS. f. Phys. 117, 180, 1941. — [2]) R. Bechmann, ebenda 120, 107, 1942.

Die Striche bei den einzelnen Größen deuten an, daß das Koordinatensystem ganz willkürlich angenommen ist und daß auch keinerlei einschränkende Annahmen hinsichtlich der Natur des Kristalls gemacht sind. Die Gln. (3) zeigen, daß bei dem unendlich dünnen anisotropen Stab keine rein longitudinale Bewegung auftritt, vielmehr bildet im allgemeinen die Richtung der Bewegung mit der Fortpflanzungsrichtung, d. h. mit der Stabachse, einen endlichen Winkel. Die Knotenebene der Bewegung ist gegen die Fortpflanzungsrichtung geneigt (Fig. 1). Die beiden Richtungen stimmen jedoch überein, wenn nach den Symmetrieverhältnissen der Orientierung des kristallinen Stabes oder, wie es bei dem isotropen Körper stets der Fall ist, die Koeffizienten s'_{53} und s'_{43} Null sind. Es gilt dann für die Winkel $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = 0$, die Komponenten u und v werden Null, wodurch die axiale Bewegung den Charakter eines rein longitudinalen Vorganges annimmt. Die Knotenlinie steht dann senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung. Die bei den betrachteten Schwingungen auftretenden Bewegungsvorgänge sind den bei gleichförmig in der Z'-Richtung gedrückten Körpern auftretenden Deformationsvorgängen analog. Auch hierbei nehmen die Querschnitte eine schiefe Lage an, die durch die Koeffizienten s'_{53} und s'_{43} bestimmt ist[1]).

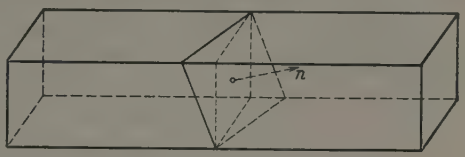


Fig. 1. Lage der Knotenebene in einem axial schwingenden kristallinen Stab.

Wir betrachten die eben beschriebenen, auf ein beliebiges Koordinatensystem bezogenen Bewegungsvorgänge nun im Hauptachsensystem des Kristalls. Dazu ist es notwendig, die gestrichenen Elastizitätskoeffizienten durch die auf das Hauptachsensystem bezogenen Elastizitätskoeffizienten und die beide Koordinatensysteme miteinander verbindende Richtungscosinus auszudrücken. Ist das gestrichene Koordinatensystem mit dem Hauptachsensystem durch das Schema der Richtungscosinus

	x	y	z
x'	α_{11}	α_{12}	α_{13}
y'	α_{21}	α_{22}	α_{23}
z'	α_{31}	α_{32}	α_{33}

(6)

[1]) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik (s. S. 631). Leipzig 1928.

verknüpft, so lassen sich die Elastizitätskoeffizienten $s'_{53}, s'_{43}, s'_{33}$ in der Form

$$\left.\begin{aligned} s'_{53} &= A_1\alpha_{11} + A_2\alpha_{12} + A_3\alpha_{13} \\ s'_{43} &= A_1\alpha_{21} + A_2\alpha_{22} + A_3\alpha_{23} \\ 2\,s'_{33} &= A_1\alpha_{31} + A_2\alpha_{32} + A_3\alpha_{33} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

darstellen, wobei

$$\left.\begin{aligned} A_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial s'_{33}}{\partial \alpha_{31}} &= 2\,s_{11}\alpha_{31}^3 + (2\,s_{12} + s_{66})\,\alpha_{31}\alpha_{32}^2 + \\ &+ (2\,s_{13} + s_{55})\,\alpha_{31}\alpha_{33}^2 + 2\,(s_{14} + s_{56})\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} + \\ &+ (s_{25} + s_{64})\,\alpha_{32}^2\alpha_{33} + (s_{36} + s_{45})\,\alpha_{32}\alpha_{33}^2 + \\ &+ 3\,s_{16}\alpha_{31}^2\alpha_{32} + 3\,s_{15}\alpha_{31}^2\alpha_{33} + s_{26}\alpha_{32}^3 + s_{35}\alpha_{33}^3, \\ A_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial s'_{33}}{\partial \alpha_{32}} &= 2\,s_{22}\alpha_{32}^3 + (2\,s_{12} + s_{66})\,\alpha_{31}^2\alpha_{32} + \\ &+ (2\,s_{23} + s_{44})\,\alpha_{32}\alpha_{33}^2 + (s_{14} + s_{56})\,\alpha_{31}^2\alpha_{33} + \\ &+ 2\,(s_{25} + s_{64})\,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} + (s_{36} + s_{45})\,\alpha_{31}\alpha_{33}^2 + \\ &+ s_{16}\alpha_{31}^3 + 3\,s_{26}\alpha_{31}\alpha_{32}^2 + 3\,s_{24}\alpha_{32}^2\alpha_{33} + s_{34}\alpha_{33}^3, \\ A_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial s'_{33}}{\partial \alpha_{33}} &= 2\,s_{33}\alpha_{33}^3 + (2\,s_{13} + s_{55})\,\alpha_{31}^2\alpha_{33} + \\ &+ (2\,s_{23} + s_{44})\,\alpha_{32}^2\alpha_{33} + (s_{14} + s_{56})\,\alpha_{31}^2\alpha_{32} + \\ &+ (s_{25} + s_{64})\,\alpha_{31}\alpha_{32}^2 + 2\,(s_{36} + s_{45})\,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} + \\ &+ s_{15}\alpha_{31}^3 + s_{24}\alpha_{32}^3 + 3\,s_{35}\alpha_{31}\alpha_{33}^2 + 3\,s_{34}\alpha_{32}\alpha_{33}^2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ist, die nur Funktionen von $\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}$ sind. Für die Komponenten der Verschiebung (3), bezogen auf das Hauptachsensystem, ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha_{11}u' + \alpha_{21}v' + \alpha_{31}w', \\ v &= \alpha_{12}u' + \alpha_{22}v' + \alpha_{32}w', \\ w &= \alpha_{13}u' + \alpha_{23}v' + \alpha_{33}w', \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

woraus man durch Einführung der Beziehungen (7)

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{k_3}\left\{\begin{matrix} A_1 - s'_{33}\alpha_{31} \\ A_2 - s'_{33}\alpha_{32} \\ A_3 - s'_{33}\alpha_{33} \end{matrix}\right\} \cos k_3\,(\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z)\,e^{i\omega t} \tag{10}$$

erhält. Die auf das Hauptachsensystem bezogenen Richtungscosinus der Bewegungsrichtung lauten dann

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda = -\frac{1}{W}(A_1 - s'_{33}\alpha_{31}), \quad \cos\mu = -\frac{1}{W}(A_2 - s'_{33}\alpha_{32}), \\ \cos\nu = -\frac{1}{W}(A_3 - s'_{33}\alpha_{33}), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

wobei

$$W = \sqrt{(A_1 - s'_{33}\alpha_{31})^2 + (A_2 - s'_{33}\alpha_{32})^2 + (A_3 - s'_{33}\alpha_{33})^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - 3\,s'^2_{33}} = \sqrt{s'^2_{53} + s'^2_{43} + s'^2_{33}} \tag{11a}$$

ist. Die Gln. (10), (11) und (11a) sind nur noch Funktionen der betrachteten Richtung α_{31}, α_{32}, α_{33}, die Richtungscosinus α_{11}, α_{12}, α_{13}, α_{21}, α_{22}, α_{23} sind herausgefallen, was bedeutet, daß die Bewegungsrichtung von der Lage des Stabes um seine Längsachse unabhängig ist. Aus Gl. (3) bzw. (10) folgt weiter, daß die Neigung der Bewegungsrichtung gegen die Stabachse unabhängig von der Querschnittsform ist, solange nur die beiden Querdimensionen hinreichend klein gegen die Stablänge sind. Der Winkel ε zwischen der Fortpflanzungsrichtung mit den Richtungscosinus α_{31}, α_{32}, α_{33} und der durch (10) gegebenen Bewegungsrichtung ist aber nach (11)

$$\cos\varepsilon = -\frac{1}{W}[(A_1 - s_{33}\alpha_{31})\alpha_{31} + (A_2 - s'_{33}\alpha_{32})\alpha_{32} + (A_3 - s'_{33}\alpha_{33})\alpha_{33}], \tag{12}$$

wofür sich unter Berücksichtigung von (7) und (11a) der Ausdruck

$$\cos\varepsilon = -\frac{s'_{33}}{\sqrt{s'^2_{53} + s'^2_{43} + s'^2_{33}}} \tag{13}$$

ergibt, der mit dem Ausdruck für $\cos\gamma$ in (5) übereinstimmt.

Die Richtungscosinus (11) haben eine anschauliche Bedeutung. Wir betrachten die Fläche $\sqrt{E} = \sqrt{\frac{1}{s'_{33}}}$, wobei E den Youngschen Modul, eine Funktion vierter Ordnung der Richtungscosinus bedeutet und berechnen die Richtung der Normalen zu dieser Fläche. Setzen wir für den die betrachtete Fläche erzeugenden Radiusvektor

$$r = \left(s'_{33}(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33})\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{14}$$

führen darin durch

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,\alpha_{31}, \\ y &= r\,\alpha_{32}, \\ z &= r\,\alpha_{33}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

anstatt der Größen $\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}$ rechtwinklige Koordinaten x, y, z ein und beachten, daß s'_{33} ein Polynom vierter Ordnung in $\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}$ ist, so wird die Gleichung der betrachteten Fläche

$$\Phi(x, y, z) = \left(s'_{33}(x, y, z)\right)^{-\frac{1}{2}} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = 0. \tag{16}$$

Die Richtungscosinus der inneren Flächennormale sind durch das Verhältnis

$$\cos\zeta : \cos\eta : \cos\vartheta = \frac{\partial\Phi}{\partial x} : \frac{\partial\Phi}{\partial y} : \frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{17}$$

bestimmt. Die Ausführung der Differentiation ergibt

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x} &= -\frac{1}{2}\left(s'_{33}(x,y,z)\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial s'_{33}}{\partial x} + (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}x,\\
\frac{\partial\Phi}{\partial y} &= -\frac{1}{2}\left(s'_{33}(x,y,z)\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial s'_{33}}{\partial y} + (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}y,\\
\frac{\partial\Phi}{\partial z} &= -\frac{1}{2}\left(s'_{33}(x,y,z)\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial s'_{33}}{\partial z} + (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}z.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Berücksichtigt man die Beziehungen (8) und geht mittels der Gln. (14) und (15) von den Koordinaten x, y, z wieder zu den Richtungscosinus $\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}$ über, so erhält man dafür

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x} &= -(A_1 - s'_{33}\,\alpha_{31}),\\
\frac{\partial\Phi}{\partial y} &= -(A_2 - s'_{33}\,\alpha_{32}),\\
\frac{\partial\Phi}{\partial z} &= -(A_3 - s'_{33}\,\alpha_{33}).
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Dies sind aber die in Gln. (10) bzw. (11) auftretenden Ausdrücke für die Richtungscosinus der Bewegungsrichtung. Beachtet man, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} = \sqrt{\frac{1}{\varrho\, s'_{33}}}$ ist, so ergibt sich der folgende Satz:

Die sich längs eines geraden, beliebig aus einem Kristall herausgeschnittenen Stabes in Richtung der Stabachse ausbreitenden axialen Schwingungen besitzen eine durch den Ausdruck $v = \sqrt{\frac{1}{\varrho\, s'_{33}}}$ bestimmte Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Die Richtung der zugehörigen Bewegung ist durch die Richtung der Normalen der Polarfläche vierter Ordnung, die durch den in die Fortpflanzungsrichtung weisenden Radiusvektor $r = v$ erzeugt wird, bestimmt; die Ebene der Bewegung bei fortschreitender, die Knotenebene bei stehender Bewegung verläuft parallel zu der in dem Punkt $r = v$ der Polarfläche an diese gelegte Tangentialebene.

Als Beispiel für das Vorstehende betrachten wir schmale Quarzstäbe des Schnittes $X_{90^0,\,\psi}$. Die Achse dieser Stäbe liegt in der YZ-Ebene des natürlichen Kristallsystems. Zur Orientierung der Stäbe dient der Winkel ψ, der von der Z-Achse gegen die Y-Achse positiv gezählt wird

(Fig. 2). Das Schema der Richtungscosinus (6) nimmt für die betrachteten Stäbe die Form

	x	y	z
x'	1	0	0
y'	0	$\cos\psi$	$-\sin\psi$
z'	0	$\sin\psi$	$\cos\psi$

(20)

an. Unter Beachtung des Schemas der Elastizitätskoeffizienten von Quarz erhält man für die Ausdrücke (8)

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 0, \\ A_2 &= 2\,s_{11}\sin^3\psi + (2\,s_{13} + s_{44})\sin\psi\cos^2\psi - 3\,s_{14}\sin^2\psi\cos\psi, \\ A_3 &= 2\,s_{33}\cos^3\psi + (2\,s_{13} + s_{44})\sin^2\psi\cos\psi - s_{14}\sin^3\psi, \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

für die Elastizitätskoeffizienten (7)

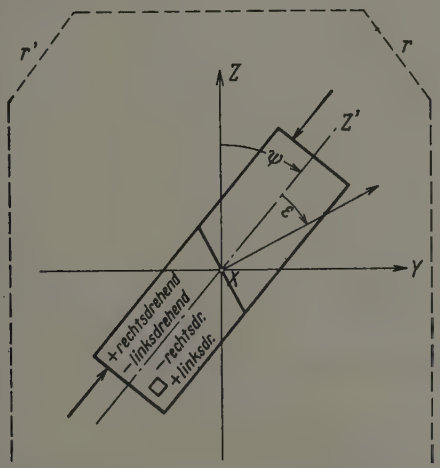


Fig. 2. Orientierung, piezoelektrische Polarisation und Lage der Knotenlinie der Quarzstäbe $X_{90^\circ,\psi}$.

$$\left.\begin{aligned} s'_{53} &= 0, \\ s'_{43} &= \frac{1}{2}\frac{\partial s'_{33}}{\partial\psi} = s_{11}\sin 2\psi\sin^2\psi - s_{33}\sin 2\psi\cos^2\psi + \\ &\quad + \frac{1}{4}(2\,s_{13} + s_{44})\sin 4\psi - s_{14}\sin\psi\sin 3\psi, \\ s'_{33} &= s_{11}\sin^4\psi + s_{33}\cos^4\psi + \frac{1}{4}(2\,s_{13} + s_{44})\sin^2 2\psi - \\ &\quad - s_{14}\sin 2\psi\sin^2\psi. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Wegen des Verschwindens von A_1 bzw. s'_{53} verläuft die Ebene der Bewegung bzw. die Knotenebene parallel zur X-Achse. Die Bewegungsrichtung ist nach (5) durch die Richtungscosinus

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = -\sin\varepsilon = -\frac{s'_{43}}{\sqrt{s'^2_{43}+s'^2_{33}}}, \\ \cos\gamma = -\cos\varepsilon = -\frac{s'_{33}}{\sqrt{s'^2_{43}+s'^2_{33}}} \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

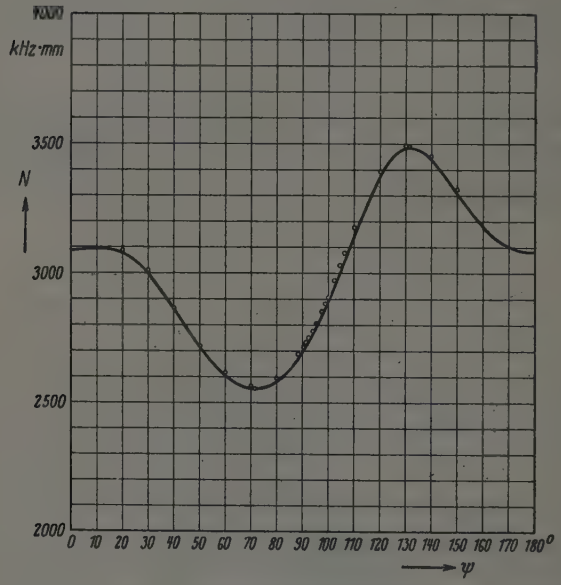


Fig. 3. Berechnete und gemessene Schwingungskoeffizienten der axialen Längsschwingungen der Quarzstäbe $X_{90°}$, ψ

bestimmt. Um einen spitzen Winkel zwischen beiden Richtungen zu erhalten, haben wir die Größen sin ε und cos ε mit negativen Vorzeichen eingeführt, was bei zentrisch symmetrischen Vorgängen, wie wir sie hier betrachten, möglich ist.

Die Frequenzformel (2) für Quarzstäbe, in der für s_{33} der Ausdruck (22) einzuführen ist, haben wir bereits früher in dem Bereich $\psi = 71^0\,33'$ bis $131^0\,44'$ geprüft[1]). Fig. 3 enthält die mit den früher angegebenen Werten für die Elastizitätskoeffizienten von Quarz[2])

[1]) R. Bechmann, Hochfrequenztechn. u. Elektroak. **61**, 1, 1934. — [2]) R. Bechmann, ZS. f. Phys. **18**, 515, 1942.

berechneten Schwingungskoeffizienten $N = \nu l$ als Funktion des Winkels ψ (ausgezogene Kurve), ferner die in einem erweiterten Winkelbereich gemessenen Werte. Die Oberflächen der Stäbe waren kathodenversilbert. Die Übereinstimmung zwischen berechneten und gemessenen Werten ist sehr befriedigend, die Abweichung in dem Bereich von 20 bis 60^0 und 140 bis 160^0 kleiner als 0,5%, in dem Bereich von 60 bis 140^0 schwankt sie zwischen 0,5 bis 1,2%.

Der aus Gl. (23) berechnete Neigungswinkel ε zwischen Fortpflanzungsrichtung und Bewegungsrichtung als Funktion des Orien-

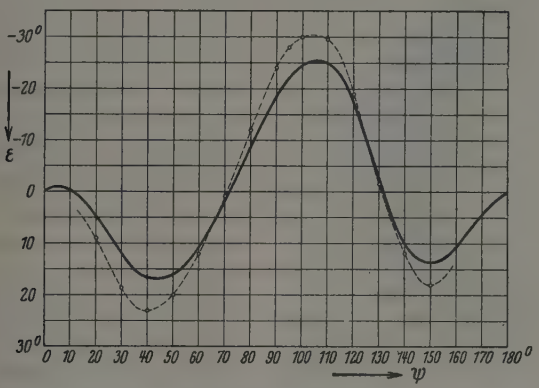


Fig. 4. Berechnete und gemessene Neigungswinkel zwischen Fortpflanzungsrichtung und Bewegungsrichtung bei Quarzstäben des Schnittes X_{90^0}, ψ.

tierungswinkels ψ ist in Fig. 4 dargestellt (ausgezogene Kurve). In den Winkelbereichen $\psi = 0^0$ bis $10^0\,52'$ und $\psi = 71^0\,33'$ bis $131^0\,44'$ ist der Neigungswinkel negativ, außerhalb dieser Bereiche ist er positiv. Die Neigungswinkel der Knotenlinie gegen die Stabachse wurden an zahlreichen schmalen, in der Grundschwingung erregten Quarzstäben, die unter verschiedenen Winkeln ψ orientiert waren, gemessen. Die Stäbe hatten ein Format von $25 \cdot 3{,}75 \cdot 1$ mm. Die Werte der beobachteten Winkel sind ebenfalls in Fig. 4 eingetragen. Sie sind durchweg etwas größer als die berechneten. Das Verhältnis Breite zu Länge der Stäbe betrug 0,15. Oberhalb dieses Breiten-Längenverhältnisses beginnt der Bereich der Kopplung der axialen Schwingung mit der Biegungsschwingung. Wie Versuche ergeben haben, ist der Neigungswinkel der Knotenlinie bei derselben Staborientierung unterhalb des Kopplungsbereiches von dem Stabformat unabhängig, für Stäbe mit größerem

Kantenverhältnis bzw. rechteckige Platten ist die Lage der Knotenlinie von dem Kantenverhältnis abhängig, wie bereits früher Matsumura und Kanzaki[1]) an breiteren Quarzstäben $X_{90°,\,90°}$ festgestellt haben. Die Richtung der Knotenlinie wurde an dem vorliegenden Versuchsmaterial in beiden Laboratorien mittels verschiedener Methoden bestimmt, einmal mittels aufgestäubten Lykopodium, weiter aus der Erhöhung des Resonanzwiderstandes des schwingenden Quarzstabes bei Abtasten der Kanten, wobei sich die Knotenlinien aus den Stellen kleinster Rückwirkung ermitteln. Die Meßgenauigkeit der Neigungswinkel betrug etwa 5%. Die Orientierung der Stäbe bei rechts- und linksdrehendem Quarzmaterial, das Vorzeichen der piezoelektrischen Erregung bei Druck senkrecht zur Oberfläche bzw. längs der Stabachse und die zugehörige Lage der Knotenlinie ergeben sich aus Fig. 2. Die Vorzeichen der Neigungswinkel stimmen zwischen Rechnung und Messung überein. Fig. 5 schließlich veranschaulicht experimentell in überzeugender Weise den oben abgeleiteten Satz, wonach im vorliegenden Beispiel die Knotenlinie parallel zur Tangente an die Kurve $\sqrt{\frac{E}{\varrho}} = \sqrt{\frac{1}{\varrho s'_{11}}}$ verläuft. Die ausgezogene Kurve stellt die durch Gl. (22) gegebene Funktion $\sqrt{\frac{1}{\varrho s'_{33}}}$ dar. Aufgestäubtes Lykopodium häuft sich bei Erregung der Stäbe an den in Ruhe bleibenden Stellen, den Knotenlinien an, während es von den übrigen sich in Bewegung befindlichen Stellen fortgeschleudert wird. In Fig. 5 sind die bei dem Versuch mit Bärlappsamen scharf markierten Knotenlinien auf den Stäben, deren Achsen in Richtung des zugehörigen Radiusvektors angeordnet sind, zu erkennen.

Fig. 5.
An Quarzstäben des Schnittes $X_{90°,\,\psi}$ beobachtete Neigung der Knotenlinie.

[1]) S. Matsumura u. S. Kanzaki, Rep. Rad. Res. and Works, Japan 2, 35, 1932.

Die Ursache für die Abweichung zwischen den berechneten und gemessenen Winkeln konnte noch nicht gefunden werden; einer der Gründe für diese Abweichung dürfte darin zu suchen sein, daß die beiden in dem Stab auftretenden Deformationen $z'_{z'}$ und $y'_{z'}$, deren Zusammenwirken die Neigung der Knotenlinie hervorruft, piezoelektrisch miteinander gekoppelt sind, wodurch eine zusätzliche Wechselwirkung zwischen den beiden Deformationskomponenten auftritt.

Bei der Ausführung der Messungen an den Quarzstäben hat uns Herr Dipl.-Ing. F. Schöfer, Telefunken, tatkräftig unterstützt, wofür wir ihm unseren Dank aussprechen.

Die Änderung der lichtelektrischen Elektronenemission beim Übergang reiner Zink-, Cadmium- und Aluminiumschichten aus dem ungeordneten in den geordneten Zustand und der Einfluß der Temperatur auf die Empfindlichkeit dieser Metalle.

Von **R. Suhrmann** und **Joh. Pietrzyk**[1]) in Breslau.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 1. November 1943.)

Im Hochvakuum werden Schichten aus Zn, Cd und Al auf einer gekühlten (83° abs.) Glasunterlage im ungeordneten Zustand kondensiert und ihre spektralen lichtelektrischen Empfindlichkeitskurven ermittelt. Durch Erwärmen auf Zimmertemperatur werden sie in den geordneten Zustand übergeführt und danach die Empfindlichkeitskurven bei 293 und 83° abs. gemessen. Die mit der Fowlerschen Formel berechneten Austrittspotentiale des betreffenden Metalls im ungeordneten und geordneten Zustand stimmen innerhalb der Fehlergrenzen überein: Zn 4,307 ± 0,007 Volt, Cd 4,099 ± 0,009 Volt, Al 4,20 ± 0,02 Volt. Die Mengenkonstante und damit die Zahl der emittierenden Zentren ist jedoch im ungeordneten Zustand größer als im geordneten.

Aufgabenstellung.

Läßt man im Hochvakuum Metalldampf auf einer stark (z. B. mit flüssiger Luft) gekühlten Unterlage kondensieren, so befindet sich die entstandene Metallschicht im „ungeordneten Zustand", in dem sie ein wesentlich geringeres, elektrisches Leitvermögen und Lichtreflexionsvermögen besitzt als das kristalline Material[2]). Mit fortschreitender Erwärmung bis auf Zimmertemperatur geht sie in geordnetere Zustände über, wobei der anfänglich extrem hohe Zusatzwiderstand abnimmt und das Lichtreflexionsvermögen anwächst[2]). Schließlich zeigt der Spiegel das normale Reflexionsvermögen des kristallinen Metalls. Die für den Übergang aus dem ungeordneten in den geordneten Zustand erforderliche Aktivierungsenergie ist nahe gleich der Grenzschwingungsenergie $h \cdot \nu_g$ des betreffenden metallischen Gitters[3]).

Bei der Untersuchung des Emissionsvermögens derartiger Metallschichten für Sekundärelektronen ergab sich, daß im ungeordneten Zustand mehr Sekundärelektronen emittiert werden als im geordneten, obwohl die Durchlässigkeit für die langsamen Sekundärelektronen im

[1]) D 85. — [2]) R. Suhrmann u. G. Barth, Phys. ZS. 35, 971, 1934; 36, 843, 1935; ZS. f. Phys. 103, 133, 1936; R. Suhrmann u. W. Berndt, ebenda 115, 17, 1940. — [3]) R. Suhrmann u. H. Schnackenberg, ZS. f. Phys. 119, 287, 1942.

ungeordneten Zustand kleiner ist als im geordneten[1]). Die größere Sekundärelektronenausbeute im ungeordneten Zustand mußte daher auf eine größere Zahl Primärelektronen absorbierender bzw. Sekundärelektronen emittierender Zentren zurückgeführt werden. War diese Deutung richtig, so mußte auch die lichtelektrische Empfindlichkeit von Metallschichten im ungeordneten Zustand größer sein als im geordneten, und zwar sollte beim Übergang aus dem ungeordneten in den geordneten Zustand nicht die Austrittsarbeit anwachsen, sondern die Mengenkonstante abnehmen, da auch die Zahl der für die Photoelektronenemission in Betracht kommenden Zentren beim Übergang in den geordneten Zustand eine Abnahme erfahren sollte.

Um diese Folgerung zu prüfen und damit einen Beitrag zur Klärung des Mechanismus der Elektronenemission zu liefern, wurden die im folgenden beschriebenen Versuche durchgeführt, bei denen Cadmium, Zink und Aluminium im Hochvakuum verdampft und bei 83° abs. kondensiert wurden. Nach Ermittlung der spektralen Empfindlichkeitskurve der ungeordneten Schicht erwärmte man sie auf Zimmertemperatur und nahm im geordneten Zustand wieder die lichtelektrische Empfindlichkeitskurve auf. Im allgemeinen wurde die Schicht nun wieder auf 83° abs. abgekühlt und die spektrale Empfindlichkeit im geordneten Zustand auch bei dieser Temperatur ermittelt. Aus dem Verlauf der Empfindlichkeitskurve konnte man die Elektronenaustrittsarbeit berechnen und feststellen, ob eine Veränderung der Austrittsarbeit oder der Zahl der für die Emission in Betracht kommenden Zentren mit der Vergrößerung des Ordnungszustandes verbunden ist.

Versuchsanordnung.

Die für die Versuche verwendete Photozelle (Fig. 1) ist ähnlich der in vorangehenden Untersuchungen über den Photoeffekt bei tiefen Temperaturen benutzten[2]).

An ein Gefäß aus Duranglas ist mittels eines Zwischenstückes D das Quarzrohr C angesetzt, das durch die beiden angeschmolzenen Quarzfenster A und A' verschlossen wird. C ist evakuiert. An den eigentlichen Zellenraum B sind das Rohr E mit der Kathodenzuführung und einer angeschmolzenen Platinfolie F und das Rohr G mit der elektrisch heizbaren Wolframspirale H angesetzt, die zum Verdampfen des

[1]) R. Suhrmann u. W. Kundt, Naturwiss. **27**, 548, 707, 1939; ZS. f. Phys. **120**, 363, 1943. — [2]) R. Suhrmann, Ergebnisse der exakten Naturw. **XIII**, 200, 1934.

zu untersuchenden Metalls und gleichzeitig als Anode dient[1]). Ferner ist B mit der Kohletasche K verbunden, die mit einem Pumpstengel L und einem Zertrümmerungsventil versehen ist. Die Zelle besitzt keinerlei Schliffe. Wenn sie bis über A' in flüssige Luft getaucht wird, so befindet sich die gesamte eigentliche Zellenwandung auf 83° abs., ohne daß sich die für den Lichteintritt vorgesehenen Fenster beschlagen. Es wird auf diese Weise vermieden, daß an nicht eingekühlten Stellen befindliche Gasreste auf die gekühlte Kathode gelangen.

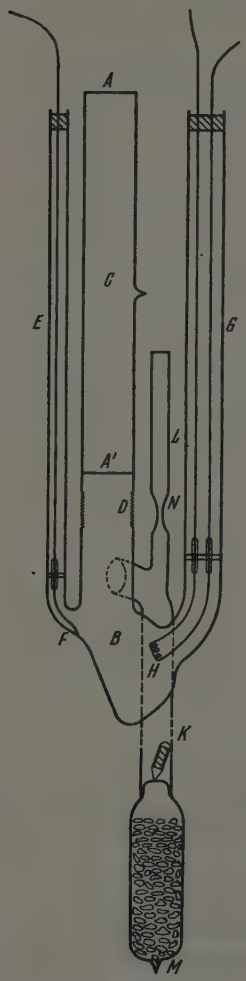


Fig. 1. Versuchsphotozelle.

Die Vorbereitung der Zelle geschah auf folgende Weise. Das mit Adsorptionskohle gefüllte Rohr K befand sich zunächst mit seinem unteren Ende M an einer gesonderten Vakuumapparatur, an der die Kohle gründlich ausgeheizt wurde. Darauf schmolz man es bei M ab und setzte es an die Zelle an. Auch die Wolframwendel wurde vor jedem Versuch in einem gesonderten Kolben längere Zeit entgast, dann mit dem aufzudampfenden Metall versehen und dieses im Hochvakuum geschmolzen. Darauf setzte man das Rohr G an das Zellengefäß B an. Die Zelle wurde nun an der Vakuumapparatur bei etwa 400° C ausgeheizt und danach bei N abgeschmolzen.

Nachdem das Ventil der Kohletasche zertrümmert war, tauchte man die Zelle bis über A' in flüssige Luft und dampfte etwa 1 Stunde später einen Teil des in der Wolframspiralen H befindlichen Metalls langsam auf die Innenseite des Gefäßes B auf. Bei den Cadmiumversuchen befand sich das Metall in einem mit einer Öffnung versehenen

[1]) Die für die Einschmelzungen erforderlichen Wolframstifte wurden uns von der Firma Osram, Werk B, freundlicherweise zur Verfügung gestellt, wofür wir auch an dieser Stelle besonders danken möchten. An die Stifte wurden Drähte aus vakuumgeschmolzenem Nickel angeschweißt und die Stifte beim Einschmelzen vollständig mit Glas umhüllt.

Quarzschiffchen, das von der Wolframspirale umgeben war. Das Quarzschiffchen wurde vor dem Einbringen des Cadmiums zusammen mit der Wolframspiralen ausgeheizt. Bei den Cadmiumversuchen mußte die Zelle bei 200° C ausgeheizt werden, da das Cadmium sonst bereits beim Ausheizen verdampft wäre. Auch das Cadmium war im Vakuum geschmolzen.

Um elektrostatische Störungen zu vermeiden, war die ganze Zelle mit einer geerdeten Hülle aus Stanniol und dünnem Kupferblech umgeben. Die Abkühlung erfolgte durch Überschieben eines mit flüssiger Luft gefüllten Dewargefäßes. Da die Zelle mit Hilfe von Stativklammern an dem Experimentiertisch fest anmontiert war, wurde ihre Justierung hierbei nicht verändert.

Bei der Aufnahme der Empfindlichkeitskurve fiel das im Doppelmonochromator spektral zerlegte Licht einer Quarz-Quecksilberlampe durch eine Quarzlinse hindurch über ein Umlenk-Quarzprisma[1]) entweder in die horizontal stehende Vergleichszelle oder senkrecht nach unten in das Untersuchungsgefäß. Die Vergleichszelle wurde mit einer auf cal geeichten Thermosäule ausgeeicht. Die Photoströme wurden nach der Kondensator-Nullmethode[2]) mit Hilfe eines Fadenelektrometers gemessen. Der Elektrometerfaden stand in Verbindung mit der Zellenanode H (Fig. 1). Die Stromspannungskurve war von etwa 80 Volt ab gesättigt. Als Kathodenspannung dienten 120 Volt.

Versuchsergebnisse und Auswertung der Messungen.

Die Versuche wurden in folgender Weise durchgeführt. Während sich die Zelle in flüssiger Luft befand, verdampfte man einen Teil des Metalls aus der Glühspirale H und ermittelte darauf die spektrale Empfindlichkeitskurve. Nun entfernte man die flüssige Luft von der Zellenwandung, so daß diese Zimmertemperatur annahm, ließ aber die Kohletasche noch weiterhin in flüssige Luft tauchen. Jetzt nahm man die Empfindlichkeitskurve der auf Zimmertemperatur erwärmten Metallschicht bei dieser Temperatur auf. Danach kühlte man wieder die ganze Zelle ein und ermittelte die Empfindlichkeitskurve der geordneten Schicht bei 83° abs. Hierauf erwärmte man die Zellenwandung und damit die Metallschicht wiederum auf Zimmertemperatur und maß zur Kontrolle die spektrale Empfindlichkeit bei einigen Wellen-

[1]) Vgl. Simon-Suhrmann, Lichtelektrische Zellen, S. 232. Berlin 1932.
[2]) Vgl. Simon-Suhrmann, l. c. S. 136.

längen. Diese Kontrollwerte stimmten durchweg innerhalb der Fehlergrenzen mit den vorher bei 293° abs. gemessenen Werten überein.

Auf die wieder auf 83° abs. abgekühlte geordnete Metallschicht dampfte man jetzt eine zweite ungeordnete Schicht auf, die in der gleichen Weise untersucht wurde wie die erste. Bei Cadmium und Aluminium wurde auf die zweite noch eine dritte Schicht aufgebracht.

Bei der Auswertung der Messungen benutzten wir zur Berechnung der Elektronen-Austrittsarbeit die Fowlersche Methode[3]), bei der einerseits beliebige Werte der Variablen δ als Abszisse und die zugehörigen Werte einer bestimmten Funktion $f(\delta)$ als Ordinate, andererseits $\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}$ als Abszisse und der Logarithmus der gemessenen lichtelektrischen Empfindlichkeit $\log i$ als Ordinate aufgetragen werden. Die Horizontalverschiebung, die erforderlich ist, um die erste Kurve (Fowlersche Kurve) mit den Meßpunkten $\log i \left| \frac{h \cdot \nu}{k \cdot T} \right.$ zur Deckung zu bringen, ist gleich dem Ausdruck $\frac{e_0 \cdot \Phi}{k \cdot T}$ und erlaubt somit das Elektronen-Austrittspotential Φ zu berechnen.

a) Zink. Die spektrale lichtelektrische Empfindlichkeit der zuerst aufgedampften Zinkschicht ist aus Tabelle 1 zu ersehen. Beim Vergleich von Kolonne 2 und 4 stellt man fest, daß die Empfindlichkeit im ganzen Spektralgebiet durch den Ordnungsvorgang abgenommen hat. Das Verhältnis der Empfindlichkeiten im ungeordneten und geordneten Zustand (Kolonne 6) läßt einen systematischen Gang mit der Wellenlänge nicht erkennen.

Tabelle 1. Spektrale lichtelektrische Empfindlichkeit einer Zinkschicht (1. Kondensation) im ungeordneten und geordneten Zustand.

1	2	3	4	5	6
Wellenlänge λ in mμ	Ungeordnet 83° abs. 10^{-5} Coul/cal	Geordnet 293° abs. 10^{-5} Coul/cal	Geordnet 83° abs. 10^{-5} Coul/cal	Geordnet 293° abs. 10^{-5} Coul/cal	$i_{ung.}/i_{g.}$ 83° abs.
280,3	0,97	0,83	0,60	—	1,6
276,0	3,16	1,95	1,60	—	1,93
269,9	7,28	4,68	3,78	—	1,92
265,5	13,3	7,64	6,74	—	1,97
260,5	18,5	10,6	9,35	—	1,98
254,0	32,9	19,5	16,1	—	2,05
248,2	47,7	27,5	24,8	—	1,93
239,9	74,5	44,4	40,6	43,8	1,84
234,5	106,4	62,6	56,8	60,8	1,87
230,0	145,0	82,0	76,1	83,1	1,91

[3]) Vgl. Müller-Pouillets Lehrb. d. Phys., 11. Aufl., Bd. IV, 4, S. 199.

Der Vergleich der Kolonnen 3 und 4 zeigt den Einfluß der Temperatur auf die Empfindlichkeit der geordneten Schicht. Aus Kolonne 5 ersieht man, daß der Temperatureffekt innerhalb der Meßfehler zu reproduzieren ist. Die bei 83° abs. gemessenen Werte liegen an der langwelligen Grenze wegen der Verminderung der den Elektronenaustritt erleichternden Wärmeenergie niedriger als die bei 293° abs. erhaltenen. Aber auch bei kürzeren Wellen ist die Empfindlichkeit bei der tieferen Temperatur geringer. Der bei Au [1]), Ag [2]), Bi [3]), Pt [4]) und Ta [5]) beobachtete Schnitt der Empfindlichkeitskurven ist also ebenso wie bei Be [3]) nicht vorhanden. Aus der reproduzierbaren Empfindlichkeitsabnahme beim Einkühlen der geordneten Schicht geht gleichzeitig hervor, daß die höhere Empfindlichkeit der ungeordneten Schicht nicht etwa auf adsorbierte Restgase, die bei der

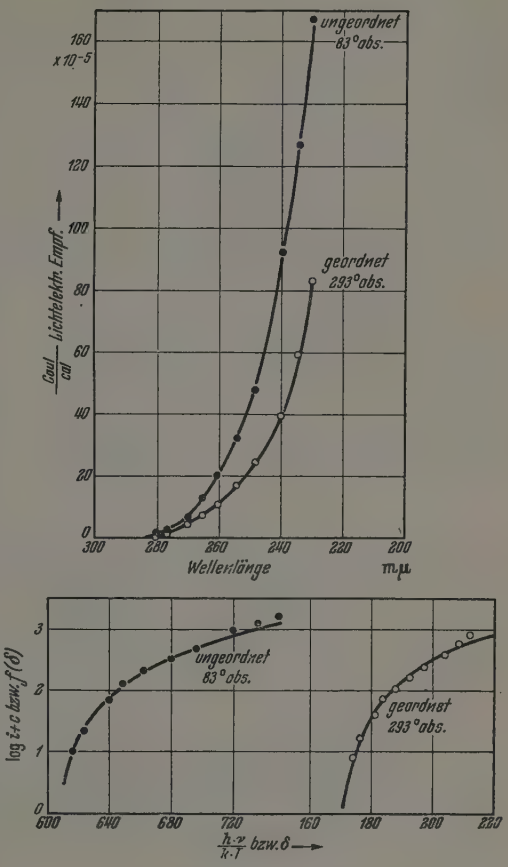


Fig. 2. Oben: Spektrale lichtelektrische Empfindlichkeitskurven einer Zinkschicht (zweite Kondensation) im ungeordneten und geordneten Zustand. Unten: Fowlersche Kurven mit den eingetragenen Meßpunkten der oberen Empfindlichkeitskurven.

[1]) L. W. Morris, Phys. Rev. **37**, 1263, 1931. — [2]) R. P. Winch, Phys. Rev. **37**, 1269, 1931. — [3]) R. Suhrmann u. A. Schallamach, ZS. f. Phys. **91**, 775, 1934. — [4]) R. Suhrmann u. H. Theissing, ZS. f. Phys. **73**, 709, 1932. — [5]) A. B. Cardwell, Phys. Rev. **38**, 2041, 1931.

Erwärmung abgegeben würden, zurückgeführt werden kann. Würde dies zutreffen, so müßte die wieder eingekühlte geordnete Schicht ebenfalls eine Empfindlichkeitszunahme zeigen.

Auf die geordnete Zn-Schicht wurde nach dem Einkühlen eine weitere ungeordnete Schicht aufgedampft, deren Empfindlichkeitskurven in Fig. 2 dargestellt sind. Die Empfindlichkeit dieser Schicht liegt in der gleichen Größe wie die der ersten ungeordneten Schicht. Durch den Ordnungsvorgang nimmt sie fast auf dieselben Werte ab.

Auf dem unteren Teil von Fig. 2 sind die zu den beiden oberen Kurven gehörenden Werte $\log i$ als Funktion von $\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}$, sowie die entsprechenden Fowlerschen Kurven eingetragen. Man sieht, daß die Punkte recht gut auf diesen Kurven liegen. Aus der Verschiebung erhält man für das Austrittspotential Φ bzw. die langwellige Grenze λ der beiden gemessenen Schichten für Zink:

Zink.

	Ungeordnet, 83° abs.		Geordnet, 293° abs.		Geordnet, 83° abs.	
	Φ in Volt	λ in mμ	Φ in Volt	λ in mμ	Φ in Volt	λ in mμ
1. Schicht	4,31	286,5	$4{,}30_5$	287,0	4,31	286,5
2. „	$4{,}31_5$	286,0	$4{,}29_5$	287,5	—	—

Als Mittelwert ergibt sich $\Phi = 4{,}307 \pm 0{,}007$ Volt. Innerhalb der Fehlergrenzen stimmen die Elektronen-Austrittsarbeiten im ungeordneten und geordneten Zustand überein. Für mehrfach destilliertes auf ein entgastes Molybdänblech aufgedampftes Zink erhielt De Voe [1]) 4,24 Volt.

b) *Cadmium.* Außer Zink- wurden aus der zweiten Gruppe des Periodensystems auch Cadmiumschichten aufgedampft. Auch bei diesem Metall konnte man auf der gekühlten geordneten Schicht eine neue ungeordnete Schicht kondensieren, die beim Erwärmen in den geordneten Zustand überging. Fig. 3 zeigt die an einer solchen Schicht erhaltenen spektralen Empfindlichkeitskurven im ungeordneten Zustand bei 83° abs. und nach dem Erwärmen auf 293° abs. Die Empfindlichkeit hat durch den Ordnungsvorgang wie bei Zink im ganzen

[1]) Ch. De Voe, Phys. Rev. **50**, 481, 1936.

Spektralbereich abgenommen. Die Meßwerte liegen sehr gut auf den Fowlerschen Kurven[1]).

Auf dieser Cd-Schicht wurde bei 83° abs. eine dritte Schicht kondensiert, deren spektrale Empfindlichkeit im ungeordneten Zustand bei

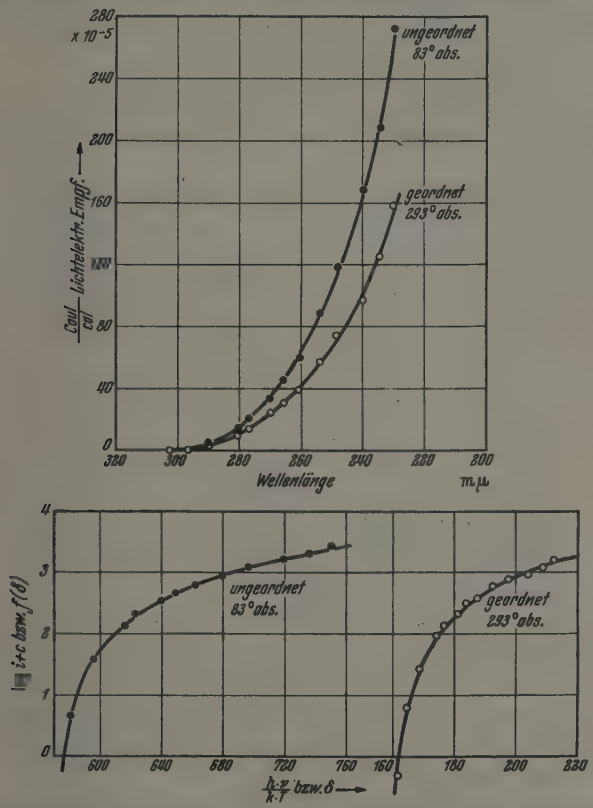


Fig. 3. Oben: Spektrale lichtelektrische Empfindlichkeitskurven einer Cadmiumschicht (zweite Kondensation) im ungeordneten und geordneten Zustand. Unten: Fowlersche Kurven mit den eingetragenen Meßpunkten der oberen Empfindlichkeitskurven.

[1]) Bei der ersten aufgedampften Cd-Schicht lagen die Meßpunkte zwar gut auf der Empfindlichkeitskurve, aber schlecht auf den Fowlerschen Kurven. Dies war offensichtlich auf restliche Verunreinigungen zurückzuführen, da die Zelle in diesem Falle nicht so hoch ausgeheizt werden konnte. Bei der zweiten und dritten aufgedampften Schicht waren diese Störungen nicht mehr vorhanden; wahrscheinlich waren die Verunreinigungen nun überdeckt, oder von der gekühlten Kohle adsorbiert. Die Messungen an der ersten Schicht wurden daher verworfen.

83° abs., sowie im geordneten bei 293° abs. und 83° abs. aus Tabelle 2 zu ersehen ist. Die Verhältniszahlen $i_{ung.}/i_{g.}$ in der 6. Kolonne lassen ein schwaches Anwachsen der Empfindlichkeitsabnahme beim Übergang der Schicht in den geordneten Zustand nach kurzen Wellen zu erkennen. Das gleiche Verhalten ist auch aus den Empfindlichkeitskurven der Fig. 3 zu entnehmen. Bei beiden Schichten liegt die Empfindlichkeitsabnahme in derselben Größe.

Tabelle 2. Spektrale lichtelektrische Empfindlichkeit einer Cadmiumschicht (3. Kondensation) im ungeordneten und geordneten Zustand.

1	2	3	4	5	6
Wellenlänge λ in mμ	Ungeordnet 83° abs. 10^{-5} Coul/cal	Geordnet 293° abs. 10^{-5} Coul/cal	Geordnet 83° abs. 10^{-5} Coul/cal	Geordnet 293° abs. 10^{-5} Coul/cal	$i_{ung.}/i_{g.}$ 83° abs.
302,2	(0,21)	(0,22)	(0,22)	—	—
296,7	(0,59)	(0,51)	(0,51)	—	—
289,3	3,22	3,38	2,94	—	1,10
280,3	12,7	11,3	9,6	—	1,32
276,0	18,7	16,7	14,3	—	1,31
269,9	33,5	26,2	23,3	—	1,44
265,5	48,1	37,0	32,1	—	1,50
260,5	64,0	47,5	45,8	—	1,39
254,0	100,0	69,5	68,5	—	1,46
248,2	145,5	89,1	94,5	—	1,54
239,9	231,8	139,9	143,9	—	1,61
234,5	308,6	186,0	198,2	186,8	1,56
230,0	409,5	241,2	264,1	243,5	1,55

Die Kolonnen 3 bzw. 5 und 4 zeigen den Temperatureinfluß bei der geordneten Schicht. Die bei 83° abs. gemessenen Werte liegen von der langwelligen Grenze ab bis 254,0 mμ unterhalb, von da ab oberhalb der bei 293° abs. ermittelten. Bei der geordneten Cd-Schicht schneiden sich also die bei 293° und 83° abs. gemessenen Empfindlichkeitskurven zwischen 254 und 248 mμ.

Aus der Horizontalverschiebung der Fowlerschen Kurven gegenüber den Meßwerten wurden die folgenden Austrittspotentiale bzw. langwellige Grenzen für die beiden Cd-Schichten berechnet:

Cadmium.

	Ungeordnet, 83° abs.		Geordnet, 293° abs.		Geordnet, 83° abs.	
	Φ in Volt	λ in mμ	Φ in Volt	λ in mμ	Φ in Volt	λ in mμ
2. Schicht	4,095	301,5	4,09	302,0	—	—
3. „	4,11	300,5	4,09	302,0	4,11	300,5

Der Mittelwert beträgt $\Phi = 4{,}099 \pm 0{,}009$ Volt. Die Austrittsarbeiten der ungeordneten und geordneten Schichten stimmen wiederum

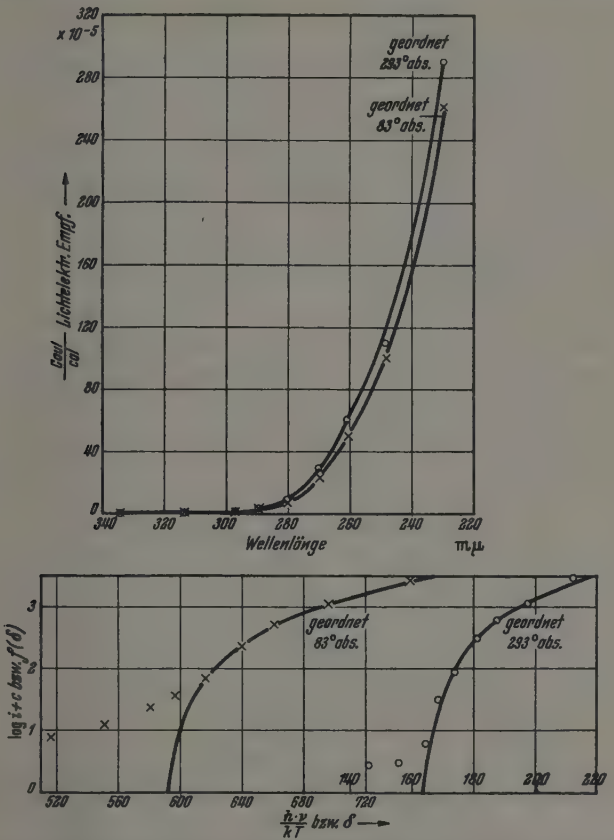


Fig. 4. Oben: Spektrale lichtelektrische Empfindlichkeitskurven einer Aluminiumschicht (erste Kondensation) im geordneten Zustand bei 293 und 83° abs. Unten: Fowlersche Kurven mit den eingetragenen Meßpunkten der oberen Empfindlichkeitskurven.

innerhalb des Meßfehlers überein. Für Cadmium, das durch mehrfache Destillation entgast wurde, erhielt Bomke[1]) 4,07 Volt.

c) *Aluminium.* Aus der dritten Gruppe des Periodensystems wurden Aluminiumschichten aufgedampft. Die spektralen Empfindlichkeitskurven dieser Schichten schnitten, besonders nach der ersten

[1]) H. Bomke, Ann. d. Phys. 10, 579, 1931.

Kondensation, nicht ganz so scharf in die Wellenlängenabszisse ein wie die der beiden anderen Metalle. Dementsprechend lagen die langwelligsten Meßpunkte oberhalb der Fowlerschen Kurven, während die anschließenden kurzwelligeren sich sehr gut zur Deckung bringen ließen. Fig. 4 zeigt den Verlauf der Kurven bei der zuerst aufgedampften Al-Schicht, nachdem sie durch Erwärmen auf Zimmertemperatur in den geordneten Zustand übergeführt worden war. Offenbar sind neben den Zentren großer Austrittsarbeit auch solche mit kleinerer Austrittsarbeit vorhanden, welche die allmähliche Annäherung an die Wellenlängenabszisse und damit die von den Fowlerschen Kurven abweichenden Punkte zur Folge haben. Bei der zweiten und dritten nachgedampften Al-Schicht ist der Einfluß der Zentren kleiner Austrittsarbeit fast verschwunden, wie man aus Fig. 5 ersieht. Es ist anzunehmen, daß die nach dem ersten Aufdampfen vorhandenen Zentren kleiner Austrittsarbeit auf mitgerissenes Aluminiumoxyd zurückzuführen sind, das bei später kondensierten Schichten zurücktritt.

Die spektrale Empfindlichkeit der dritten Al-Schicht ist aus Tabelle 3 zu ersehen. Die auch bei den Al-Schichten auftretende Empfindlichkeitsabnahme bei zunehmender Ordnung zeigt keinen ausgeprägten Gang. Das Verhältnis $i_{ung.}/i_{g.}$ ist größer als bei der zweiten Al-Schicht. Anscheinend ist der Ordnungszustand der geordneten Schicht größer als bei den beiden zuerst aufgedampften Al-Schichten, denn das Verhältnis $i_{ung.}/i_{g.}$ ist bei 230 mμ für die erste Schicht 1,2, für die zweite 1,8 und für die dritte 2,4. Dementsprechend beträgt die Empfindlichkeit bei 230 mμ im geordneten Zustand bei 83° abs. für die erste Schicht $261{,}0 \cdot 10^{-5}$ Coul/cal, für die zweite $224{,}2 \cdot 10^{-5}$ Coul/cal

Tabelle 3. Spektrale lichtelektrische Empfindlichkeit einer Aluminiumschicht (3. Kondensation) im ungeordneten und geordneten Zustand.

1	2	3	4	5	6
Wellenlänge λ in mμ	Ungeordnet 83° abs. 10^{-5} Coul/cal	Geordnet 293° abs. 10^{-5} Coul/cal	Geordnet 83° abs. 10^{-5} Coul/cal	Geordnet 293° abs. 10^{-5} Coul/cal	$i_{ung.}/i_{g.}$ 83° abs.
313,2	0,032	0,025	0,008	—	4
296,7	0,47	0,32	0,17	—	2,8
289,3	0,91	0,97	0,44	—	2,1
280,3	7,71	5,96	3,00	—	2,57
269,9	28,6	21,5	15,4	—	1,86
260,5	67,3	49,5	32,7	48,2	2,07
248,2	129,2	93,4	66,2	94,6	2,00
230,0	390,0	213,0	162,9	209,8	2,39

und für die dritte $162{,}9 \cdot 10^{-5}$ Coul/cal, sie nimmt also ebenfalls ab, da sich bei den nachgedampften Schichten wegen der Abnahme zusätzlich

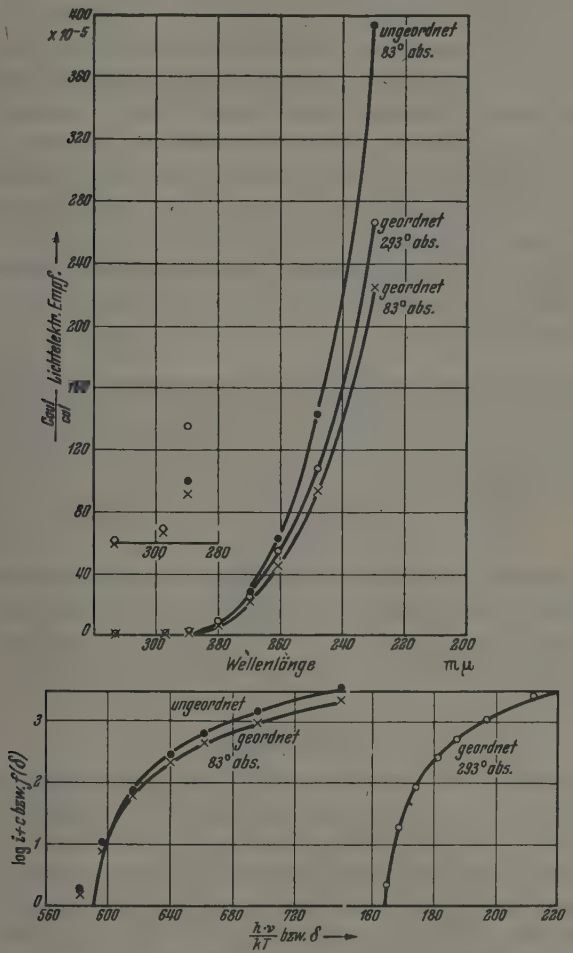


Fig. 5. Oben: Spektrale lichtelektrische Empfindlichkeitskurven einer Aluminiumschicht (zweite Kondensation) im ungeordneten und geordneten Zustand. Links eingetragene Meßpunkte: 40fach vergrößerter Ordinatenmaßstab. Unten: Fowlersche Kurven mit den eingetragenen Meßpunkten der oberen Empfindlichkeitskurven.

aufgedampfter Verunreinigungen (Oxyd) ein größerer Ordnungszustand beim Erwärmen auf Zimmertemperatur ausbilden kann.

Der Temperatureinfluß ist bei den drei Al-Schichten derselbe, wie der Vergleich von Fig. 4, 5 und Tabelle 3, Kolonnen 3 und 4 zeigt: Bei allen gemessenen Wellenlängen nimmt die Empfindlichkeit der geordneten Schicht durch Abkühlung von 293 auf 83° abs. ab. Die beiden Empfindlichkeitskurven schneiden sich also nicht. Bemerkenswert ist die Feststellung, daß bei der zweiten aufgedampften Al-Schicht (Fig. 5) die Werte von 280 mμ ab nach langen Wellen für den geordneten Zustand bei 293° abs. höher liegen als die für den ungeordneten bei 83° abs. Die wegen der Wärmebewegung zusätzlichen Elektronen in der Nähe der langwelligen Grenze vermögen also die Empfindlichkeit der geordneten Schicht über die der ungeordneten zu heben.

Die aus den Empfindlichkeitskurven der Al-Schichten nach der Fowlerschen Methode berechneten Elektronenaustrittspotentiale haben folgende Werte:

Aluminium.

	Ungeordnet, 83° abs.		Geordnet, 293° abs.		Geordnet, 83° abs.	
	Φ in Volt	λ in mμ	Φ in Volt	λ in mμ	Φ in Volt	λ in mμ
1. Schicht	4,195	294,2	4,14	298,0	4,22	292,5
2. „	4,22	292,5	4,17	296,0	4,21	293,5
3. „	4,22	292,5	4,18	295,0	4,22	292,0

Der Mittelwert beträgt $4{,}20 \pm 0{,}02$ Volt. Auch hier bleibt die Austrittsarbeit beim Übergang aus dem ungeordneten in den geordneten Zustand unverändert. Thein[1]) erhielt für eine Al-Schicht, die auf einer ausgeheizten Al-Platte aufgedampft war, 4,34 Volt.

Zusammenfassung.

Die geschilderten Versuche haben ergeben, daß ebenso wie die Sekundäremission auch die lichtelektrische Elektronenemission abnimmt, wenn bei tiefen Temperaturen kondensierte Zink-, Cadmium- und Aluminiumschichten durch Erwärmen auf Zimmertemperatur aus dem ungeordneten in den geordneten Zustand übergeführt werden. Die Empfindlichkeitsabnahme ist nicht auf eine Verringerung der Austrittsarbeit zurückzuführen, denn diese bleibt innerhalb der Fehlergrenzen unverändert. Vielmehr nimmt die Mengenkonstante um 30 bis 60% ab; die Zahl der emittierenden Zentren ist also im ungeordneten Zustand größer als im geordneten.

[1]) L. P. Thein, Phys. Rev. **53**, 287, 1938.

Die Abnahme der Empfindlichkeit durch die Verringerung der Zentrenzahl ist bei den untersuchten Metallschichten um so größer, je kleiner die Ordnungszahl Z im Periodensystem der Elemente ist, sie beträgt z. B. bei 230 mμ für Al ($Z = 13$) 58 %, Zn ($Z = 30$) 48 % und Cd ($Z = 48$) 41 % der Empfindlichkeit im ungeordneten Zustand, wenn die Kondensation bei 83° abs. erfolgte und die Schicht bis 293° abs. erwärmt wurde. Diese Beobachtung könnte im Zusammenhang stehen mit der größeren Elektronendurchlässigkeit der Metalle mit kleiner Ordnungszahl. Je kleiner Z, um so größer sollte der Anteil der Elektronen sein, die aus größerer Tiefe stammen und trotzdem die ungeordnete Schicht noch zu durchdringen vermögen. Dabei ist die Annahme vorausgesetzt, daß die Eindringungstiefe des Lichtes bei den ungeordneten Schichten größer als die Austrittstiefe der Elektronen ist, was bei der geringeren elektrischen Leitfähigkeit der ungeordneten Schichten möglich erscheint.

Die bei 293° und 83° abs. gemessenen Empfindlichkeitskurven der geordneten Schichten schneiden sich nur bei Cadmium, dem Metall mit der höchsten Ordnungszahl, bei den Metallen mit niedrigerer Ordnungszahl, Zn und Al, ist die bei 293° abs. ermittelte Empfindlichkeit im ganzen untersuchten Wellenbereich größer als bei 83° abs.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft sind wir für die materielle Unterstützung der Versuche zu Dank verpflichtet.

Physikalisch-Chemisches Institut der Technischen Hochschule und der Universität Breslau.

(Mitteilung aus dem Stromrichterwerk der Siemens-Schuckertwerke in Berlin-Siemensstadt.)

Ein neues Verfahren zur Untersuchung der Gasaufzehrung in der Glimmentladung.

Von G. Mierdel.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 31. Dezember 1943.)

Die Aufzehrung von Edelgasen in der Glimmentladung wird dadurch gemessen, daß in einem von Pumpe und Druckmeßgerät abgeschlossenen Rohr die mit der Zeit erfolgende Abnahme des Stromes (Härterwerden) durch ein äußeres Magnetfeld kompensiert wird, wobei durch eine vorangegangene Eichung der Zusammenhang zwischen Gasdruck und Magnetfeld festgelegt wird. Die in einer zylindrischen Hohlkathodenanordnung in Neon und Helium gewonnenen Ergebnisse werden mitgeteilt. Es ergibt sich eine gute Proportionalität zwischen Gasschwund und Strom. Im Sinne der Ionenschußhypothese folgt für Neon → Aluminium bei 1500 Volt Kathodenfall eine Festhaltewahrscheinlichkeit von etwa 0,06.

Die gebräuchlichen Verfahren zur Untersuchung der Aufzehrung von Edelgasen[1]) in Entladungen bestehen darin, mit einem geeigneten Druckmeßgerät (Wärmeleitungsmanometer, Mc-Leod oder dgl.), das mit dem Entladungsraum in dauernder Verbindung steht, den zeitlichen Druckabfall bei brennender Entladung zu verfolgen. Diese Methode hat den Nachteil, daß das Druckmeßgerät einschließlich der Zuleitung ein erhebliches Ballastvolumen darstellt, wodurch die Meßdauer unnötig verlängert wird. Dieser Nachteil wird hier in folgender Weise vermieden: Die Glimmentladung brennt zwischen einem Zylinder als Kathode und einem konaxialen Stab als Anode in einem Rohr von möglichst kleinem Volumen, das nach Füllung mit dem gewünschten Gas von der Pumpe abgezogen wird. Nunmehr wird das Rohr über einen festen Vorwiderstand R_0 an eine konstante Gleichspannung U_0 gelegt, so daß ein Entladungsstrom i_0 fließt. Infolge der sofort einsetzenden Aufzehrung des Gases wird das Rohr härter, der Strom sinkt. Läßt man jetzt ein Magnetfeld, dessen Kraftlinien parallel zur Rohrachse verlaufen, auf die Entladung einwirken, so gelingt es, wieder den alten Wert des Ent-

[1]) Z. B.: H. Alterthum, H. Lompe u. R. Seeliger, ZS. f. techn. Phys. **17**, 407, 1936; R. Seeliger, Naturwiss. **30**, 461, 1942; W. Bartholomeyczyk, Ann. d. Phys. (5) **42**, 534, 1943.

ladungsstromes zu erreichen. Es beruht dies darauf, daß die Bahnen der Träger, und zwar im wesentlichen die der Elektronen, im Magnetfeld gekrümmt werden. In der hier vorliegenden Anordnung wird dadurch erreicht, daß mit wachsendem Magnetfeld B ein zunehmender Bruchteil

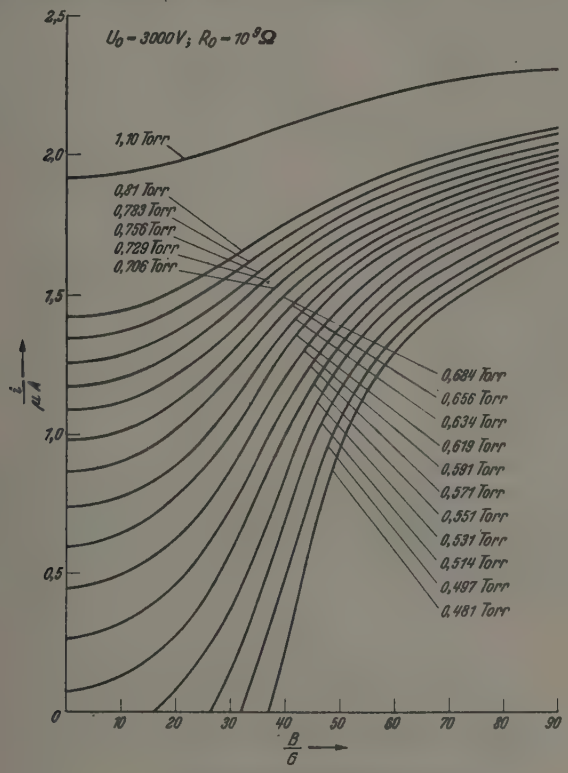


Fig. 1. $B\,(p, i)$-Kennlinienfeld für Neon.

der von dem Kathodenzylinder startenden Elektronen den Anodenstab nicht erreichen, sondern seitlich vorbeifliegend wieder gegen die Kathode anlaufen. Dies führt, wie aus der Theorie des gasgefüllten Magnetrons bekannt ist, zu Pendelbewegungen der Elektronen und demzufolge wegen der Erhöhung der Aufenthaltsdauer im Gasraum zu einer Begünstigung der Entladung; es kann daher derselbe Strom i_0 durch das Magnetfeld auch noch bei einem geringeren Gasdruck gehalten werden als ohne Magnetfeld. Das letztere kann daher eine Abnahme des Gas-

druckes kompensieren. Die zeitliche *Zu*nahme des zur Aufrechterhaltung einer konstanten Stromstärke i_0 erforderlichen Magnetfeldes B ergibt also ein Bild von der zeitlichen *Ab*nahme des Gasdruckes p, wenn die Anordnung vorher geeicht worden ist, d. h. wenn zusammengehörige Werte von B und p, die zu einem und demselben Wert von i_0 gehören,

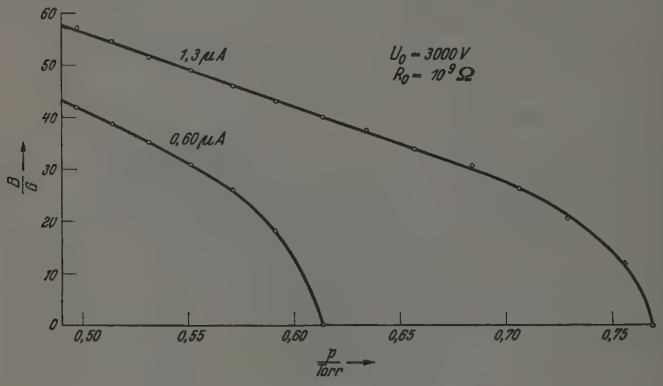


Fig. 2. Eichkurven für Neon.

bekannt sind. Diese Eichung wird an derselben Röhre jeweils vor ihrem Abziehen von der Pumpe durchgeführt, wobei zweckmäßig gleich das gesamte „Kennlinienfeld" $B\,(p, i)$ aufgenommen wird (Fig. 1), aus dem sich dann die eigentliche Eichbeziehung $B\,(p)$ für jeden Wert der Stromstärke i entnehmen läßt (Fig. 2).

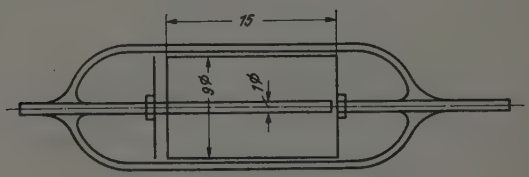


Fig. 3. Entladungsröhre.

Die benutzten Röhren hatten den in Fig. 3 gezeigten Aufbau. Die Elektroden bestanden aus Aluminium. Die Verwendung von Eisenelektroden ist trotz Störung des Magnetfeldes durch sie ebenfalls möglich, wie ein orientierender Versuch bewies. Das auf ein glasbläserisches Minimum beschränkte Volumen der Röhren betrug etwa 4,5 cm³. Die Versuche wurden hauptsächlich mit Neon durchgeführt. Fig. 4 zeigt als Beispiel die zeitliche Druckabnahme bei einem Strom von 0,50 mA

und einer Röhrenspannung (Kathodenfall) von 1500 Volt. Wie man sieht, erfolgt die Druckabnahme innerhalb des Bereiches von 0,8 bis

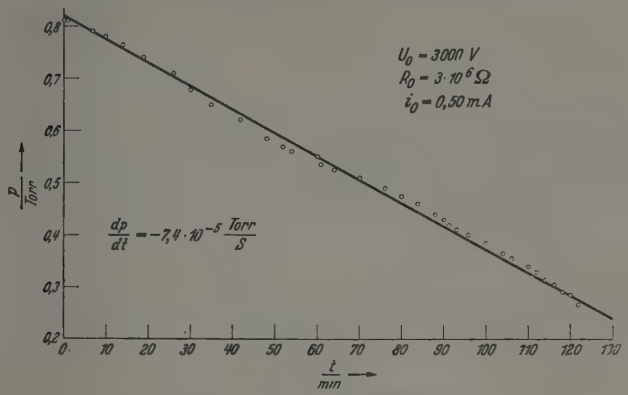


Fig. 4. Zeitlicher Druckabfall in Neon.

0,25 Torr vollständig proportional mit der Zeit, wobei sich ein $dp/dt = -7{,}4 \cdot 10^{-5}$ Torr/sec ergibt. Für eine sehr viel kleinere Strom-

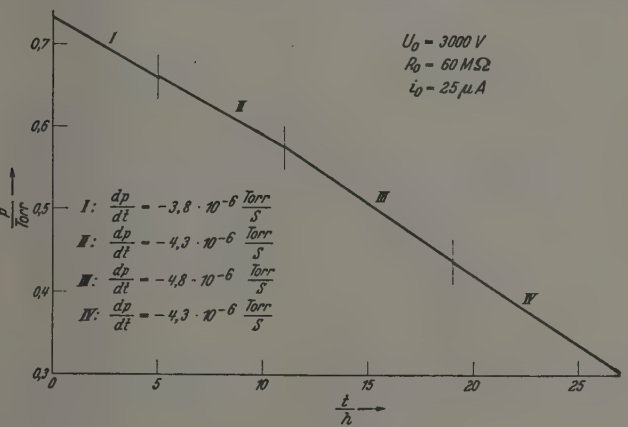


Fig. 5. Aufzehrung von Neon.

stärke ($i = 25\ \mu A$) bei demselben Kathodenfall von 1500 Volt ergibt sich die über 4 aufeinanderfolgende Tage mit jeweils etwa 14stündigen Pausen aufgenommene $p(t)$-Kurve der Fig. 5, aus der vielleicht gerade noch eine leichte Zunahme der Aufzehrung mit abnehmendem Druck erkennbar ist.

Ähnliche Messungen wurden nun bei verschiedenen Stromstärken durchgeführt, wobei jedoch die Spannung am Rohr selbst durch passende Einstellung des Vorschaltwiderstandes stets auf 1500 Volt gehalten wurde. Die Stromstärken wurden dabei fast um 3 Zehnerpotenzen verändert.

Wie die Fig. 6 zeigt, ist die Gasaufzehrung befriedigend genau der Stromstärke proportional, namentlich wenn man von der kleinsten gemessenen Stromstärke (0,6 μA) absieht, bei der die Messung ohnehin wegen der langen Zeit unsicher wird.

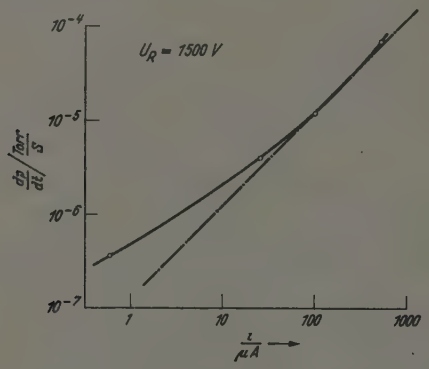


Fig. 6. Stromabhängigkeit der Gasaufzehrung in Neon.

Außer in Neon wurde noch in Helium gemessen. Hier ergab sich bei 50 μA eine Aufzehrung von $2{,}8 \cdot 10^{-6}$ Torr/sec, also rund ein Drittel des Effektes in Neon.

Die Anzahl der je Zeiteinheit verschwindenden Atome hängt mit $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$ durch die Beziehung (bei Zimmertemperatur)

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 3{,}3 \cdot 10^{16}\, V_0 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

zusammen, worin V_0 das Rohrvolumen ist. Extrapoliert man die $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$-Werte aus Fig. 6 auf den Strom 100 μA, so gelangt man zu dem Ergebnis, daß je sec rund $2 \cdot 10^{15}$ Ne-Atome verschwinden. Rechnet man damit, daß 5 % des Gesamtstromes von einfach geladenen positiven Ionen getragen werden, so ergibt sich, daß etwa jedes 16. Ion beim Aufprallen auf die Kathode festgehalten wird. Die Festhaltewahrscheinlichkeit ist also etwa 0,06. Da es sich hier um Kathodenfälle von 1500 Volt handelt und die Eindringtiefe der Ionen ins Kathodenmetall und damit ihre Chance, festgehalten zu werden, mit dem Kathodenfall sicher stark

zunimmt, scheint dieses Ergebnis im Vergleich zu den in den Greifswalder Arbeiten[1]) mitgeteilten Ausbeutezahlen von $10^{-4} \ldots 10^{-3}$ für Neon gegen Eisen nicht unvernünftig. Abgesehen von dem höheren Kathodenfall gibt es noch einen zweiten Grund dafür, daß im vorliegenden Fall die Gasaufzehrung besonders stark in Erscheinung tritt, nämlich die an Al-Kathoden zu erwartende geringe Kathodenzerstäubung, die verhindert, daß hineingeschossene Gasatome durch Abdecken von Kathodenmaterial wieder befreit werden. Aus demselben Grunde stellen sich in unserem Falle die Aufzehrungsphänomene sehr viel einfacher und übersichtlicher dar, als es von anderer Seite[1]) geschildert worden ist. Insbesondere hat es sich als nicht erforderlich herausgestellt, die Entladung mehrere Stunden lang einzubrennen (formieren), um zeitlich konstante Gasaufzehrung zu erreichen. Auch spielt die Reinheit des verwendeten Gases anscheinend keine sehr große Rolle.

Siemensstadt, den 29. Dezember 1943.

[1]) Z. B.: W. Bartholomeyczyk, l. c.

Über den Einfluß der Konvektion auf einen Lichtbogen.

Von W. Weizel in Bonn.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Dezember 1943.)

Die systematische Einteilung der Lichtbögen in wandstabilisierte Bögen, elektrodenstabilisierte Bögen und konvektionsbestimmte Bögen wird auf Übergangsformen ausgedehnt. Genauer untersucht wird der konvektionsgestörte, elektrodenstabilisierte Bogen, der den Übergang zwischen den freibrennenden Bögen mit kleinem Elektrodenabstand und den Flammenbögen darstellt und alle durch ihren eigenen Auftrieb abgetriebenen Bögen umfaßt. Ein zufällig gekrümmter Bogen zieht sich von selbst mit einer Geschwindigkeit v gerade, welche aus Leistung, Kanalquerschnitt, Krümmung und Bogentemperatur berechnet werden kann. Wird ein Lichtbogen durch seinen eigenen Auftrieb oder durch Anblasen mit einem Gasstrom abgetrieben, so krümmt er sich so, daß die Strömungsgeschwindigkeit gleich der Geschwindigkeit ist, mit der er sich ohne Strömung gerade strecken würde. Durch Erhöhen der Leistung kann man ihn gerade strecken. Dazu ergibt sich die interessante Feststellung, daß der ruhig brennende konvektionsgestörte, elektrodenstabilisierte Bogen plötzlich in einen Flammenbogen umschlägt, wenn die Leistung pro cm Elektrodenabstand unter einen gewissen kritischen Wert sinkt. Alle mehr modellmäßigen Überlegungen können durch eine systematische Störungsrechnung an der Elenbaas-Hellerschen Differentialgleichung gesichert werden.

Aus den vielen Gestalten, die ein Lichtbogen annehmen kann, kann man drei ziemlich einfache Haupttypen herausarbeiten [1]).

Der erste Typus ist der wandstabilisierte Bogen, der sich in einem ziemlich engen Rohr ausbildet, das er bis auf eine dickere oder dünnere Randzone erfüllt. Die Säule dieses Bogens kann man als eine zylindrische Entladung ansehen und in jedem Volumenelement gilt die Energiebilanz: Stromleistung = Abstrahlung + Wärmeableitung + Energieverlust durch ambipolare Trägerdiffusion.

Führt man im Querschnitt der Entladung die ebene Polarkoordinate r ein, so ist die Temperatur allein von r abhängig und alle Posten der Bilanz lassen sich leicht durch T ausdrücken. Die Abstrahlung ist direkt eine Funktion $S(T)$ der Temperatur, für die Wärmeableitung findet man das Glied*)

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\varkappa r\frac{dT}{dr}, \tag{1}$$

[1]) W. Weizel, ZS. f. techn.Phys. 24, 90, 1943; R. Rompe, W. Thouret u. W. Weizel, ZS. f. Phys. 122, 1, 1944.

*) Bezeichnungen: e = Elementarladung, $\varkappa$ = Wärmeleitung, U_i = wirksame Ionisierungsspannung, D_{am} = ambipolarer Diffusionskoeffizient, b = Elektronenbeweglichkeit, m = Elektronenmasse, h = Plancksches Wirkungsquantum, k = Boltzmann-Konstante, p = Druck.

worin $\varkappa$ den Wärmeleitungskoeffizienten bedeutet. Die ambipolare Diffusion trägt den Anteil

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r e D_{am} U_i \frac{dn}{dr} = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r e U_i D_{am} \frac{dn}{dT}\frac{dT}{dr}\right) \quad (2)$$

bei. Die Trägerkonzentration n hängt dabei mit der Temperatur durch die Sahagleichung

$$n = \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/4} k^{1/4} T^{1/4} p^{1/2} e^{-\frac{e U_i}{2kT}} \quad (3)$$

zusammen und die Stromwärme drückt sich mit Hilfe der Längsfeldstärke $\mathfrak{E}$ (Gradient) durch

$$\mathfrak{E} i = e n b \mathfrak{E}^2 \quad (4)$$

aus. b ist die Elektronenbeweglichkeit und i die Stromdichte. Dies liefert die Differentialgleichung

$$e n b \mathfrak{E}^2 = S - \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\left(\varkappa + e U_i D_{am}\frac{dn}{dT}\right)\frac{dT}{dr}\right\}, \quad (5)$$

welche ohne das Diffusionsglied schon von Elenbaas und Heller aufgestellt wurde [1]). Der Einfluß der Trägerdiffusion wurde zuerst von Rompe und Schulz [2]) bemerkt und vor kurzem in der angegebenen Form in die Differentialgleichung eingeführt [3]). Auf der Rohrwand ist die Temperatur vorgegeben und in der Rohrachse muß ein Temperaturmaximum liegen. Diese beiden Bedingungen legen zusammen mit der Gleichung (5) die Temperaturverteilung im Querschnitt fest. Die Rohrwand ist für die Ausbildung des Bogens wesentlich, da sie die Temperaturverteilung mitbestimmt. Die Temperatur in der Achse wird eine Funktion der Wandtemperatur und des Rohrradius, natürlich auch des Druckes und des Gradienten sein [4]). Aus der Zylindersymmetrie des Bogens folgt sofort, daß man ihn bei entsprechender Erhöhung der Brennspannung beliebig in die Länge ziehen kann, ohne seine Eigenschaften wesentlich zu ändern.

Der zweite Typus sind die elektrodenstabilisierten Bögen. Bei ihnen brennt die Säule zwischen nicht allzu weit entfernten Elektroden. Die Gefäßwände, wenn überhaupt welche vorhanden sind, befinden sich in so großer Entfernung, daß sie keinen nennenswerten Einfluß auf den

---

[1]) W. Elenbaas, Physica **2**, 169, 1935; G. Heller, Physics **6**, 389, 1935. — [2]) R. Rompe u. P. Schulz, ZS. f. Phys. **113**, 10, 1939. — [3]) W. Weizel, ZS. f. techn. Phys. **24**, 90, 1943; R. Rompe, W. Thouret u. W. Weizel, ZS. f. Phys. **122**, 1, 1944. — [4]) G. Schmitz, Phys. ZS. **44**, 129, 1943; W. Weizel u. G. Schmitz, Phys. ZS. **44**, 383, 1943.

Bogen mehr ausüben. Es ist grundsätzlich unzulässig, einen solchen Bogen als zylindrisches Gebilde anzusehen. Sein Verhalten (auch seine Querdimensionen) hängt vom Elektrodenabstand ab und man kann den Bogen nicht in die Länge ziehen, ohne seine Eigenschaften wesentlich zu ändern. Der Elektrodenzwischenraum wird auf dem kürzesten Wege überbrückt, weil so die größte Feldstärke erzielt wird. Für die elektrodenstabilisierten Bögen gilt eine Gleichung ähnlich wie (5). Auch die Randbedingung, die ein Maximum in der Bogenmitte verlangt, bleibt erhalten. Die Bedingung an der Rohrwand wird hingegen durch eine Gleichung ersetzt werden müssen, in welche der Elektrodenabstand maßgebend eingeht. In einem gewissen aber kleinen Bereich kann man statt dessen die Maximaltemperatur in der Bogenachse als willkürlich betrachten und den Elektrodenabstand als eine Funktion von ihr. Hat man diese Temperatur festgesetzt, so ergibt sich die Temperaturverteilung über den Querschnitt und entlang der Säule aus der Differentialgleichung, welche (5) ersetzt.

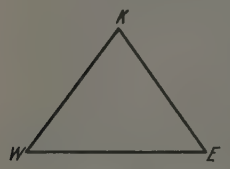


Fig. 1. Schema zur Systematik der Lichtbögen.

Ein dritter Typus ist der konvektionsbestimmte Bogen. Die Gestalt seines Bogenplasmas wird nicht vom elektrischen Feld und der Bewegung der Ladungsträger in ihm, sondern durch die Strömung des hocherhitzten Gases bestimmt. Der Bogen setzt sich in solchen Fällen oft aus zwei Flammen zusammen, welche entweder heiße Gasströme sind und durch den Auftrieb in Bewegung gesetzt werden, oder wie bei überlasteten Kohlebögen als Gasstrahlen aus den Elektroden hervorbrechen [1]). In jedem Fall ist aber das primäre Phänomen ein heißer und deshalb leitender Gasstrom, in welchem sich der Stromtransport irgendwie einrichtet. Die Beschreibung des Flammenbogens ist also hauptsächlich als ein aerodynamisches Problem anzusehen.

Die drei hier herausgestellten Typen sind natürlich idealisierte Fälle. Bei jedem wirklichen Bogen wird den umgebenden Gefäßwänden, den Elektroden und der unvermeidlichen Gasströmung ein gewisser Einfluß einzuräumen sein. Wirkliche Bögen sind also Übergangsformen zwischen den hier aufgezeichneten Idealtypen. Dies läßt sich sehr einfach an dem Diagramm der Fig. 1 überblicken. Die Ecken W, E, K des Dreiecks bedeuten den wandstabilisierten, den elektrodenstabili-

[1]) W. Finkelnburg, ZS. f. Phys. 113, 562, 1939; 114, 734, 1939.

sierten und den konvektionsbestimmten Bogen. In der Nähe der Ecke *W* liegen z. B. die meisten Quecksilberlampen (HgH, Häruslampen) und Natriumdampflampen. In der Nähe der Ecke *E* hat man die Kohlebögen mit kleinem Elektrodenabstand und die Quecksilberhochdrucklampen nach Rompe und Thouret in der Kugel. Die Kohlebögen muß man aber oft schon als Übergangsformen zu den Flammenbögen betrachten, welche in der Ecke *K* ihren Platz finden. Zu den letzteren gehören unter anderem auch die Schalterlichtbögen, der Bogen am Hörnerblitzableiter und die Kohlebögen bei großem Elektrodenabstand. Gemäß dem überwiegenden Einfluß der oft turbulenten Strömung brennen die Flammenbögen meist unruhig.

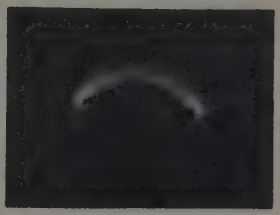


Fig. 2. Konvektionsgestörter, elektrodenstabilisierter Bogen, unter dem Einfluß der Konvektion nach oben abgetrieben.

Die Nützlichkeit dieses Einteilungsschemas erweist sich beim Studium von Übergangsformen, welche ohne diese Klassifizierung nur schwer systematisch einzuordnen wären. Ein typisch elektrodenstabilisierter Bogen überbrückt den Elektrodenabstand auf dem kürzesten Weg. Bei nicht ganz kleinem Elektrodenabstand biegt aber der Auftrieb das Säulenplasma in horizontaler Brennlage nach oben mehr oder weniger durch, so daß es die Elektroden durch einen nach oben gewölbten Bogen verbindet. Von dieser Entladungsform stammt die Bezeichnung Lichtbogen. Einen solchen Bogen, der in Fig. 2 abgebildet ist, wird man zweckmäßig als eine konvektionsgestörte, elektrodenstabilisierte Entladung bezeichnen. Hierdurch soll ausgedrückt werden, daß man den Bogen in erster Näherung als elektrodenstabilisiert beschreiben muß, daß sich aber in zweiter Näherung auch die Konvektion auswirkt. Auch andere Übergangsformen kommen vor. In etwas weiteren Röhren wird man bei mittlerem Elektrodenabstand Bögen erhalten, die man elektrodengestörte, wandstabilisierte Entladungen nennen kann. Unschwer findet man auch Bedingungen für wandgestörte, konvektionsbestimmte oder konvektionsgestörte, wandstabilisierte Bögen.

Der konvektionsgestörte, elektrodenstabilisierte Bogen. Beschränkt man sich auf den praktisch besonders wichtigen, freibrennenden Bogen, so ist nur der Übergang von elektrodenstabilisierten zum konvektionsbestimmten Bogen zu untersuchen. Solange die Konvektion nur die

Rolle einer Störung spielt, kann man die Vorgänge sogar durch Rechnung verfolgen.

Zu einem bestimmten Zeitpunkt möge der Lichtbogen aus irgendeinem Grunde den Elektrodenzwischenraum auf einem krummen Wege überbrücken. Die Stromlinien sind dann auf der äußeren Seite des Bogenkanals länger als auf der inneren und dementsprechend ist die Feldstärke außen kleiner als innen. Wie schon früher bemerkt wurde[1]), veranlaßt dieser Unterschied den Bogen auf seinen Krümmungsmittelpunkt hin zu wandern, wenn keine Konvektion wirksam ist. Um den Vorgang genauer zu erfassen, betrachten wir einen Querschnitt durch den Bogenkanal an einer Stelle, wo der Krümmungsradius den Wert ϱ besitzt, legen den Nullpunkt eines Koordinatensystems in die Bogenachse und die positive x-Achse in die Richtung zum Krümmungsmittelpunkt M, siehe Fig. 3. Ist $\mathfrak{E}_0$ die Feldstärke in der Achse, so gilt an anderen Stellen näherungsweise

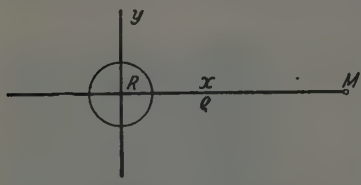


Fig. 3. Koordinaten zur Beschreibung des Bogens. R Bogenradius, ϱ Krümmungsradius, M Krümmungsmittelpunkt (der Kreis ist der Kanalquerschnitt).

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{E}_0}{1 - \frac{x}{\varrho}} \approx \mathfrak{E}_0 \left(1 + \frac{x}{\varrho}\right). \tag{6}$$

Die Temperaturverteilung über den Bogenquerschnitt ändert sich mit der Zeit, da der Bogen ja in der x-Richtung mit einer Geschwindigkeit v wandert und wir werden deshalb

$$T = T\,(x - vt) \tag{7}$$

schreiben. T genügt dann der Differentialgleichung

$$-v \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial t}. \tag{8}$$

Zu einem ersten groben Überblick gelangen wir durch folgende Überlegung. Der Bogenkanal habe den Radius R. Integriert man die Gleichung (8) von der heißesten Stelle bis $x = R$, so ergibt die linke Seite

$$-v \int_{\max}^{R} \frac{\partial T}{\partial x}\,\mathrm{d}x = v\,\Delta T = v\,T_{\max}.$$

[1]) R. Rompe u. W. Weizel, ZS. f. Phys. 120, 35, 1942.

ΔT ist der Temperaturunterschied zwischen dem Maximum und dem Rand und wir können dafür auch einfach die Maximaltemperatur einsetzen. Die rechte Seite liefert

$$\int_{\max}^{R} \frac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}x = R\left(\overline{\frac{\partial T}{\partial t}}\right).$$

Das ist der Mittelwert des Temperaturanstiegs in der rechten Hälfte des Bogens. In dieser Rechnung ist die Annahme enthalten, daß die heißeste Stelle in der Mitte des Bogens oder jedenfalls nicht weit davon entfernt liege, was bei nicht zu großem v richtig sein dürfte. Wir erhalten also die Beziehung

$$v\, T_{\max} = R \overline{\frac{\partial T_1}{\partial t}}, \tag{9a}$$

wo $\overline{\frac{\partial T_1}{\partial t}}$ den mittleren Temperaturanstieg auf der Innenseite des Bogens bedeutet. Auf dieselbe Weise finden wir für die äußere Seite

$$v\, T_{\max} = -R \overline{\frac{\partial T_2}{\partial t}}. \tag{9b}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich die Wanderungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{R}{2\, T_{\max}} \left(\overline{\frac{\partial T_1}{\partial t}} - \overline{\frac{\partial T_2}{\partial t}}\right). \tag{10}$$

Den Temperaturanstieg und -abfall in den beiden Bogenhälften können wir in erster Näherung ausrechnen. Wird die Leitfähigkeit mit $F(T)$ und die Ausstrahlung pro Volumeneinheit mit $S(T)$ bezeichnet, so gilt für beide Hälften

$$\frac{R^2 \pi}{2} C \overline{\frac{\partial T_1}{\partial t}} = \frac{R_2 \pi}{2} \{\mathfrak{E}_1^2 F(T_1) - S(T_1) - A(T_1)\}$$

bzw.

$$\frac{R^2 \pi}{2} C \overline{\frac{\partial T_2}{\partial t}} = \frac{R^2 \pi}{2} \{\mathfrak{E}_2^2 F(T_2) - S(T_2) - A(T_2)\}.$$

C ist die spezifische Wärme und A der Wärmeverlust durch Leitung.

Nun soll ja die Temperaturverteilung im wandernden Bogen im wesentlichen dieselbe wie im feststehenden sein, d. h. die größere Stromleistung auf der Innenseite soll in erster Näherung nur die Bewegung des Bogens und erst in zweiter Näherung eine Unsymmetrie der Temperaturverteilung hervorrufen. Setzen wir für die Feldstärke $\mathfrak{E}_1$ den

Wert an der Stelle $x = R/2$ und für $\mathfrak{E}_2$ den Wert an der Stelle $x = -R/2$ ein, so haben wir

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_1 &= \mathfrak{E}_0\left(1+\frac{R}{2\varrho}\right), \qquad \mathfrak{E}_1^2 = \mathfrak{E}_0^2\left(1+\frac{R}{\varrho}\right), \\ \mathfrak{E}_2 &= \mathfrak{E}_0\left(1-\frac{R}{2\varrho}\right), \qquad \mathfrak{E}_2^2 = \mathfrak{E}_0^2\left(1-\frac{R}{\varrho}\right). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

In der ersten Näherung können wir

$$F(T_2) = F(T_1); \quad S(T_2) = S(T_1); \quad \Lambda(T_n) = \Lambda(T_1) \tag{12}$$

setzen und es ergibt sich

$$\frac{\overline{\partial T_1}}{\partial t} - \frac{\overline{\partial T_2}}{\partial t} = \frac{2F\mathfrak{E}_0^2 R}{C\varrho}. \tag{13}$$

Bringt man dies in (10) ein, so erhält man für die Geschwindigkeit die Formel

$$v = \frac{F\mathfrak{E}_0^2 R^2}{C T_{\max} \varrho}. \tag{14}$$

Nun ist

$$L = F\mathfrak{E}_0^2 R^2 \pi$$

die Stromleistung und

$$Q = R^2 \pi C T_{\max}$$

der Wärmeinhalt pro cm Bogenlänge. Wir können also auch

$$v = \frac{L R^2}{Q\varrho} \tag{15}$$

schreiben.

Die Geschwindigkeit, mit der sich ein gekrümmtes Bogenstück in Richtung auf seinen Krümmungsmittelpunkt hin in Bewegung setzt, wächst mit der pro cm umgesetzten Leistung und dem Querschnitt des Kanals (R^2) und nimmt mit dem Krümmungsradius und dem Wärmeinhalt ab.

Jetzt können wir auch etwas über die Gestalt angeben, die der Bogenkanal infolge seines eigenen Auftriebs annimmt. Es stellt sich eine solche Gleichgewichtsform ein, daß die Geschwindigkeit v gleich der Geschwindigkeit der Auftriebsströmung wird. Der Auftrieb hängt wesentlich von der Gasdichte und der Temperatur, die durch ihn entstehende Strömung noch von der Zähigkeit η und natürlich auch von der geometrischen Gestalt des Entladungsgefäßes ab. Man wird für die Auftriebsströmung also den Ansatz

$$v_{\text{Auftrieb}} = K \frac{s T_{\max}}{\eta} \qquad s = \text{spez. Gewicht} \tag{16}$$

machen, wo K ein Zahlfaktor ist, der nur nach völliger Durchrechnung des Strömungsproblems ermittelt werden kann. Als Gleichgewichtsbedingung erhalten wir so

$$\frac{L R^2}{Q \varrho} = K \frac{s T_{\max}}{\eta} \tag{17}$$

oder nach dem Krümmungsradius aufgelöst

$$\varrho = \frac{L R^2 \eta}{K Q T_{\max} s}. \tag{17a}$$

Man kann aus dieser Formel zunächst ablesen, daß man einen Bogen in gegebenem Gas und Gefäß (K und Q konstant, T und R nur wenig veränderlich), der durch die Konvektion nach oben abgetrieben ist, wieder gerade ziehen kann, wenn man die Leistung pro cm erhöht. Im übrigen zeigt sich, daß Entladungen mit kleinem Kanalquerschnitt mehr zum Abtreiben durch die Konvektion neigen, als solche mit großem Kanaldurchmesser. Auch dies stimmt mit den bisher gemachten Beobachtungen überein. Hier sollte man aber noch etwas Vorsicht walten lassen, weil R wahrscheinlich auch in die Konstante K etwas mit eingeht.

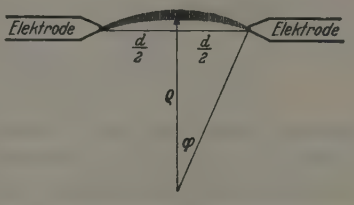


Fig. 4.

Die Formeln (17) an möglichst vielseitigem Versuchsmaterial zu prüfen wäre von großer Wichtigkeit, weil hierdurch ein neuer Einblick in den Mechanismus vieler Lichtbögen gewonnen werden kann.

Wir untersuchen jetzt auch nichtstationäre Verhältnisse. Ist

$$K \frac{s T_{\max}}{\eta} > \frac{L R^2}{Q \varrho}, \tag{18a}$$

so wird der Bogen der Strömung noch weiter nachgeben und sich noch mehr krümmen. Ist

$$K \frac{s T_{\max}}{\eta} < \frac{L R^2}{Q \varrho}, \tag{18b}$$

so wird er sich selbst gerade ziehen. Im ersten Falle wird also ϱ solange abnehmen und im zweiten Falle solange zunehmen, bis die Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist. Hier ist aber ein praktisch wichtiger, wenn auch mehr äußerlicher Umstand zu berücksichtigen. Wenn wir die Gesamtleistung am Bogen konstant halten, so ist die Leistung L pro cm von ϱ ziemlich unabhängig, wenn ϱ groß gegen den Elektrodenabstand

ist. Bildet der Bogen ein Stück eines Kreises, so ist seine wahre Länge nach Fig. 4

$$l = 2\,\varrho\varphi,$$

während sich der Elektrodenabstand durch

$$d = 2\,\varrho \sin\varphi$$

ausdrückt. Bezeichnen wir mit L_0 die Leistung pro cm Elektrodenabstand, so wird

$$L = L_0 \frac{d}{l} = L_0 \frac{d}{2\,\varrho \arcsin \frac{d}{2\,\varrho}}. \tag{19}$$

Wenn $\frac{d}{2\,\varrho} \ll 1$ gilt, so kann man den arcsin entwickeln und erhält

$$L = L_0 \frac{1}{1 + \frac{d^2}{24\,\varrho^2}} \approx L_0 \left(1 - \frac{d^2}{24\,\varrho^2}\right) \approx L_0. \tag{19a}$$

Kommt dagegen ϱ in die Größenordnung des Elektrodenabstandes, so nimmt L stark mit ϱ ab. Wir wollen jetzt versuchen, den Krümmungsradius zu berechnen und dabei annehmen, daß der Entladungsschlauch tatsächlich ein Kreisbogen ist und für L den Wert der Formel (19) einsetzen. Die Gleichgewichtsbedingung geht dann in

$$\frac{L_0\, d\, R^2}{2\,Q\,\varrho^2 \arcsin \frac{d}{2\,\varrho}} = \frac{K\,s\,T_{\max}}{\eta} \tag{20}$$

oder

$$\left(\frac{d}{2\,\varrho}\right)^2 \frac{1}{\arcsin \frac{d}{2\,\varrho}} = \frac{K\,s\,T_{\max}\,Q\,d}{2\,\eta\,L_0\,R^2} = A \tag{20a}$$

über.

$$\xi = \frac{d}{2\,\varrho} = \operatorname{tg}\varphi$$

ist ein direktes Maß für die Krümmung und die rechte Seite hat für jeden Bogen bei gegebenen Betriebsbedingungen einen festen Zahlwert A. Die Gleichgewichtsbedingung kann man also

$$\frac{\xi^2}{\arcsin \xi} = A \tag{21}$$

schreiben und hieraus ist ξ als Funktion von A zu gewinnen. In der Fig. 5 ist ξ gegen A aufgetragen. Es zeigt sich, wie zu erwarten, daß ξ zu A proportional ist, solange A selbst klein ist. Bei größerem A wächst ξ aber schneller als A und wenn A größer als 0,72 wird, kann man die Gleichung (20a) überhaupt nicht mehr erfüllen. Dies hat eine sehr

anschauliche Bedeutung. Bei zu großem A gibt es keine Gestalt mehr, bei der die Tendenz des Bogens sich gerade zu ziehen die Strömungsgeschwindigkeit kompensieren kann, sondern der Einfluß der Strömung überwiegt immer. Es ist dann nicht mehr erlaubt, den Bogen in erster Näherung als elektrodenstabilisiert zu behandeln, sondern er wird im Gegenteil vorwiegend durch die Konvektion beherrscht. Es bildet sich ein konvektionsbestimmter Bogen aus, meist ein Flammenbogen. Das Bemerkenswerte an diesem Sachverhalt liegt darin, daß es nicht einen stetigen Übergang zu den Flammenbögen gibt, sondern daß der elektrodenstabilisierte Bogen unter gewissen Bedingungen ganz plötzlich in den Flammenbogen umschlagen muß. Dies entspricht aber ganz genau dem experimentellen Verhalten der Bögen.

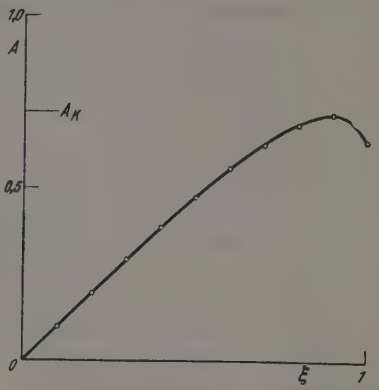


Fig. 5. A gegen ξ aufgetragen. Kritischer Wert $A_k = 0{,}72$, bei dem der Bogen in den Flammenbogen umschlägt.

Ein deutlicher Mangel unserer Betrachtung liegt darin, daß wir dem Bogen eine kreisförmige Gestalt zugeschrieben haben. Unsere Rechnung kann also den Umschlagspunkt in den Flammenbogen nicht quantitativ wiedergeben, sondern sie liefert den qualitativ sicher richtigen Gesichtspunkt, daß ein kritischer Wert A_k existiert. Für $A < A_k$ haben wir konvektionsgestörte, elektrodenstabilisierte Bögen zu erwarten, die nach oben etwas abgetrieben werden, für $A > A_k$ entstehen aber konvektionsbestimmte Flammenbögen*).

Wenn nicht die Gesamtleistung, sondern die Brennspannung konstant gehalten wird, muß der Umschlag in den Flammenbogen schon eher eintreten, da jetzt mit der Verlängerung des Bogens nicht nur L sinkt, sondern sogar L_0. Einen wesentlich anderen Anblick würde man aber erhalten, wenn man nicht die Brennspannung, sondern die Stromstärke einregulieren könnte. Hierdurch sollte man immer eine Stabilisierung erreichen, solange nicht andere Vorgänge (Elektroden-

*) Nach Steenbeck (ZS. f. techn. Phys. **18**, 593, 1937; Phys. ZS. **38**, 1019, 1937) kann man aber lange Bögen ziehen, wenn man den Bogen frei fallen läßt und so Schwere und Konvektion ausschaltet.

verdampfung, Magnetfelder) als wesentliche Störungen hinzutreten. Das Vorschalten eines strombegrenzenden Glühventils mit großer Spannungsreserve statt eines Widerstandes sollte also auf konvektionsgestörte Bögen eine wesentlich beruhigende Wirkung ausüben.

Mathematische Durchführung der Störungsrechnung. Wir wollen jetzt versuchen, die Wanderungsgeschwindigkeit v des gekrümmten Bogens nach einem systematischen Störungsverfahren zu berechnen, indem wir die Energiebilanz eines Volumenelements aufstellen. Sie lautet: Aufheizung = Stromwärme — Ausstrahlung — Wärmeableitung — Energieverlust durch Trägerdiffusion.

Unter Benutzung der zu Beginn berechneten Ausdrücke (1) bis (4) erhalten wir die Gleichung[1])

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\left(\varkappa + e U_i D_{\mathrm{am}} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T}\right)\frac{\partial T}{\partial r} + \mathfrak{E}^2 b e n - S. \tag{22}$$

Beim stationären Bogen verschwindet die linke Seite.

Wir führen zunächst kartesische Koordinaten x, y ein, wo x in die Richtung fällt, in der der Bogen sich bewegt. Dann erhalten wir

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa + e U_i D_{\mathrm{am}} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T}\right)\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa + e U_i D_{\mathrm{am}} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T}\right)\frac{\partial T}{\partial y} + \mathfrak{E}^2 b e n - S(T). \tag{22a}$$

Jetzt versuchen wir den Ansatz

$$T = T(y, x - v t), \tag{23}$$

aus dem sich

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -v\frac{\partial T}{\partial x}$$

ergibt. Setzen wir dies und

$$\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{E}_0^2\left(1 + \frac{x}{\varrho}\right)$$

in (22a) ein, so erhalten wir mit der Abkürzung

$$\sigma(T) = \varkappa + e U_i D_{\mathrm{am}} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T}$$

die Gleichung

$$-v C\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sigma\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma\frac{\partial T}{\partial y} + \mathfrak{E}_0^2\left(1 + \frac{x}{\varrho}\right) b n e - S. \tag{22b}$$

Wir untersuchen nun die Umgebung des Temperaturmaximums, indem wir T an dieser Stelle nach Potenzen von x und y entwickeln. Da ein

[1]) Für die achsennahen Gebiete des elektrodenstabilisierten Bogens kann man die Gleichungen des wandstabilisierten Bogens verwenden.

Maximum vorliegt, fehlen die linearen Glieder und da die Temperaturverteilung bezüglich y symmetrisch ist, kommen nur gerade Potenzen von y vor. Da wir in der Gleichung (22b) nur in x lineare Glieder berücksichtigt haben, brauchen wir die Entwicklung von T nur bis zur dritten Ordnung zu treiben, weil diese Ordnung bei zweimaliger Differentiation noch lineare Glieder liefert. Wir schreiben also

$$T = T_0 - a_2 x^2 - b_2 y^2 + a_3 x^3 + b_3 x y^2. \tag{24}$$

Jetzt bilden wir

$$S = S_0 + \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T}\right)_{T_0} (T - T_0) + \cdots$$

und

$$n = n_0 + \left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T}\right)_{T_0} (T - T_0) + \cdots$$

und erkennen, daß wir $S = S_0$ und $n = n_0$ setzen dürfen, da hierbei nur quadratische Glieder vernachlässigt werden und S und n nicht differenziert werden. Die gleiche Entwicklung für σ

$$\sigma = \sigma_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T}\right)_{T_0} (T - T_0)$$

zeigt, daß wir auch $\sigma = \sigma_0$ setzen dürfen. Bis auf Glieder dritter Ordnung gilt nämlich

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial x} = \sigma_0 \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \sigma \frac{\partial T}{\partial y} = \sigma_0 \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Damit geht (22b) in

$$-v C \frac{\partial T}{\partial x} = \sigma_0 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \mathfrak{E}_0^2 \left(1 + \frac{x}{\varrho}\right) b n_0 e - S \tag{22c}$$

über. Einsetzen von (24) liefert für die Koeffizienten die Gleichung

$$2 v a_2 C x = -2 \sigma_0 (a_2 + b_2) + 2 \sigma_0 x (3 a_3 + b_3) + \mathfrak{E}_0^2 \left(1 + \frac{x}{\varrho}\right) b n_0 e - S_0,$$

woraus sich sofort die Formeln

$$2 \sigma_0 (a_2 + b_2) = \mathfrak{E}_0^2 b n_0 e - S_0, \tag{25a}$$

$$2 v a_2 C = \mathfrak{E}_0^2 \frac{b n_0 e}{\varrho} + 2 \sigma_0 (3 a_3 + b_3) \tag{25b}$$

gewinnen lassen. Uns interessiert hauptsächlich die zweite dieser Beziehungen, aus der wir

$$v = \frac{\mathfrak{E}_0^2 b n_0 e}{2 a_2 \varrho C} + \frac{\sigma_0 (3 a_3 + b_3)}{a_2 C} \tag{25c}$$

entnehmen.

Wenn im bewegten Bogen dieselbe Temperaturverteilung wie im ruhenden vorläge, so hätten wir für T die Reihenentwicklung

$$T = T_0 - a_2 (x^2 + y^2) + \text{Glieder 4. Ordnung},$$

d. h. es würde

$$b_2 = a_2; \quad a_3 = b_3 = 0$$

sein. In diesem Falle würde der Bogen sich mit der Geschwindigkeit

$$v_1 = \frac{\mathfrak{E}_0^2 b\, n_0\, e}{2\, a_2\, \varrho\, C} \tag{26}$$

bewegen.

Wenn andererseits der Bogen nicht wandern würde, würde das stärkere Feld auf der Innenseite eine Unsymmetrie der Temperaturverteilung bewirken, wie man leicht einsieht. Auf der Innenseite nämlich wird die Feldstärke größer, wenn man sich vom Temperaturmaximum entfernt, auf der Außenseite hingegen kleiner. An vergleichbaren Punkten ist innen also die Stromleistung und damit auch die Wärmeentwicklung größer als außen. In der Innenseite müssen die Temperaturen höher sein als an entsprechenden Punkten der Außenseite. Die Temperatur fällt langsam in der Richtung ab, wo der Bogen konkav ist und schnell, wo er konvex ist. Statt einer symmetrischen Temperaturverteilung erwartet man eine Verteilung, wie sie in der Fig. 6 schematisch gezeichnet ist. Die Konstante a_3 ist positiv und es ist vielleicht vernünftig, $a_3 = b_3$ zu setzen. Die Fortbewegung des Bogens wirkt allerdings der Unsymmetrie entgegen und verkleinert sie, so daß sie voraussichtlich nie bedeutende Werte annehmen kann.

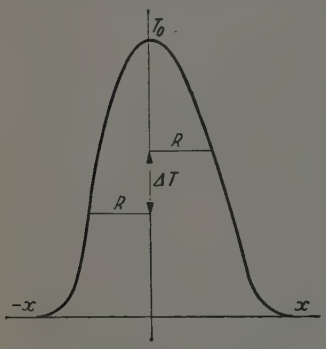


Fig. 6. Unsymmetrische Temperaturverteilung quer durch den Bogen.

Die unsymmetrische Temperaturverteilung trägt nun ihrerseits zu der Wanderungsgeschwindigkeit das Glied

$$v_2 = \frac{\sigma_0 (3\, a_3 + b_3)}{a_2\, C} \tag{26a}$$

bei. Eliminiert man hieraus σ_0 mit Hilfe von (25 a), so erhält man

$$v_2 = \frac{(\mathfrak{E}_0^2 b\, n_0\, e - S_0)(3\, a_3 + b_3)}{2\,(a_2 + b_2)\, C\, a_2}.$$

Die Wanderungsgeschwindigkeit des Bogens setzt sich also aus zwei Anteilen zusammen, von denen der eine nichts mit der Wärme-

leitung zu tun hat, während der zweite den Wärmeleitungskoeffizienten enthält. Der erste Anteil rührt daher, daß die innere Seite des Bogens direkt durch das höhere Feld aufgeheizt wird, während sich die äußere Seite wegen der kleinen Feldstärke abkühlt. Der zweite Anteil rührt daher, daß der Bogen auf der Seite, wo das Temperaturgefälle geringer ist, weniger Energie durch Wärmeleitung verliert als auf der anderen Seite. Das Verhältnis beider Anteile ist

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{2\,(3\,a_3 + b_3)\,\varrho}{(a_2 + b_2)} \left(1 - \frac{S_0}{\mathfrak{E}_0^2\, b\, n_0\, e}\right). \tag{27}$$

Nun bedeutet aber

$$\frac{S}{\mathfrak{E}_0^2\, b\, n_0\, e}$$

den Bruchteil der Stromleistung in der Bogenmitte, der durch Abstrahlung fortgeschafft wird. Bei den meisten Entladungen ist er nahezu 1. Wir werden Gründe dafür finden, daß sich der Faktor

$$2\,\frac{(3\,a_3 + b_3)\,\varrho}{(a_2 + b_2)} \tag{28}$$

von 1 nicht allzu verschieden sein kann. Die Wanderungsgeschwindigkeit des Bogens ist dann im wesentlichen durch den Anteil v_1 bestimmt. Daß der zweite Anteil überhaupt mitwirkt, werden wir aber weiter unten feststellen.

Wir müssen nun versuchen, a_2, b_2, a_3 und b_3 mit Größen in Verbindung zu bringen, deren Bedeutung anschaulich ist. Die Temperaturverteilung über die y-Richtung kann sicherlich nicht sehr stark von der über die x-Richtung abweichen. Sie muß ungefähr das Mittel der Verteilung auf der positiven und negativen x-Seite sein. Das bedeutet aber, daß wir $a_2 = b_2$ zu setzen haben. Die Glieder $a_3\,x^3 + b_3\,xy^2$, welche die Unsymmetrie ausdrücken, werden wir auf $a_3\,x^3$ reduzieren, damit an der Stelle $x = 0$ überall das Temperaturmaximum eintritt. Längs der x-Achse haben wir dann die Temperaturverteilung

$$T = T_0 - a_2\,x^2 + a_3\,x^3.$$

An einer Stelle x_1 auf der Innenseite herrscht die Temperatur

$$T_i = T_0 - a_2\,x_1^2 + a_3\,x_1^3$$

und an der entsprechenden Stelle außen

$$T_a = T_0 - a_2\,x_1^2 - a_3\,x_1^3.$$

Als Kanalradius wollen wir die Strecke R definieren, bei der $T_i + T_a = T_0$ ist, d. h. wo die mittlere Temperatur beider Seiten gleich der halben Maximaltemperatur ist. Hieraus ergibt sich

$$T_0 = 2\,a_2\,R^2; \qquad a_2 = \frac{T_0}{2\,R^2}. \tag{29}$$

Mit ΔT sei nun der Unterschied $T_i - T_a$ bezeichnet. Dann ist

$$\Delta T = 2 a_3 R^3; \quad a_3 = \frac{\Delta T}{2 R^3}. \tag{30}$$

Setzt man dies und $b_3 = 0$ und $b_2 = a_2$ in (28) ein, so erhält man

$$2 \varrho \frac{3 a_3 + b_3}{a_2 + b_2} = \frac{3 a_3}{a_2} \varrho = \frac{3 \Delta T}{T_0} \cdot \frac{\varrho}{R}.$$

Während die Temperatur von der Mitte bis zum Kanalrand um $T_0/2$ fällt, beträgt die Temperaturunsymmetrie der beiden Seiten gerade ΔT. Das Verhältnis $3 \Delta T/T_0$ ist sicher proportional dem Verhältnis R/ϱ und kann nicht sehr viel größer sein als dieses. Damit wäre dargetan, daß (28) von der Größenordnung 1 ist und daß v_2/v_1 ziemlich klein ist.

Wir können jetzt aber auch v_1 ausrechnen. Setzen wir a_2 aus (29) in (26) ein, so erhalten wir

$$v_1 = \frac{e n_0 b \mathfrak{E}_0^2 R^2}{\varrho C T_0}. \tag{31}$$

$n_0 e b \mathfrak{E}_0^2$ ist die Stromleistungsdichte in der Bogenachse und $C T_0$ die Energiedichte an dieser Stelle. Erweitert man (31) mit dem Kanalquerschnitt $R^2\pi$ und läßt den Abfall beider Größen nach außen unberücksichtigt, so kommt man zu der Formel (15)

$$v_1 = \frac{L R^2}{Q \varrho} \tag{15}$$

zurück. Wie wir jetzt sehen, gibt sie keinen richtigen, sondern einen zu kleinen Wert der Geschwindigkeit, weil die Leistung nach der Bogenmitte zu rascher steigt als die Energiedichte.

Beim Beginn der Bewegung, welche einen zufällig gekrümmten Bogen gerade zieht, haben wir zuerst die Geschwindigkeit v_1. Dagegen spielt v_2 kaum eine Rolle. Es bildet sich aber eine gewisse Unsymmetrie der Temperaturverteilung aus, welche auch noch vorhanden ist, nachdem der Bogen die gerade Form schon erreicht hat. In diesem Moment ist $v_1 = 0$, aber v_2 ist noch vorhanden. Der Bogen prellt also ein wenig über die gestreckte Lage hinaus und biegt etwas nach der anderen Seite aus, um allerdings dann bald wieder die entgegengesetzte Bewegung einzuschlagen. Es kommt zu Schwingungen des Bogens um die gestreckte Lage, welche natürlich sehr gedämpft sind. Steenbeck[1]) hat bei seinen bekannten Fallversuchen die Konvektion plötzlich ausgeschaltet, indem er die ganze Apparatur fallen ließ und die Rückkehr des Bogens in die gerade Lage gefilmt. Nach einer

[1]) M. Steenbeck, ZS. f. techn. Phys. 18, 593, 1937; Phys. ZS. 38, 1019, 1937.

privaten Mitteilung ist dort tatsächlich zu sehen, daß der Bogen über die gerade Lage vorprellt.

Störungsrechnung für den konvektionsgestörten Bogen. Im vorigen Abschnitt wurde die Rückkehr eines zufällig gekrümmten Bogens in seine normale Brennlage durch eine Störungsrechnung verfolgt. Nach fast demselben Verfahren können wir aber auch den konvektionsgestörten Bogen behandeln. In diesem Falle ist die Entladung stationär und die Energiebilanz lautet: Stromwärme — Ausstrahlung — Wärmeableitung — Energieverlust durch Trägerdiffusion = Energieabfuhr durch den Gasstrom.

Ist C die spez. Wärme, so führt die Gasströmung, welche mit der Geschwindigkeit v in Richtung der negativen x-Achse fließt, aus dem Volumenelement die Wärme

$$-vC\frac{\partial T}{\partial x}$$

ab. Setzen wir dies und die Ausdrücke (1) bis (4) in die Bilanz ein, so erhalten wir wieder die Gleichung (22) für den konvektionsgestörten Bogen. Der einzige Unterschied ist, daß jetzt v nicht die Geschwindigkeit bedeutet, mit der sich der Bogen geradezieht, sondern die Strömungsgeschwindigkeit. Auch sonst tritt in der Rechnung keine Änderung ein und man kommt zu der Formel (25c) für die Strömungsgeschwindigkeit. An der folgenden Diskussion ändert sich nur die Feststellung, daß a_3 positiv sein muß. Dies kann man bei der von der Konvektion hervorgebrachten Unsymmetrie nicht begründen und ich möchte sogar das Gegenteil vermuten. Dagegen läßt sich wie oben plausibel machen, daß man gewöhnlich in guter Näherung statt (25c) einfach

$$v = \frac{e n_0 b \mathfrak{E}_0^2}{2 a_2 C \varrho}$$

schreiben darf und daß man wieder zur Beziehung (15)

$$v = \frac{L R^2}{Q \varrho} \qquad (15)$$

gelangt, wenn auch mit der schon erwähnten Einschränkung der Genauigkeit.

Gemeinsam mit E. Kinzer sind Versuche angestellt worden, um die hier theoretisch abgeleiteten Zusammenhänge experimentell zu prüfen. Hierüber soll aber später berichtet werden.

Bonn, Physikalisches Institut der Universität.

Über das Toeplersche Funkengesetz

Von **R. Rompe** in Berlin und **W. Weizel** in Bonn.

(Eingegangen am 24. Januar 1944.)

Das Toeplersche Funkengesetz läßt sich nicht aus einem auf die Elementarprozesse zurückgehenden Modell des Funkens in seinem stromstarken Zeitbereich ableiten. Hingegen liefert ein solches Modell ein Gesetz, welches, ohne mit dem Toeplerschen übereinzustimmen, eine gewisse Ähnlichkeit mit ihm besitzt: Es wird das Quadrat der Leitfähigkeit proportional dem zeitlichen Integral des Stromquadrates.

Für viele Probleme ist es wichtig zu wissen, wie der Widerstand einer Gasentladungsstrecke sich mit der Zeit ändert, wenn bei der Zündung die Spannung zwischen den Elektroden zusammenbricht. Zweckmäßig unterscheidet man wohl zwei Phasen dieses Vorganges, nämlich die Zeit des Aufbaues der Entladung, während der die Leitfähigkeit noch gering ist und dann den anschließenden plötzlichen Anstieg der Leitfähigkeit zu großen Werten. Diese Zweiteilung wird z. B. durch die experimentellen Ergebnisse von Raether nahegelegt. Uns interessiert hier nur die 2. Phase. Sie ist gekennzeichnet durch hohe Stromstärken, die 10 bis 10000 Amp. und mehr betragen können. Werden so hohe Ströme nicht erzielt, weil die Form der Elektroden oder andere Schaltelemente dies verhindern, dann bildet sich die 2. Phase nicht aus.

Toepler hat ein Gesetz auf Grund von Messungen an Wanderwellen aufgestellt, welches die zeitliche Abhängigkeit des Funkenwiderstandes angeben soll. Die Leitfähigkeit des Funkens in einem bestimmten Zeitpunkt soll gleich der bis dahin durch den Funken geflossenen Elektrizitätsmenge mal einer Konstanten sein. Die Werte dieser Toeplerschen Funkenkonstanten findet man z. B. in dem Buch von Binder über Wanderwellen[1]). Sie ist eigentlich nicht konstant, sondern ändert sich während der Dauer des Funkens und mit der Schlagweite. Das Toeplersche Gesetz gilt also nur für bestimmte enge Spannungsbereiche und ist bestenfalls eine phänomenologische Regel, die eine sehr rohe Näherung bedeutet.

Man hat verschiedentlich versucht, dieses Gesetz auf die Elementarprozesse in der nichtstationären Entladung zurückzuführen. Dies ist

[1]) L. Binder, Die Wanderwellenvorgänge. Berlin 1928.

bisher nicht gelungen. Man kann aber aus verschiedenen Anhaltspunkten ein Modell einer solchen Entladung gewinnen und aus ihm ein Gesetz ableiten, das eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Toeplerschen besitzt, ohne mit ihm übereinzustimmen.

Wir nehmen an, daß das Funkenplasma nach dem Aufbau der Entladung, d. h. beim Beginn der zweiten Phase einen Kanal vom Radius R gleichmäßig ausfülle. Weiter nehmen wir an, daß der Ladungsausgleich an den Elektroden gegenüber dem Stromtransport in den elektrodenfernen Gebieten des eigentlichen Plasmas ohne wesentliche Bedeutung sei. Zwischen Strom und Feldstärke in der Entladung gilt dann die Beziehung

$$I = \pi R^2 n_e \cdot b_e \cdot \mathfrak{E} \cdot e. \tag{1}$$

In dieser Formel bedeutet I die Stromstärke, $\mathfrak{E}$ die Feldstärke, n_e die Elektronenkonzentration, b_e die Elektronenbeweglichkeit, e die Elementarladung und R den Radius des Funkenkanals. Besonders bei hohen Drucken kann man die Beweglichkeit unabhängig von der Feldstärke ansetzen und findet deshalb zwischen ihr und dem Strom die Beziehung (1).

Die Energiebilanz für die Vorgänge im Funkenkanal liefert eine zweite Beziehung

$$I \cdot \mathfrak{E} = S + W + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

welche keine weiteren Voraussetzungen nötig macht. W bedeutet den Energieverlust durch Wärmeleitung pro Sekunde, S die sekundliche Abstrahlung und U die innere Energie des Entladungskanals. S, W und U werden nun irgendwie mit der Elektronenkonzentration n_e zusammenhängen. Besteht etwas Ähnliches wie thermisches Gleichgewicht zwischen Elektronen und den anderen Bestandteilen des Plasmas, so kann man eine Temperatur T definieren und alle drei Größen sind Funktionen von ihr. Diese Voraussetzung benötigen wir jedoch im folgenden nicht.

Die Leitfähigkeit F ist das Verhältnis von Strom und Feldstärke, also

$$F = \frac{I}{\mathfrak{E}} = \pi R^2 n_e b_e e. \tag{3}$$

Für sie suchen wir eine Beziehung. Zunächst ist es leicht, sie mit der inneren Energie in Zusammenhang zu bringen. Diese setzt sich nämlich aus der Translationsenergie der Atome, Ionen und Elektronen, der

Ionisierungsenergie, bei Molekülen auch noch der Rotations-, Schwingungs- und Dissoziationsenergie zusammen. Hier wollen wir nun eine weitere Annahme einführen, die unsere Überlegungen auf schnell ablaufende Vorgänge beschränkt, aber bei Funken zulässig ist. Das Elektronengas nimmt aus dem Feld direkt Energie auf. Es überträgt sie aber nur langsam auf die schweren Plasmabestandteile, so daß in der kurzen Entladungszeit weder eine Zunahme der kinetischen Energie von Ionen, Atomen und Molekülen, noch eine Erhöhung der Rotation, Schwingung und Dissoziation eintritt. Ionisierungen, die in der Abspaltung von Elektronen bestehen, erfolgen hingegen schnell. Unter diesen Voraussetzungen finden wir für die innere Energie den Ansatz

$$U = \pi R^2 n_e \cdot \tfrac{3}{2} \varkappa T + \pi R^2 n_e e V_i . \qquad (4)$$

Der erste Anteil ist die kinetische Energie der Elektronen und der zweite Anteil die Ionisierungsenergie.

Innere Energie und Leitfähigkeit sind beide der Elektronenkonzentration proportional. Die Proportionalitätskonstanten hängen zwar noch etwas von der Temperatur ab, doch ist diese Abhängigkeit nur gering. Man wird also in leidlicher Näherung die Leitfähigkeit proportional zur inneren Energie setzen dürfen.

$$F = a \cdot U; \qquad a = \frac{b_e e}{\tfrac{3}{2} \varkappa T + e V_i} . \qquad (5)$$

Nimmt man im Kanal thermisches Gleichgewicht an, so kann man beide Größen durch die Temperatur ausdrücken und die Rechnung zeigt, daß die Proportionalität sogar besser gilt als man nach den Formeln (3), (4) und (5) erwarten könnte.

Wir suchen jedoch eine Beziehung, welche die Leitfähigkeit mit den elektrischen Daten des Stromkreises, Strom- und Spannung verknüpft. Um sie zu finden, wenden wir uns der Gleichung (2) zu und nehmen an, daß die Entladung so schnell verlaufe, daß wir Ausstrahlung und Wärmeableitung vernachlässigen können. Dies ist sicher richtig, wenn der elektrische Vorgang nicht länger als 10^{-7} Sekunden dauert und sicher unrichtig, wenn er mehr als 10^{-6} Sekunden braucht. Die dem Plasma zugeführte Energie dient dann wesentlich nur der Aufheizung und wird erst allmählich nach Ablauf des Entladungsvorgangs ausgestrahlt bzw. an die umgebenden Gasschichten durch Wärmeleitung abgeführt. Statt (2) erhalten wir dann einfach

$$I \cdot \mathfrak{E} = \frac{I^2}{F} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} , \qquad (6)$$

und wenn wir

$$U = \frac{F}{a}$$

benutzen, schließlich

$$I^2 = \frac{F}{a} \cdot \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2a} \frac{\mathrm{d}F^2}{\mathrm{d}t}. \tag{7}$$

Durch Integration erhält man daraus:

$$F^2 = 2a \int I^2 \, \mathrm{d}t. \tag{8}$$

Wir haben uns hiermit ein einfaches und plausibles Modell der Funkenentladung zurecht gelegt. Es ist auch gelungen, aus ihm ein Gesetz abzuleiten, welches die Leitfähigkeit durch die Stromstärke ausdrückt. Dieses Gesetz hat auch eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Toeplerschen Gesetz, ist aber nicht mit ihm identisch. Auch wenn man statt (6) die vollständige Beziehung (2) benutzt, kommt man nicht zum Toeplerschen Funkengesetz. Während nach Toepler die Leitfähigkeit dem Stromstärkeintegral proportional ist, gelangen wir zu der Feststellung, daß das Quadrat der Leitfähigkeit proportional zum Integral des Stromquadrates ist. Da unser Gesetz eine direkte Folgerung aus einem vernünftigen Modell ist, sind wir der Ansicht, daß (8) wirklich die gesuchte Gesetzmäßigkeit darstellt.

Die Übereinstimmung des Toeplerschen Gesetzes mit den Messungen ist keineswegs so gut, daß man sie als einen eindeutigen Beweis für seine Richtigkeit ansehen kann. Eine Nachprüfung unseres Gesetzes an Hand der Daten für die Toeplersche Funkenkonstante liefert ebenfalls eine befriedigende Übereinstimmung, vor allem natürlich für die frühen Stadien des Funkens.

Berlin, Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung; *Bonn*, Institut für theoretische Physik.

Geschwindigkeitsverteilungen in allgemeiner Darstellung.

Von **F. Magyar**, Wien.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 15. Dezember 1943.)

Trotz der heute bereits vorliegenden großen Zahl theoretischer und praktischer Untersuchungen kann die Geschwindigkeitsverteilung turbulenter Strömungen noch immer nicht mit Sicherheit angegeben werden, keineswegs aber als geschlossene, über den ganzen Querschnitt einheitlich darstellbare Funktion. Während nämlich für laminare Strömungen die Poiseuillesche Verteilung als eindeutige Lösung aus der Navier-Stokesschen Gleichung folgt, ist die Gültigkeit dieser Gleichung für überkritische Reynoldssche Zahlen derzeit noch sehr umstritten, obwohl heute schon namhafte Forscher zu einer Erweiterung bzw. Änderung der Bewegungsgleichung hinneigen, wie dies früher bereits von Boussinesq versucht wurde. So ersetzt z. B. Prandtl[1]) die Newtonsche Reibung durch den der Boltzmannschen mittleren freien Weglänge analogen turbulenten Austausch, der als Mischweg in die Bewegungsgleichung eingeht. Gebelein baut diesen Gedanken noch weiter zu einer statistischen Hydrodynamik aus, die schließlich in der Aufstellung eines Turbulenztensors gipfelt. Dieser zweifellos durch die Gaskinetik angeregte Übergang zur Wahrscheinlichkeitsstatistik verwischt wohl den Determinismus des ursprünglich gesuchten Turbulenzmechanismus, erweist sich aber als durchaus fruchtbar.

In Verbindung mit einer einfachen, experimentell erhärteten Ähnlichkeitsbetrachtung gelingt nun v. Kármán[2]) eine Lösung, die mit den Meßergebnissen ausgezeichnet übereinstimmt, immerhin aber — wie v. Kármán selbst bemerkt — einen unerheblichen Schönheitsfehler aufweist. Die Geschwindigkeitsverteilung zeigt nämlich in der Symmetrieachse einen Knick und führt überdies infolge der Wahl der Konstanten auf Geschwindigkeiten, die in Wandnähe logarithmisch

---

[1]) L. Prandtl, ZS. f. angew. Math. u. Mech. **5**, H. 5, S. 136—139. — [2]) Th. v. Kármán, Verh. d. 3. Int. Kongr. f. Techn. Mech. Stockholm, 24. bis 29. August 1930.

unendlich werden. Das letzte Ergebnis läßt sich indes dadurch bereinigen, daß man innerhalb der Grenzschicht die versuchsmäßig wiederholt bestätigte laminare Verteilung annimmt. Damit ist das Problem zunächst in befriedigender Weise gelöst. Es darf aber nicht übersehen werden, daß auf diese Weise kein einheitlicher Geschwindigkeitsverlauf aufgefunden wurde und neue Schwierigkeiten in allen jenen Fällen entstehen werden, deren mathematische Behandlung die Kenntnis einer stetig zusammenhängenden Geschwindigkeitsfunktion über den ganzen Querschnitt erfordert.

Die Frage, ob ein Verzicht auf den Determinismus unvermeidlich ist, kann in diesem Zusammenhang ohne weiteres zurückgestellt werden. Sicher ist aber, daß sowohl die Bestimmung des Widerstandes, als auch alle Erörterungen über Ursache und Entstehung der Turbulenz in das Gebiet der Dynamik führen und deshalb stets von der Form abhängig sind, in welcher die Bewegungsgleichung angesetzt wird. Ganz anders aber liegen die Verhältnisse für die Geschwindigkeitsverteilung selbst. Der Gedanke ist naheliegend, daß zu deren Ermittlung die Stetigkeitsbedingung allein ausreichen könnte, eine Grundgleichung also, deren Gültigkeit so lange nicht bezweifelt werden kann, als man an der Kontinuität der Flüssigkeiten überhaupt noch festhält. In der Tat ergibt sich, daß man auf diese Weise mit einer ganz einfachen Überlegung zurechtkommt.

Die folgende Untersuchung bezieht sich auf die sogenannte Grundströmung, d. h. auf die zeitlichen Mittelwerte der Geschwindigkeiten. Um einen späteren Vergleich der rechnerischen Ergebnisse mit gemessenen Kurven zu ermöglichen, sei vorweggenommen, daß mit Staudruckgeräten immer etwas zu hohe Geschwindigkeiten gemessen werden, weil die Quadrate der zusätzlichen Turbulenzschwankungen, die etwa $\pm 5\,\%$ der mittleren Geschwindigkeit erreichen[1]), nicht verschwinden. Im allgemeinen ist also der Fehler unerheblich. In Wandnähe müssen die Querschwankungen v' offenbar rasch abnehmen, hingegen können die in die Strömungsrichtung fallenden Längsschwankungen u' recht beträchtlich und prozentual sogar größer als im Inneren der Strömung werden.

Zunächst sei nun als ebenes Problem eine symmetrische Strömung in der Richtung x zwischen zwei parallelen Wänden vom Abstand $2\,y_0$

[1]) Prandtl-Tietjens, Hydro- u. Aerodynamik 2, S. 93. Berlin, Springer, 1931.

behandelt. Um eine genügend allgemeine Funktion derart festzulegen, daß sie auch die laminare Verteilung enthält, wird

$$U(y) = \Psi(y) - A\,\Phi(y) \tag{1}$$

angesetzt, wobei

$$\Psi = \frac{3}{2}\,\bar{U}\left[1 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right] \tag{2}$$

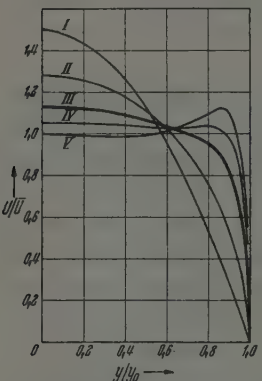


Fig. 1. Einige Geschwindigkeitsverteilungen in der Ebene.

das bekannte Parabelprofil darstellt, dem eine Verteilung Φ überlagert ist, welche auf die mittlere Durchflußmenge ohne Einfluß sein soll. Die endgültig ausgebildete Strömung kann stationär und die zugehörige Geschwindigkeitsverteilung dann unabhängig von x sein, jedenfalls aber muß die Strömung vorerst in irgendeinem Anlauf entstehen. Nun lehrt ein Blick auf die Fig. 1, daß sich beispielsweise die Verteilung II aus der Verteilung IV nur durch eine nach innen gerichtete Querströmung entwickeln kann. Dies bedeutet aber, daß die Funktion Φ während einer solchen Entwicklung noch von x abhängen und die Stetigkeitsgleichung

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

befriedigen muß. Mit Rücksicht auf die Randbedingungen

$$U = V = 0 \quad \text{für} \quad y = \pm y_0$$

sind daher nur Funktionen brauchbar, die der Integralbedingung

$$[\Phi]_{\pm y_0} = \left[\int \Phi\,\mathrm{d}\,y\right]_{\pm y_0} + C \tag{4}$$

genügen. Wenn ferner Φ eine gerade Funktion und $\int \Phi\,\mathrm{d}\,y$ aus Symmetriegründen eine ungerade sein soll, muß $C = 0$ sein.

Nunmehr wird Φ so gewählt, daß $\int \Phi\,\mathrm{d}\,y$ im Intervall $-y_0$ bis $+y_0$ nur drei Nullstellen hat, so daß V an den beiden Wänden und, der geforderten Symmetrie entsprechend, auch in der Mitte verschwindet:

$$\int \Phi\,\mathrm{d}\,y = \lambda^n\left[\left(\frac{y}{y_0}\right)^{2n} - 1\right]\left[\left(\frac{y}{y_0}\right)^{2n} - 1\right]\cdot y, \tag{5}$$

$$\Phi = \lambda^n\left[(4n+1)\left(\frac{y}{y_0}\right)^{4n} - 2(2n+1)\left(\frac{y}{y_0}\right)^{2n} + 1\right]. \tag{6}$$

Unter der Voraussetzung $\lambda < 1$ klingen beide Funktionen mit wachsendem n progressiv ab und genügen der Integralbedingung (4) unabhängig von λ. Zur Verallgemeinerung der beiden Ansätze summiert man zunächst über n, das die diskreten Werte der natürlichen Zahlen durchlaufen soll, und integriert sodann über λ zwischen 0 und einem Parameter λ_0, der es dann erlaubt, verschiedene Verteilungen zu berücksichtigen. Man erhält so:

$$\int \Phi \, \mathrm{d}\, y = \left\{ -\left(\frac{y_0}{y}\right)^4 \ln\left[1 - \lambda_0 \left(\frac{y}{y_0}\right)^4\right] + \right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{y_0}{y}\right)^2 \ln\left[1 - \lambda_0 \left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right] - \ln(1 - \lambda_0) \right\} \cdot y, \tag{7}$$

$$\Phi = 3\left(\frac{y_0}{y}\right)^4 \ln\left[1 - \lambda_0 \left(\frac{y}{y_0}\right)^4\right] - 2\left(\frac{y_0}{y}\right)^2 \ln\left[1 - \lambda_0 \left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right] -$$
$$- \ln(1 - \lambda_0) + \frac{4\lambda_0}{1 - \lambda_0 \left(\frac{y}{y_0}\right)^4} - \frac{4\lambda_0}{1 - \lambda_0 \left(\frac{y}{y_0}\right)^2}. \tag{8}$$

Im besonderen ist

$$\left.\begin{aligned} &\int \Phi \, \mathrm{d}\, y = \Phi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ für } \frac{y}{y_0} = 1, \\ &\int \Phi \, \mathrm{d}\, y = 0 \text{ und } \Phi = \Phi_{\max} = -\lambda_0 - \ln(1 - \lambda_0) \quad ,, \quad \frac{y}{y_0} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

mit $A = A_0 \bar{U}$ folgt schließlich

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{U}{\bar{U}} &= \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right] - A_0 \Phi \\ \frac{U_{\max}}{\bar{U}} &= \frac{3}{2} - A_0 \Phi_{\max}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Bezüglich λ_0 zusammengehörige Werte von $\Phi_{\max}$ und $U_{\max}/\bar{U}$ können aus Fig. 3 entnommen werden. In Fig. 1 sind beispielsweise folgende Verteilungen, die durch Variation von λ_0 erhalten werden, unter der Annahme $A_0 = 1$ eingetragen:

I: $\lambda_0 = 0$, $U_{\max}/\bar{U} = 1{,}5$;
II: $\lambda_0 = 0{,}525$, $U_{\max}/\bar{U} = 1{,}28$;
III: $\lambda_0 = 0{,}636$, $U_{\max}/\bar{U} = 1{,}125$;
IV: $\lambda_0 = 0{,}675$, $U_{\max}/\bar{U} = 1{,}05$;
V: $\lambda_0 = 0{,}698$, $U_{\max}/\bar{U} = 1{,}00$.

I ist das laminare Profil, das voraussetzungsgemäß in Gleichung (10) enthalten sein muß. III entspricht einer Geschwindigkeitsverteilung

für ausgebildete Turbulenz und deckt sich mit der von Dönch[1]) gemessenen gut. Die Übereinstimmung läßt sich noch verbessern, wenn entsprechend dem Dönchschen Wert $U_{max}/\bar{U} = 1{,}122$ ein Parameter $\lambda_0 = 0{,}638$ gewählt wird. Nur in unmittelbarer Wandnähe, wo die Messungen indes kaum ganz verläßlich sein dürften, verläuft die gemessene Kurve etwas steiler als die gerechnete. IV und V können als Beispiele für die sogenannte „gleichmäßige Verteilung" angesehen werden,

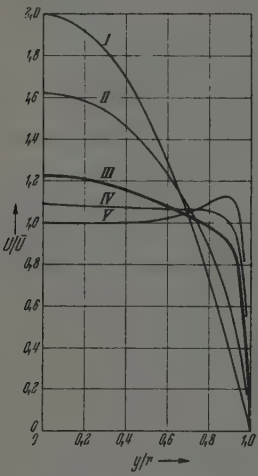


Fig. 2. Einige Geschwindigkeitsverteilungen im Rohr.

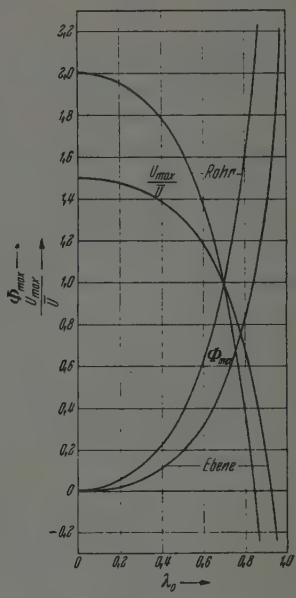


Fig. 3. $U_{max}/\bar{U}$ und Φ_{max} in Abhängigkeit von λ_0.

wie sie etwa dem beginnenden Anlauf entspricht. Insbesondere die Verteilung V, die bereits deutlich den von Richardson[2]) entdeckten „Annulareffekt" zeigt, die Geschwindigkeit in der Mitte aber noch unverändert läßt, kann beim Einlauf in einen Kanal mit einiger Berechtigung erwartet werden, da die Stromlinien gerade in unmittelbarer Nähe der beginnenden Kanalwände am stärksten zusammenrücken müssen. Eine wirklich gleichmäßige Verteilung kann es mit

[1]) F. Dönch, Forsch.-Arb. a. d. Geb. d. Ing.-Wes. H. 282 o. a. Prandtl-Tietjens, a. a. O. S. 59. — [2]) E. G. Richardson u. E. Tyler, Proc. Phys. Soc. London **42**, 1, 1919; Phys. ZS. **13**, 507, 1931; Th. Sexl, ZS. f. Phys. **61**, 349, 1930.

Rücksicht auf die Unmöglichkeit von Unstetigkeiten an der Wand natürlich nicht geben.

Eine weitere Vergrößerung von λ_0 über 0,7 führt zu Einsackungen des Profils, die schließlich auch mit Rückströmungen verbunden sein können.

Durch eine Wahl $A_0 \lessgtr 1$ lassen sich die Geschwindigkeitskurven noch etwas verändern, insbesondere kann man den Verlauf in Wandnähe etwas steiler erhalten.

Der Anlauf stellt sich nun sinngemäß etwa in folgender Weise dar: Bei unterkritischer Geschwindigkeit entwickelt sich das Geschwindigkeitsprofil von der „gleichmäßigen Verteilung" bis zum parabolischen. λ_0 ist dabei innerhalb der Anlaufstrecke Funktion von x und nähert sich dem Wert Null. Eine aus mehreren Teilen bestehende Anlaufverteilung, wie sie zuweilen angenommen wird, wäre im Widerspruch mit der Kontinuitätsgleichung und ist daher wenig wahrscheinlich. Bei überkritischer Geschwindigkeit bleibt der Anlauf je nach der Reynoldsschen Zahl schon bei etwa $\lambda_0 = 0{,}636$ stecken. Der Grund hierfür dürfte folgender sein: die Bewegungsenergie der laminaren Verteilung ist doppelt so groß, wie diejenige einer wirklich gleichmäßigen Verteilung. Hingegen beträgt die Energie bei ausgebildeter Turbulenz nur das 1,09fache [1]) der Energie des Eintrittsprofils. Wenn also die Reibung rasch wächst, bleibt nicht genügend Energie zur weiteren Ausbildung des Geschwindigkeitsprofils.

Strömungen in erweiterten oder verengten Kanälen können durch einfache Abänderung der Randbedingungen in ähnlicher Weise behandelt werden.

Für Strömungen in Rohren erhält man unter Berücksichtigung der nunmehr in Zylinderkoordinaten angesetzten Stetigkeitsbedingung

$$\frac{\partial (U \cdot y)}{\partial x} + \frac{\partial (U \cdot y)}{\partial y} = 0 \tag{11}$$

nach einer ganz analogen Rechnung

$$\frac{U}{\bar{U}} = 2\left[1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right] - A_0 \Phi, \tag{12}$$

worin jetzt

$$\Phi = 2\left(\frac{r}{y}\right)^4 \ln\left[1 - \lambda_0\left(\frac{y}{r}\right)^4\right] - 2\ln(1-\lambda_0) + \\ + \frac{4\lambda_0}{1-\lambda_0\left(\frac{y}{r}\right)^4} - \frac{4\lambda_0}{1-\lambda_0\left(\frac{y}{r}\right)^2} \tag{13}$$

[1]) Prandtl-Tietjens, a. a. O. 2, S. 55.

zu setzen ist. Im besonderen ist

$$\Phi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ für } \frac{y}{r} = 1,$$

$$\Phi = \Phi_{\max} = -2\lambda_0 - 2\ln(1-\lambda_0) \quad \ldots\ldots\ldots \text{ „ } \frac{y}{r} = 0$$

und

$$\frac{U_{\max}}{\bar{U}} = 2 - A_0 \Phi_{\max}.$$

Die Werte von $U_{\max}/\bar{U}$ und $\Phi_{\max}$ können ebenfalls aus Fig. 3 entnommen werden.

In Fig. 2 sind wieder einige Verteilungen für verschiedene Werte von λ_0 unter der Annahme $A_0 = 1$ zusammengestellt:

$$\text{I: } \lambda_0 = 0, \quad U_{\max}/\bar{U} = 2;$$
$$\text{II: } \lambda_0 = 0{,}5, \quad U_{\max}/\bar{U} = 1{,}614;$$
$$\text{III: } \lambda_0 = 0{,}643, \quad U_{\max}/\bar{U} = 1{,}225;$$
$$\text{IV: } \lambda_0 = 0{,}679, \quad U_{\max}/\bar{U} = 1{,}085;$$
$$\text{V: } \lambda_0 = 0{,}698, \quad U_{\max}/\bar{U} = 1{,}001.$$

III entspricht der Grundströmung für ausgebildete Turbulenz und stimmt mit gemessenen Kurven gut überein. Für die Verteilungen I, IV und V gilt dasselbe wie für die ebene Strömung. Ebenso kann alles, was über die Wahl von A_0, ferner über Erweiterung, Verengung und Anlauf bereits erwähnt wurde, sinngemäß übertragen werden.

Außerdem darf man noch erwarten, daß die Lösung auch Rohrströmungen einschließt, die mit Drall behaftet sind, weil letzterer die Kontinuitätsgleichung (11) unverändert läßt. Tatsächlich trifft dies auch zu.

Mitterlehner[1]) hat in einer Rohrströmung mit starkem Drall die achsenparallelen Geschwindigkeiten, die er als z-Komponenten einführt, gemessen und mit einer nach den Gleichungen (12) und (13) mit den Konstanten $A_0 = 0{,}7$ und $\lambda_0 = 0{,}92$ gerechneten Verteilung gute Übereinstimmung gefunden. Das dabei angewendete Meßverfahren wird allerdings für kleine Werte von y ungenau und versagt im Gebiete der Rückströmung überhaupt. Die Rückströmung selbst konnte aber

[1]) G. Mitterlehner, Die Strömung im Tauchrohr eines Fliehkraftreinigers. Diss. Wien 1940.

einwandfrei beobachtet werden. Fig. 4 zeigt den Verlauf der c_z-Verteilung. Gerade an diesem Beispiel tritt die allmähliche Änderung des Parameters λ_0 besonders klar zutage. Wenn nämlich der Drall infolge der Reibung abklingt, strebt die axiale Durchströmung, die anfangs fast ausschließlich in der Nähe der Rohrwand verläuft, ohne Änderung der Durchflußmenge einer turbulenten Verteilung ohne Drall zu. Dabei tritt eine radiale Querströmung auf. Es handelt sich also einfach um ein spezielles Beispiel für einen Anlauf der turbulenten Strömung.

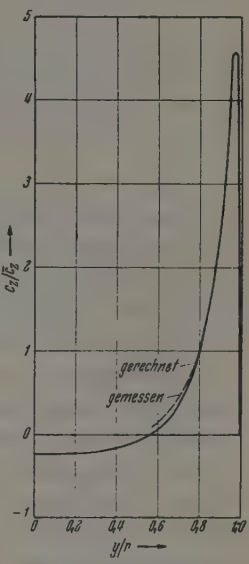


Fig. 4. Rohrströmung mit starkem Drall.

Abschließend sei noch erwähnt, daß ähnliche Lösungen der Kontinuitätsgleichung auch für Strömungen in Rohren mit nicht kreisförmigem Querschnitt oder zwischen konzentrischen Zylindern aufgesucht werden könnten. In beiden Fällen ändern sich nur die Randbedingungen.

Alle auf diese Weise erhaltenen Geschwindigkeitsverteilungen sind zumindest möglich, jedenfalls aber frei von allen Unsicherheiten, die der Bewegungsgleichung derzeit noch anhaften. Allerdings liefert dieser Gedankengang als einfache Lösung der Kontinuitätsgleichung keinen direkten Beitrag zur Bestimmung des Widerstandes oder zur Aufklärung des Turbulenzmechanismus.

Wien, den 12. Oktober 1943.

Die räumliche Verteilung abgebremster Neutronen.

Von **W. Bothe** in Heidelberg.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Dezember 1943.)

Nach einer früher angegebenen allgemeinen Methode werden sowohl strenge als auch asymptotische Ausdrücke abgeleitet für die räumliche Verteilung von Teilchen, die in einem isotrop streuenden Mittel eine gegebene Zahl von Streuungen erlitten haben.

1. Das Problem. Es soll folgende Aufgabe behandelt werden. In einem unendlich ausgedehnten, streuenden und bremsenden Mittel befinde sich eine punktförmige Quelle schneller Neutronen von einheitlicher Energie E_0. Beim einzelnen Stoß sei die Streuung isotrop angenommen, und die Energie des Neutrons werde auf einen bestimmten Bruchteil $1/q$ herabgesetzt, unabhängig vom Streuwinkel. Gesucht wird die räumliche Verteilung der Neutronen, nachdem sie n Stöße erlitten haben, ihre Energie also auf den Wert $E = E_0 q^{-n}$ (z. B. auf thermische Energie) gesunken ist.

Die genannten Voraussetzungen bedeuten natürlich eine gewisse Einschränkung, namentlich die Annahme, daß der Energieverlust bei einem Stoß stets derselben sein soll. Die Annahme wird am ehesten bei großen Stoßzahlen erlaubt sein, denn bei kleinen Stoßzahlen hat die tatsächliche Schwankung der Energieverluste (zwischen 0 und einem Maximalwert) eine recht verwickelte Energieverteilung im Gefolge[1]). Aus diesen Gründen werden die Ergebnisse z. B. für stark wasserstoffhaltige Mittel keine exakte Gültigkeit beanspruchen können. Jedoch ermöglichen gerade diese Voraussetzungen eine strenge und geschlossene Lösung des Problems, insbesondere für sehr große Abstände von der Quelle. Gerade in bezug auf diesen letzteren Fall besteht in der Literatur noch wenig Klarheit.

Das Problem ist formal weitgehend analog einem vor längerer Zeit schon behandelten, nämlich der Winkelstreuung von Teilchenstrahlen beim Durchgang durch Folien[2]). In beiden Fällen erhält man durch sehr einfache und allgemeine Überlegungen eine Gauß-Verteilung als erste Näherung. Die „Schwänze" dieser Verteilungen aber (hier große Abstände von der Quelle, dort große Streuwinkel) folgen anderen Gesetzmäßigkeiten. Für Probleme dieser Art wurde früher eine all-

[1]) Vgl. P. Langevin, Ann. de phys. **17**, 303, 1942. — [2]) W. Bothe, ZS. f. Phys. **4**, 300, 1921.

gemeine Lösung angegeben, die dort als das „allgemeine Fehlergesetz" bezeichnet wurde[1]). Diese allgemeine Methode soll hier auf die Diffusion mit Bremsung der Neutronen angewandt werden.

Das Problem ist gelöst, wenn man die Wahrscheinlichkeit $p(r)\,\mathrm{d}V$ kennt, daß ein von einem Punkt ausgehendes Neutron in einem in der Entfernung r gelegenen Volumelement $\mathrm{d}V$ seinen n-ten Stoß erleidet. Dann ist nämlich die räumliche Dichte N der Neutronen von der Energie E einfach

$$N = Q\,\tau\,p, \tag{1}$$

wo Q die Ergiebigkeit der Punktquelle und τ die Lebensdauer der gebremsten Neutronen ist. Vorausgesetzt ist hierbei noch, daß die Neutronen nach ihrer Abbremsung keine merkliche Strecke mehr wandern, sondern sogleich zur Messung gelangen. Im anderen Falle ist ihre nachträgliche Ausbreitung durch eine einfache Rechnung zu berücksichtigen.

2. Die allgemeine Lösung. Es seien $\xi\eta\zeta$ die Komponenten, ϱ der Betrag der Verschiebung des Neutrons zwischen dem $(\nu-1)$-ten und dem ν-ten Stoß. Das Verteilungsgesetz dieser Verschiebungen ist

$$p_\nu(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta = \frac{\mu_\nu}{4\pi\varrho^2}\,e^{-\mu_\nu\varrho}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta. \tag{2}$$

Die μ_ν sind die Streukoeffizienten, die im allgemeinen verschieden sind, weil der Streuquerschnitt von der Energie abhängt. Weiter sei r der Abstand von der Quelle, in dem ein Neutron seinen n-ten Stoß erleidet; xyz seien die Koordinaten dieses Ortes: $p(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ sei die gesuchte Verteilung dieser Orte. Die Funktion p schreiben wir als Fourier-Integral hin:

$$p(x,y,z) = (2\pi)^{-3}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha,\beta,\gamma)\,e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma.$$

Darin ist, wie a. a. O. gezeigt wurde,

$$f = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y,z)\,e^{-i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \prod_{\nu=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} p_\nu(\xi,\eta,\zeta)\,e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta.$$

Es sei

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\sigma^2;\quad \alpha x+\beta y+\gamma z=\sigma r k;\quad \alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=\sigma\varrho\varkappa.$$

[1]) W. Bothe, ZS. f. Phys. 5, 63, 1921.

Dann wird

$$p = (2\pi)^{-3} \int_0^\infty d\sigma \int_{-1}^{+1} dk \cdot 2\pi\sigma^2 e^{i\sigma r k} \cdot \Pi \int_0^\infty d\varrho \int_{-1}^{+1} d\varkappa \cdot 2\pi\varrho^2 p_\nu(\varrho) e^{-i\sigma\varrho\varkappa},$$

$$p = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \cdot \frac{\sigma}{r} \sin\sigma r \cdot \Pi \int_0^\infty d\varrho \cdot \frac{\varrho}{\sigma} \sin\sigma\varrho \cdot p_\nu(\varrho). \tag{3}$$

Dies ist die kugelsymmetrische Form des allgemeinen Verteilungsgesetzes. Setzt man p_ν nach (2) ein und benutzt

$$\int_0^\infty \frac{\sin\sigma\varrho}{\varrho} e^{-\mu_\nu\varrho} d\varrho = \operatorname{arctg}\frac{\sigma}{\mu_\nu},$$

so wird

$$p = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty d\sigma \cdot \sigma \sin\sigma r \cdot \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\mu_\nu}{\sigma} \operatorname{arctg}\frac{\sigma}{\mu_\nu}. \tag{4}$$

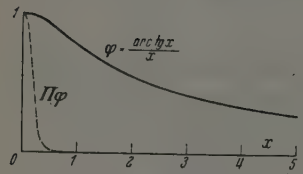


Fig. 1.

Dies ist die exakte und vollständige Lösung unseres Problems, für die jetzt einige handliche asymptotische Darstellungen gegeben werden sollen.

3. Große Stoßzahl n, mäßige Entfernungen r. Fig. 1 zeigt den Verlauf der in (4) auftretenden Funktion $\varphi(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ und den schematischen Verlauf eines Produktes aus sehr vielen solchen Funktionen. Man sieht, daß in dem Bereich, wo das Produkt merkliche Werte hat, die Funktion φ ersetzt werden kann durch

$$\varphi(x) \approx 1 - \tfrac{1}{3}x^2 \approx e^{-\frac{1}{3}x^2}.$$

Damit wird das Produkt in (4)

$$\Pi = e^{-\frac{1}{3}\Sigma\left(\frac{\sigma}{\mu_\nu}\right)^2} = e^{-\frac{1}{3}\sigma^2\Sigma\lambda_\nu^2}, \tag{5}$$

wo die $\lambda_\nu = 1/\mu_\nu$ die Streuweglängen bezeichnen. Hiermit läßt sich die Integration in (4) ausführen. Es gilt nämlich[1])

$$\int_0^\infty x \sin ax \cdot e^{-bx^2} dx = -\frac{d}{da}\int_0^\infty \cos ax \cdot e^{-bx^2} dx =$$

$$= -\frac{d}{da}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{a^2}{4b}}\right) = \frac{a\sqrt{\pi}}{4b^{3/2}} e^{-\frac{a^2}{4b}}.$$

[1]) Vgl. Laska, Formelsammlung, S. 255.

Damit wird schließlich

$$p = \frac{1}{\pi^{3/2} r_0^3} e^{-r^2/r_0^2}; \quad r_0^2 = \frac{4}{3} \sum_1^n \lambda_\nu^2. \tag{6}$$

Dies ist eine Gauß-Verteilung. Der quadratische Mittelwert des Abstandes, in welchem die Neutronen ihren n-ten Stoß erleiden, ist

$$B = r_0 \sqrt{\tfrac{3}{2}} = \sqrt{2 \Sigma \lambda_\nu^2}. \tag{7}$$

Diese Strecke kann man als „Bremslänge" für die Abbremsung auf den q^n-ten Teil der Anfangsenergie bezeichnen.

Für die Gültigkeit der Gauß-Verteilung (6) ist aber die Bedingung

$$n \gg 1 \tag{8}$$

allein nicht hinreichend. Wenn r so groß ist, daß der sin in (4) sehr rasch oszilliert, gemessen an dem Verlauf des Π-Faktors, so liefert auch der Schwanz dieses Faktors bei sehr großen Werten σ einen wesentlichen Beitrag, und hierfür wird die Darstellung (5) ungültig. Die Gaußsche Näherung gilt daher nur für nicht zu große Entfernungen r.

Die Näherung (6) ist die einzige, die man aus der allgemeinen Diffusionstheorie allein herleiten kann. Unsere Methode erlaubt jedoch, auch höhere Näherungen, also Zusatzglieder zur Gauß-Verteilung, zu berechnen. Rechnet man z. B. der Einfachheit halber mit gleichen μ_ν, so kann man in zweiter Näherung für das Produkt in (4) statt (5) schreiben

$$\Pi = \left(1 + \frac{13}{90} n \sigma^4 \lambda^4\right) e^{-\frac{1}{3} n \sigma^2 \lambda^2},$$

wie man durch Koeffizientenvergleich bestätigt. Das zusätzliche Integral berechnet man leicht nach

$$\int x^5 \sin a x \cdot e^{-b x^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}a \, \mathrm{d}b^2} \int \cos a x \cdot e^{-b x^2} \, \mathrm{d}x$$

und findet für das erste Zusatzglied p' zu p:

$$p' = p \frac{39}{8n} \left\{1 - \frac{4}{3}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \frac{4}{15}\left(\frac{r}{r_0}\right)^4\right\}. \tag{9}$$

Man sieht daraus, daß n schon recht groß sein muß, damit nur bei kleinen r die Gauß-Verteilung nach (6) einigermaßen genau gilt. Wenn $r > 2 r_0$ wird, wachsen die Abweichungen von der Gauß-Verteilung sehr rasch an, wie schon oben auf anderem Wege festgestellt wurde.

4. Umformung der allgemeinen Lösung. Um zu asymptotischen Lösungen für große r zu gelangen, formen wir (4) durch komplexe Integration um. Zunächst kann man schreiben

$$p = \frac{-i}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \cdot \sigma e^{i\sigma r} \prod_1^n \frac{\mu_\nu}{\sigma} \operatorname{arctg} \frac{\sigma}{\mu_\nu}; \quad \sigma = x + iy. \tag{10}$$

Bei der Verlegung des Integrationsweges ist zu beachten, daß die Punkte $\sigma = i\mu_\nu$ Verzweigungspunkte der arctg-Funktionen sind. Wir wählen daher den in Fig. 2 gezeichneten Integrationsweg; die μ_ν seien von jetzt ab nach zunehmender Größe geordnet und numeriert. Die Beiträge der Kreisbögen verschwinden, wenn man diese ins Unendliche rücken läßt. Es bleiben dann die beiden Integrationen längs beider Seiten der y-Achse, die sich wegen der Mehrdeutigkeit des arctg *nicht* aufheben. Es gilt nämlich auf der ganzen positiven y-Achse

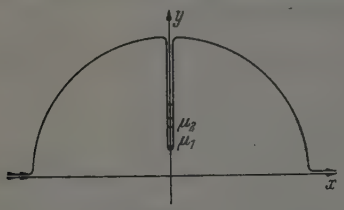


Fig. 2.

$$\operatorname{arctg} \frac{\sigma}{\mu_\nu} = A_\nu + \frac{i}{4} \log \left(\frac{y + \mu_\nu}{y - \mu_\nu} \right)^2$$

mit

$$A_\nu = \begin{cases} 0 & \text{für } y < \mu_\nu; \quad x = \pm 0, \\ -\frac{\pi}{2} & ,, \quad y > \mu_\nu; \quad x = -0, \\ +\frac{\pi}{2} & ,, \quad y > \mu_\nu; \quad x = +0. \end{cases}$$

Damit geht (10) über in

$$p = \frac{i}{4\pi^2 r} \int_{\infty, \mu_1}^{\mu_1, \infty} dy \cdot y e^{-ry} \prod \frac{\mu_\nu}{y} \left(\frac{1}{2} \log \frac{y + \mu_\nu}{|y - \mu_\nu|} - i A_\nu \right). \tag{11}$$

Dieser Ausdruck nimmt bei großen Entfernungen r verschiedenen Charakter an, je nachdem die Streukoeffizienten μ_ν verschieden oder alle gleich sind.

5. Große Entfernungen, verschiedene Streukoeffizienten. In diesem Falle zerlegt man den Integrationsweg in die Abschnitte zwischen den einzelnen μ_ν. Dann erkennt man folgendes: Wenn r so groß ist, daß

$$e^{-(\mu_{\nu+1} - \mu_\nu) r} \ll 1 \tag{12}$$

ist für alle μ_ν (mit $\mu_0 = 0$), so trägt nur der Abschnitt $\mu_1 \ldots \mu_2$ wesentlich zum Wert des Integrals in (11) bei. Dann erhält man

$$p = \frac{\mu_1}{4\pi r} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mathrm{d}y \cdot e^{-ry} \prod_2^n \frac{\mu_\nu}{2y} \log \frac{\mu_\nu + y}{\mu_\nu - y}. \tag{13}$$

Hierin sind ausschlaggebend die Werte y, die um die Größenordnung $1/r$ oberhalb μ_1 liegen. Ist daher $\mu_1 r$ genügend groß, so ist das Produkt Π nur langsam veränderlich gegenüber der Exponentialfunktion, und man kann unter dem Π-Zeichen $y = \mu_1$ setzen. Als zusätzliche Bedingung hierfür findet man

$$\mu_1 r \gg n - 1. \tag{14}$$

Dann kann auch die obere Grenze des Integrals durch ∞ ersetzt werden. Dabei stört es nicht, daß bei $\mu_2 \ldots$ der Integrand $\log \infty$ wird. So entsteht:

$$p = \frac{\mu_1}{4\pi r^2} e^{-\mu_1 r} \prod_{\nu=2}^n \frac{\mu_\nu}{2\mu_1} \log \frac{\mu_\nu + \mu_1}{\mu_\nu - \mu_1}. \tag{15}$$

Die Dichte der abgebremsten Neutronen nimmt also bei großen Entfernungen (abgesehen von dem Entfernungsfaktor r^{-2}) exponentiell mit dem kleinsten der vorkommenden Streukoeffizienten ab. Dies gilt offenbar nicht nur für die Endenergie der Neutronen, sondern auch für alle höheren Energiestufen bis hinauf zu derjenigen, für welche der Streukoeffizient μ_1 gilt, während etwaige noch höhere Energiestufen bis zur Primärenergie hinauf abgestorben sind. Man hat also ein „laufendes Gleichgewicht". Der kleinste vorkommende Streukoeffizient, der den Endabfall bestimmt, wird meist, aber nicht immer, derjenigen der primären, ungebremsten Neutronen sein.

Ist $\mu_1 \ll \mu_2 \ldots \mu_n$, so nimmt das Produkt Π in (15) den Wert 1 an, was unmittelbar anschaulich klar ist, da dann alle n Stöße eines Teilchens praktisch an derselben Stelle erfolgen.

Höhere Näherungen zu (15) erhält man, wenn man in (13) das Produkt Π nach Potenzen von $(y - \mu_1)$ entwickelt und mit Berücksichtigung von (14) gliedweise integriert. Das erste Zusatzglied p' zu (15), das man auf diese Weise erhält, lautet

$$p' = \frac{p}{\mu_1 r} \sum_{\nu=2}^n \left\{ \frac{2}{\left(\frac{\mu_\nu}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu_\nu}\right) \log \frac{\mu_\nu + \mu_1}{\mu_\nu - \mu_1}} - 1 \right\}. \tag{16}$$

Dieses Glied ist stets positiv, es macht also den Abfall steiler.

6. Große Entfernungen, gleiche Streukoeffizienten. Für gleiche μ geht mit $y/\mu = z$ die strenge Gl. (11) über in

$$p = \frac{i\mu^2}{4\pi^2 r} \int_{\infty,1}^{1,\infty} \mathrm{d}z \cdot z e^{-\mu r z} \left\{ \frac{1}{z} \left(\frac{1}{2} \log \frac{z+1}{z-1} - iA \right) \right\}^n \tag{17}$$

oder, da

$$(x+iy)^n \equiv (x^2+y^2)^{n/2} e^{i n \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}, \tag{18}$$

$$p = \frac{\mu^2}{4\pi^2 r} \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}z}{(2z)^{n-1}} e^{-\mu r z} \left(\log^2 \frac{z+1}{z-1} + \pi^2 \right)^{n/2} \sin\left(n \operatorname{arctg}\left(\pi / \log \frac{z+1}{z-1} \right) \right). \tag{19}$$

Setzt man hierin $z = 1 + t$, so tragen zum Wert des Integrals im wesentlichen die Werte t von der Größenordnung $1/\mu r$ bei. Ist daher μr genügend groß, so kann unter dem Integralzeichen wieder $z = 1$ gesetzt werden, außer im Exponenten und in der Differenz $z - 1$. Als Bedingung hierfür findet man

$$\mu r \gg n - 1. \tag{20}$$

Damit erhält man die asymptotische Formel

$$p = \frac{\mu^2}{2^{n+1}\pi^2 r} e^{-\mu r} \int_0^\infty \mathrm{d}t \cdot e^{-\mu r t} \left(\log^2 \frac{2}{t} + \pi^2 \right)^{n/2} \sin\left(n \operatorname{arctg}\left(\pi / \log \frac{2}{t} \right) \right). \tag{21}$$

Für eine graphische Auswertung führt man am besten $u = \log \frac{2}{t}$ als neue Variable ein und erhält

$$p = \frac{\mu^2}{2^n \pi^2 r} e^{-\mu r} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u \cdot e^{-u - 2\mu r e^{-u}} \left(u^2 + \pi^2 \right)^{n/2} \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{\pi}{u} \right). \tag{22}$$

Benutzt man statt (18) die binomische Reihe, so erhält man die mit (21) und (22) identischen endlichen Reihen

$$p = \frac{\mu^2}{2^{n+1}\pi^2 r} e^{-\mu r} \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \cdot e^{-\mu r t} \left\{ \left|\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right| \pi \left(\log \frac{2}{t} \right)^{n-1} - \left|\begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix}\right| \pi^3 \left(\log \frac{2}{t} \right)^{n-3} + \cdots \right\} \tag{23}$$

$$= \frac{\mu^2}{2^n \pi^2 r} e^{-\mu r} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u \cdot e^{-u - 2\mu r e^{-u}} \left(\left|\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right| \pi u^{n-1} - \left|\begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix}\right| \pi^3 u^{n-3} + \cdots \right). \tag{24}$$

Beispiel: Für die Orte der zweiten Stöße ($n = 2$) gilt bei Entfernungen, die groß gegen die Streuweglänge sind, die Verteilung

$$p = \frac{\mu}{4\pi r^2} e^{-\mu r} \log 2\gamma\mu r; \quad \gamma = 1{,}781\ldots \tag{25}$$

Aus (21) bis (24) lassen sich leicht einfachere Näherungsformeln für noch größere Abstände herleiten. Zu einem sehr einfachen Ausdruck, der allerdings mehr theoretisches als praktisches Interesse hat, gelangt man, wenn die sehr weitgehende Bedingung erfüllt ist

$$\log^2 2\,\mu r \gg (n-1)\,(n-2). \quad (26)$$

Dann kann man sich nämlich in (23) und (24) auf das erste Glied der Reihe beschränken und das Integral

$$J = 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u \cdot e^{-u-2\mu r e^{-u}}\, u^{n-1}$$

auswerten. Die Exponentialfunktion unter dem Integral (Fig. 3) hat ein Maximum bei $u = \log(2\,\mu r)$ und fällt nach beiden Seiten ziemlich steil ab. Der Schwerpunkt liegt bei $u = u_0 = \log 2\gamma\mu r + Ei\,(-1) = \log(2\,\mu r/0{,}699)$. Setzt man daher $u - u_0 = v$, so wird

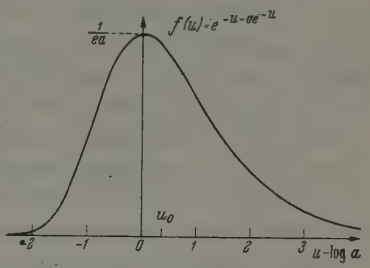


Fig. 3.

$$J = \frac{0{,}699}{\mu r}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}v \cdot e^{-v-0{,}699\,e^{-v}}\,(u_0+v)^{n-1}.$$

Entwickelt man nun $(u_0+v)^{n-1}$ nach steigenden Potenzen von v, so verschwindet das zweite Glied identisch wegen der Definition von u_0, während alle folgenden Glieder wegen der Bedingung (26) zu vernachlässigen sind. Das Integral über das erste Glied ist $u_0^{n-1}/0{,}699$. So erhält man schließlich

$$p = \frac{n\mu}{4\pi r^2}\left(\frac{1}{2}\log 2{,}86\,\mu r\right)^{n-1} e^{-\mu r} \quad (27)$$

mit der Bedingung (26). Diese Bedingung verlangt aber bei einigermaßen großer Stoßzahl n so ungeheure Entfernungen, daß mit der Lösung (27) praktisch wenig anzufangen ist. Sie wurde hier nur aus Analogiegründen angeführt.

Die Ausdrücke (15), (25) und (27) sind nämlich von ganz ähnlichem Bau wie die entsprechenden für den fortgesetzten radioaktiven Zerfall, wobei r und die μ die Rolle der Zeit und der Zerfallskonstanten spielen. Die Faktoren zu der Exponentialfunktion sind aber hier andere, z. B. treten in (27) nicht die Potenzen von r, sondern von $\log r$ auf, und der ganze Ausdruck gilt nur asymptotisch, während der entsprechende für den radioaktiven Zerfall streng gültig ist. Diese Unterschiede rühren daher, daß die räumliche Streuung der Teilchen nach vor- und rückwärts erfolgt, der zeitliche radioaktive Zerfall dagegen nur „nach vorn".

Auch zu den Ausdrücken (21) bis (27) kann man natürlich Zusatzglieder berechnen. Die Art der Berechnung geht ohne weiteres aus den obigen Entwicklungen hervor.

7. Praktische Verhältnisse. Als Beispiel werde die räumliche Verteilung von thermischen oder Resonanzneutronen betrachtet, nach der häufig gefragt wird. Messungen hierüber wurden in Wasser und stark wasserstoffhaltigen Stoffen von Fermi[1]), Frisch, Halban und Koch[2]) und im Institut des Verfassers (unveröffentlicht), in anderen Stoffen von P. Jensen[3]) angestellt. Hierbei, namentlich bei den thermischen Neutronen ist zu beachten, daß nach Erreichen der Endenergie noch eine weitere Diffusion erfolgen kann, bevor die Neutronen zum Nachweis gelangen. Von diesem, nach bekannten Methoden zu berechnenden Einfluß sehen wir ab, d. h. wir betrachten die Fermische Diffusionslänge bei der Endenergie als verschwindend klein.

Haben z. B. die Primärneutronen eine Energie $E_0 = 2{,}5$ e-MV, so ist die thermische Energie E das 10^{-8}fache davon, woraus sich die jeweilige Stoßzahl n berechnet.

Wir betrachten zuerst eine punktförmige Neutronenquelle in einem großen, mit Wasser gefüllten Behälter. Die Stoßzahl brauchen wir nur angenähert zu kennen. In einer Mischung verschiedener Atomarten mit den Massen M_i ist die gesamte Stoßzahl, wie man durch eine einfache Überlegung findet,

$$n = \frac{\Sigma \mu_i \cdot \log E_0/E}{\Sigma \mu_i \log q_i}; \quad \mu_i = N_i \sigma_i; \quad q_i = \frac{(M_i+1)^2}{M_i^2+1}, \tag{28}$$

σ_i = Streuquerschnitt, N_i = Zahl der Atome M_i im cm³, $1/q_i$ = mittlerer relativer Energieverlust bei einem Stoß mit einem Atom der Masse M_i. Hierbei ist vorübergehend angenommen, daß die μ_ν nicht, oder wenigstens nicht in verschiedener Weise von der Geschwindigkeit abhängen, so daß der Index ν wegbleiben kann. Dieses n, in (7) sinngemäß eingesetzt, ergibt die Bremslänge B:

$$B^2 = \frac{2 \log E_0/E}{\Sigma \mu_i \Sigma \mu_i \log q_i}. \tag{29}$$

Mit den Messungen über diese Bremslänge[4]) kommt man in Übereinstimmung, wenn man etwa mit den Mittelwerten $\sigma(\mathrm{H}) = 5{,}6 \cdot 10^{-24}$, $\sigma(\mathrm{O}) = 3 \cdot 10^{-24}$ cm² rechnet. Mit $E/E_0 = 10^8$ ergibt dies $n = 32$ Stöße an H- oder O-Kernen.

[1]) E. Fermi, Ric. Scient. **1**, 483, 1936. — [2]) O. R. Frisch, H. v. Halban u. J. Koch, Danske Vidensk. Selskab. **15**, Nr. 10, 1937. — [3]) Im Druck. — [4]) E. Fermi. Ric. Scient. **1**, 483, 1936.

Fragt man zunächst nach der Verteilung bei mäßigen Entfernungen, so kommt Gl. (6) in Betracht. Jedoch kann die Stoßzahl hier nicht gerade als sehr groß angesehen werden, denn nach Gl. (9) trägt im Zentrum das erste Zusatzglied p' zur Gauß-Verteilung noch rund 15 % bei. Die Einstellung der theoretischen Gauß-Verteilung nach (6) ist daher noch unvollkommen, zum mindesten kann nicht genau die theoretische Breite der Verteilung erwartet werden. In der Tat lassen sich die gemessenen Verteilungen nur ziemlich grob durch eine Gauß-Funktion darstellen, wobei allerdings noch hinzukommt, daß die Primärneutronen bei allen bisherigen Messungen inhomogen waren.

Bei großen Entfernungen andererseits muß die starke Abhängigkeit des Streuquerschnitts des Wasserstoffs von der Energie berücksichtigt werden, so daß Gl. (15) mit den Bedingungen (12) und (14) in Betracht kommt. Nach dieser Formel sollte bei genügend großen Entfernungen ein Gleichgewicht mit exponentiellem Abfall von $p \cdot r^2$ für alle Neutronenenergien eintreten. Nach den vorliegenden Messungen und Theorien[1]) steigt bei den ersten Stößen der Streukoeffizient μ um je etwa 25 % an. In der Bedingung (12) ist für unser Beispiel etwa $\mu_1 = 0{,}2$; $\mu_2 = 0{,}25\ \mathrm{cm}^{-1}$ zu setzen, so daß die Bedingung lautet: $e^{-0{,}05\,r} \ll 1$. Dies ist schon für Entfernungen $r \geqslant 50$ cm einigermaßen erfüllt. Die Bedingung (14) verlangt jedoch größere Entfernungen, nämlich mindestens einige Meter, wie das Zusatzglied (16) lehrt. Nun zeigten zwar die Messungen mit Ra + Be-Neutronen, insbesondere solche aus dem Institut des Verfassers, die sich bis etwa $r = 60$ cm erstreckten, schon von etwa 25 cm ab innerhalb der Meßgenauigkeit einen exponentiellen Abfall. Unsere Überlegungen lehren aber, daß hieraus noch nicht auf ein strenges Gleichgewicht zwischen den Neutronen verschiedener Energien geschlossen werden darf, wie es gelegentlich geschehen ist. Für den vorzeitigen Eintritt des exponentiellen Abfalls lassen sich verschiedene Ursachen anführen. Einmal lehrt eine numerische Diskussion der Gl. (13), daß diese schon bei kleineren Entfernungen zwar nicht einen genau exponentiellen, aber doch über gewisse Bereiche einen quasiexponentiellen Abfall mit langsam veränderlichem Koeffizienten liefert. Zum anderen könnte auch durch die Inhomogenität der Primärneutronen ein exponentieller Verlauf vorgetäuscht werden, ähnlich wie auch die Absorption inhomogener β-Strahlen praktisch häufig nach einem Exponentialgesetz erfolgt.

---

[1]) Vgl. W. H. Zinn, S. Sealy u. V. W. Cohen, Phys. Rev. 56, 260, 1939.

Was nun den Zahlenwert der Abklinglänge betrifft, so sollte diese sich asymptotisch dem Wert $1/\mu_1 \approx 5$ cm nähern. Bei kleineren Entfernungen sollte nach der zweiten Näherung (16) der Abfall steiler sein. Gemessen wurde dagegen eine Abklinglänge von rund 10 cm. Dieser Unterschied ist nicht dadurch allein zu erklären, daß die verwendeten Ra + Be-Neutronen Anteile von wesentlich mehr als 2,5 e-MV enthielten. Dieselbe Diskrepanz zeigte sich auch mit anderen Neutronenquellen wie Ra + Fluor. Sie ist wohl daraus zu verstehen, daß gerade beim Wasserstoff die Voraussetzungen der Theorie besonders schlecht erfüllt sind. Die Bevorzugung kleiner Streuwinkel und die Kleinheit der Energieverluste bei kleinen Streuwinkeln bewirken offenbar eine Vergrößerung der Abklinglänge.

Als weiterer Stoff werde Kohle betrachtet. Hier ergibt sich für den gleichen Bremsvorgang $n = 120$. Hiermit sollte die Gauß-Verteilung nach (6) schon einigermaßen genau gelten, denn nach (9) macht das erste Zusatzglied im Zentrum nur noch 4% aus. In der Tat hat Jensen aus der gemessenen Verteilung von Resonanzneutronen einen vernünftigen Mittelwert des Streuquerschnittes des C-Kernes für das in Betracht kommende Energiegebiet ableiten können.

Für große Entfernungen in Kohle sei versuchsweise der Streukoeffizient als unabhängig von der Energie angenommen, wie es nach den Messungen im großen und ganzen der Fall zu sein scheint. Dann kommt die exakte Formel (19) oder die asymptotische Verteilung (22) in Betracht. Letztere verlangt nach (20) Entfernungen von mehr als 120 Streuweglängen, also eine beträchtliche Zahl von Metern. Die Verteilung (27) gar verlangt nach (26) Abstände von mehr als 10^{51} Weglängen! Diese Zahl ist aber schon deshalb bedeutungslos, weil die μ_ν sicher nicht so exakt gleich sind wie die Herleitung voraussetzt. Es genügen z. B. schon Unterschiede von 1%, um in Entfernungen von etwa 1000 Weglängen die Gl. (15) anwendbar zu machen.

Allgemein kann man aus dieser Diskussion entnehmen, daß praktisch die Näherung für mäßige r mehr für die schwereren Atome, etwa vom Kohlenstoff ab in Betracht kommt, während die Näherungen für große r höchstens für die leichtesten Atome von praktischer Bedeutung sind. In vielen praktischen Fällen wird man sich gerade in einem mittleren Entfernungsbereich befinden, wo weder die eine noch die andere asymptotische Darstellung anwendbar ist. Dies ist genau dieselbe Schwierigkeit, die auch bei der Winkelstreuung von Teilchenstrahlen auftritt: Das Gebiet der „Mehrfachstreuung", das zwischen denen der

Einfach- und Vielfachstreuung liegt, ist ebenfalls der mathematischen Behandlung sehr schwer zugänglich[1]).

Zum Schluß sei bemerkt, daß es sicher noch eine Reihe anderer physikalischer Probleme gibt, auf die die vorstehenden Rechnungen Anwendung finden können, wie z. B. die Diffusion des Lichtes in trüben Mitteln.

Zusammenfassung. Es werden Formeln hergeleitet für die räumliche Verteilung $p(r)$ der von einer Punktquelle ausgehenden Neutronen bei ihrem n-ten Stoß mit Kernen des umgebenden Mittels. Sind $\mu_1 \cdot \cdot \mu_\nu \cdot \cdot \mu_n$ die Streukoeffizienten für die einzelnen Stöße, nach zunehmender Größe geordnet, $1/\mu_\nu = \lambda_\nu$ die freien Weglängen, so gelten die strengen Formeln (4), (11) und (19). Hieraus leiten sich die folgenden asymptotischen Ausdrücke ab.

Mäßige r:

Gl. (6) für $5\left\{1 - \frac{r^2}{\Sigma \lambda_\nu^2} + 0{,}15\frac{r^4}{(\Sigma \lambda_\nu^2)^2}\right\} \ll n$ [s. Gl. (9)].

Große r, verschiedene μ_ν:

Gl. (13) für $e^{-(\mu_{\nu+1}-\mu_\nu)r} \ll 1$;

Gl. (15) für $e^{-(\mu_{\nu+1}-\mu_\nu)r} \ll 1$ und $\mu_1 r \gg n - 1$.

Große r, gleiche μ_ν:

Gl. (21) bis (24) für $\mu r \gg n - 1$;

Gl. (27) für $\mu r \gg n - 1$ und $\log^2 2\,\mu r \gg (n-1)(n-2)$.

Höhere Näherungen lassen sich nach derselben Methode berechnen. Gl. (9) gibt das erste Zusatzglied zu Gl. (6), Gl. (16) das erste Zusatzglied zu Gl. (15).

Die Ergebnisse werden diskutiert in bezug auf die Abbremsung von Neutronen von einigen e-MV auf thermische Energie. Es zeigt sich, daß mit einer einigermaßen genauen Gauß-Verteilung in der Nähe einer Punktquelle nur bei höheratomigen Streumitteln zu rechnen ist. Andererseits kommen bei einigermaßen großer Stoßzahl die asymptotischen Verteilungen für große Entfernungen, insbesondere das Gleichgewicht mit exponentiellem Abfall nach außen, höchstens für die allerleichtesten Atome praktisch in Betracht.

Heidelberg, Institut für Physik am Kaiser Wilhelm-Institut für medizinische Forschung, 7. Dezember 1943.

[1]) Vgl. Handb. d. Phys. 22, 2, S. 6ff., 1933.

Über den Öffnungsfehler von elektrostatischen Elektronenlinsen.

Von **H. Mahl** und **A. Recknagel** in Berlin.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 5. November 1943.)

Der Öffnungsfehler von Elektronenlinsen des elektrostatischen Übermikroskops wird gemessen und berechnet. Zur Messung wird eine Aluminium-Aufdampfschicht in der Gegenstandsebene des zu untersuchenden Objektivs von einem Elektronenstrahl sehr kleiner Öffnung durchstrahlt. Aus der Radiendifferenz zwischen den Debye-Scherrer-Ringen in der Brennebene des Objektivs und den Ringen bei fehlerfreier Linse (ohne Linse) kann der Öffnungsfehler bestimmt werden. Zur Berechnung wird unter Verwendung der empirischen Brennweitenwerte eine Potentialfunktion aufgestellt und daraus der Fehlerkoeffizient berechnet. Für die untersuchten Einzellinsen mit Brennweiten zwischen 6,2 bis 7,1 mm ergeben Messung und Rechnung übereinstimmend Fehlerzahlen zwischen 60 bis 80 mm. Zur Erzielung der besten Auflösung müssen danach die Aperturblenden in der Brennebene etwa $^5/_{100}$ mm Durchmesser haben. Als optimales Auflösungsvermögen ergibt sich 0,8 mμ bei 50 kV Beschleunigungsspannung.

Das Auflösungsvermögen der heutigen Elektronen-Übermikroskope wird hauptsächlich durch die elektronenoptischen Fehler der Elektronenlinsen, insbesondere der Objektive, bestimmt. Setzt man ideal rotationssymmetrische Linsen ohne unsymmetrische elektromagnetische Störfelder voraus, so ist der Öffnungsfehler (sphärische Aberration) maßgebend für das Auflösungsvermögen. Es gibt eine ganze Reihe von Arbeiten, die sich mit der Bestimmung des Öffnungsfehlers spezieller Elektronenlinsen auf experimentellem[1]) oder theoretischem[2]) Wege befassen. Für elektrostatische Übermikroskoplinsen liegen aber noch keine hinreichenden experimentellen Kenntnisse vor. Theoretische Untersuchungen über diese Linsen gibt es überhaupt noch nicht. Diese Lücke soll in der vorliegenden Arbeit ausgefüllt werden.

Man kennzeichnet den sphärischen Fehler üblicherweise durch die Größe des Zerstreuungskreises, über den die Elektronen eines Dingpunktes in der Gaußschen Bildebene verteilt sind. Sei ϱ der Halbmesser dieses Zerstreuungskreises, α der Winkel zwischen Elektronenbahn und optischer Achse am Dingpunkt, V das Vergrößerungsverhältnis, C ein Fehlerkoeffizient, dann gilt

$$\varrho = C V \alpha^3. \qquad (1)$$

[1]) H. Becker u. A. Wallraff, Arch. Elektrotechn. **32**, 664, 1938; **34**, 115, 1940; H. Boersch, Jahrb. AEG-Forsch. **7**, 34, 1940; E. Gundert, Die Telefunkenröhre, Heft 19/20, 1941; M. v. Ardenne, ZS. f. Phys. **117**, 602, 1941. — [2]) A. Recknagel, Jahrb. AEG-Forsch. **7**, 15, 1940; W. Glaser, ZS. f. Phys. **117**, 285, 1941; J. Dosse, ebenda S. 723.

Der Zerstreuungskreis, der sich aus dieser geometrisch-optischen Formel ergibt, hat jedoch nur eine begrenzte praktische Bedeutung. Um eine möglichst hohe Auflösung zu erzielen, wird man auf eine beste Einstellebene einstellen, die im allgemeinen keineswegs mit der Gaußschen Bildebene zusammenfällt. Außerdem wird die Intensitätsverteilung im Bildpunkt durch wellenoptische Erscheinungen bedingt und kann nicht nach den Regeln der geometrischen Optik bestimmt werden. Schließlich spielen auch noch andere Faktoren physikalischer und physiologischer Art für die Feststellung der besten Einstellung eine Rolle. Aus diesen Gründen besteht durchaus kein sachlicher Zwang, den Öffnungsfehler gerade durch den Zerstreuungskreis der Gaußschen Bildebene zu charakterisieren. Man kann genau so gut die Fehlererscheinung in einer anderen Ebene wählen, wenn eine solche Wahl aus irgendwelchen Gründen zweckmäßig erscheint. Dem steht insbesondere dann nichts im Wege, wenn man eine große Reihe verschiedener Linsen miteinander vergleichen will, wenn man aber auf den Absolutwert des Fehlers selbst und seinen Zusammenhang mit dem Auflösungsvermögen weniger Gewicht legt. In der folgenden Arbeit wird der Öffnungsfehler durch die Fehlererscheinung in der bildseitigen Brennebene gekennzeichnet, die sich experimentell einfach bestimmen läßt. Der Zusammenhang der so bestimmten Fehlerzahl mit der üblicherweise angegebenen wird durch die Rechnungen erläutert.

Experimenteller Teil.

Bei dem üblichen Verfahren zur Ermittlung des Öffnungsfehlers läßt man vom Dingpunkt aus möglichst feine Elektronenstrahlen durch die verschiedenen Linsenzonen gehen. Man mißt in der Bildebene die Abweichung dieser Strahlen von dem idealen Strahlverlauf, der in unmittelbarer Nähe der optischen Achse am besten verwirklicht ist. Die feinen Strahlen werden dabei durch Blenden möglichst scharf festgelegt. Für übermikroskopische Zwecke interessiert der Fehler, falls das Ding praktisch im Brennpunkt der Linse sitzt. In diesem Falle kann man mit Vorteil eine kleine Abänderung des Verfahrens benutzen. Statt die Strahlen vom Brennpunkt (dem Dingpunkt) aus unter verschiedenen Winkeln in die Linse einfallen zu lassen, kann man parallele Strahlen in verschiedenen Abständen auf die Linse auftreffen lassen. Der nun in der bildseitigen Brennebene gemessene Zerstreuungskreis, noch mit dem Vergrößerungsverhältnis multipliziert, ist dann gleich dem gesuchten Zerstreuungskreis. Zur Kennzeichnung der einzelnen

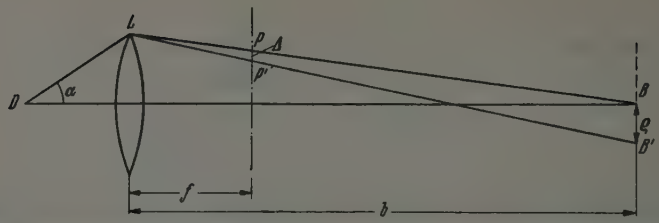


Fig. 1. Zusammenhang des sphärischen Fehlers in der Bildebene mit dem in der Brennebene.

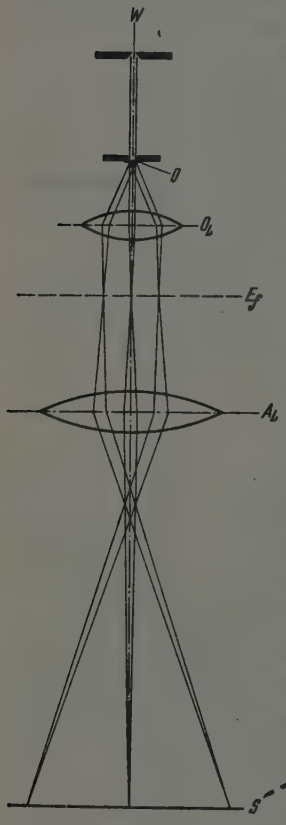


Fig. 2.
Schema der Versuchsanordnung.

Strahlen genügt hier ein Netz im parallelen Strahlverlauf vor der Linse. Im Schattenbild dieses Netzes, das in genügender Entfernung hinter dem Brennpunkt aufgefangen wird, wirkt sich der Öffnungsfehler als Verzeichnung aus, die zur Festlegung des Strahlenganges dient. Allerdings ist dieses Verfahren ohne Schwierigkeit nur bei kleinen Vergrößerungen anwendbar. Man kann sich aber von diesem Mangel freimachen, wenn man das Netz hinter dem bildseitigen Brennpunkt anbringt. (Prinzip des Schattenmikroskops von Boersch.)

Bei den bisher erwähnten Verfahren wird der Zerstreuungskreis in der Gaußschen Bildebene als Maß des Fehlers bestimmt. Dagegen läuft, wie bereits erwähnt wurde, das Verfahren der vorliegenden Arbeit auf die Bestimmung der Fehlererscheinung in der Brennebene hinaus. Zunächst sei der Zusammenhang zwischen dem Fehler in der Bildebene und in der Brennebene aufgezeigt. Hierzu dient die schematische Fig. 1, die eine dünne Linse voraussetzt. Der vom Dingpunkt D ausgehende Strahl würde bei fehlerfreier Linse über den in der Brennebene liegenden Punkt P nach dem Bildpunkt B gehen. Wegen des Öffnungsfehlers geht er jedoch über P' nach B'. Die Strecke BB' ist der Radius ϱ des

Zerstreuungskreises, die Strecke $PP' = \Delta$ gibt den Fehler in der Brennebene. Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\varrho = \frac{b}{f}\,\Delta = (V+1)\,\Delta. \tag{2}$$

Man kann also die Größe Δ als Maß für den Öffnungsfehler benutzen und aus ihr in einfacher Weise den Zerstreuungskreis in der Bildebene berechnen, zumindesten für dünne Linsen. Die beiden Gleichungen (1) und (2) können unter Einführen einer neuen Fehlerkonstanten C_f zusammengefaßt werden zu

$$\Delta = C_f \cdot \alpha^3. \tag{3}$$

Verfahren zur Fehlerbestimmung. Zur experimentellen Bestimmung der Größe Δ dient die in Fig. 2 mit dem Strahlengang dargestellte Anordnung. Das von außen verschiebbare Objektiv O — eine auf eine $^3/_{100}$ mm Bohrung aufgelegte Aluminium-Aufdampfschicht — befindet sich in der durch normale Abbildung festgestellten Gegenstandsebene des Objektivs O_L, dessen Fehler bestimmt werden soll. Das Objekt wird von W aus von einem Elektronenstrahl sehr kleiner Öffnung ($< 10^{-3}$) durchstrahlt. Hinter dem Objekt entsteht das Debye-Scherrer-Beugungsbild, d. h. Elektronenstrahlkegel, die bei konstanter Strahlspannung unter verschiedenen, durch die Substanz der Folie scharf definierten Öffnungswinkeln in die Linse hineinlaufen. Die Beugung an der Folie bestimmt also hier die feinen Strahlen, welche auf die verschiedenen Linsenzonen treffen, während man üblicherweise mechanische Blenden zur Festlegung dieser Strahlen benutzt. Die Debye-Scherrer-Ringe haben ihre größte Schärfe in der Brennebene E_f des Objektivs. Das Intensitätsmaximum eines solchen Ringes liegt bei dem Punkt P' der Fig. 1, wo sich die parallel zur Achse auf die Folie auftreffenden und in der Folie gebeugten Elektronen vereinigen. Da das Beugungsbild in der Brennebene des Objektivs sehr klein ist, ist unmittelbar hinter dem Objektiv eine Abbildungslinse A_L angebracht, welche die Brennebene des Objektivs vergrößert auf den Leuchtschirm bzw. die Photoplatte S abbildet. Von dieser Abbildungslinse ist zu fordern, daß sie keinen neuen Fehler in das Bild bringt. Das Potential der Abbildungslinse kann zur Scharfstellung des Beugungsbildes mit Hilfe eines Hochspannungspotentiometers geändert werden. Dagegen ist die Mittelelektrode des Objektivs entsprechend seiner Verwendung im elektrostatischen Übermikroskop mit der Glühkathode kurzgeschlossen.

Zur Bestimmung von Δ braucht man außer dem Punkt P' auch noch den Punkt P (Fig. 1), d. h. den Durchmesser des Beugungsbildes bei fehlerfreier Linse. Da es eine solche Linse nicht gibt, muß man sich durch einen Umweg helfen. Das Bild, das eine fehlerfreie Linse liefern würde, ist geometrisch ähnlich einem Beugungsbild, das man ohne jede Linse erhält. Zur Aufnahme eines solchen Vergleichsbeugungsbildes kann das Objekt unterhalb der beiden Linsen mit Hilfe einer Stabschleuse in die Apparatur eingeschleust werden[1]). Um dieses Vergleichsbild auf die richtige Größe zu bringen, beachte man, daß zufolge Gl. (3) die Fehlergröße Δ mit abnehmendem Beugungswinkel α wie

Fig. 3. Beugungsbild einer Aluminiumfolie, erhalten mit der Anordnung Fig. 2.

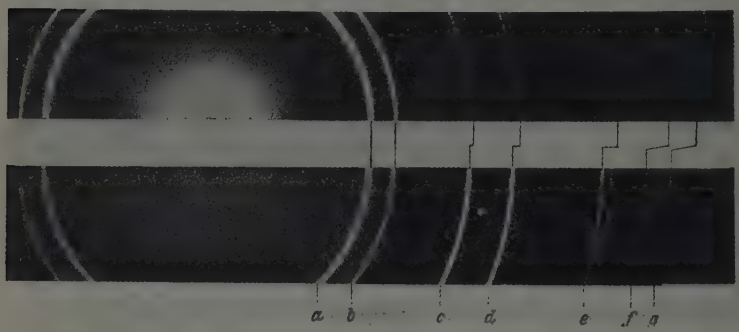


Fig. 4. Vergleich eines fehlerfreien Beugungsbildes (oben: erhalten ohne Mitwirkung von Linsen) mit einem fehlerbehafteten Bild (unten: erhalten mit Anordnung Fig. 2).

α^3 abnimmt, während der Ringdurchmesser selbst wie α kleiner wird. Bei den innersten Ringen fällt sonach die Fehlergröße verhältnismäßig wenig ins Gewicht. Man bekommt daher in erster Näherung richtige Verhältnisse, wenn man den innersten Ring des fehlerfreien Beugungsbildes gleich dem des fehlerbehafteten Bildes macht. In Fig. 3 ist ein

[1]) H. Mahl, Kolloid-ZS. 100. 219. 1942.

durch Abbildung der Brennebene gewonnenes Beugungsdiagramm der Aluminium-Aufdampfschicht vergrößert wiedergegeben. Fig. 4 stellt einen höher vergrößerten Ausschnitt dieses Bildes (unten) einem ohne Mitwirkung von Linsen erhaltenen Beugungsbild (oben) gegenüber. Die beiden Bildausschnitte wurden dabei derart optisch nachvergrößert, daß die innersten Ringdurchmesser gleich wurden. Der Einfluß des Öffnungsfehlers ist nun deutlich daran zu erkennen, daß mit steigendem Durchmesser die Ringe des fehlerbehafteten Bildes in wachsendem Maße kleiner werden als die des fehlerfreien Bildes. Zur Auswertung der Bilder braucht man nur die Differenz der Ringdurchmesser auf die Brennebene zu reduzieren. Die Fehlerkonstante C_f kann dann mit Hilfe der dem betreffenden Beugungsring zukommenden Beugungswinkel α (gemessen aus Beugungsaufnahmen ohne Linse) und der gemessenen Radiendifferenz nach (3) ausgewertet werden[1]). Hat man auf diese Weise einen ersten Näherungswert für die Fehlerkonstante erhalten, so kann man mit diesem Wert den Fehler ausrechnen, der beim innersten Ring auftreten muß. Um diese meist an der Grenze der Meßgenauigkeit liegende Größe wird der innerste Ringdurchmesser des fehlerfreien Bildes erhöht. Die übrigen Ringe werden entsprechend vergrößert. Mit dem so gewonnenen, hinsichtlich der Absolutgröße verbesserten fehlerfreien Bild wird der Fehler neu berechnet und so eine korrigierte Fehlerkonstante gefunden, deren Genauigkeit nunmehr ausreichend ist.

Ergebnisse. Die Untersuchungen der Fehlerzahl wurden an Objektiven durchgeführt, wie sie im elektrostatischen Übermikroskop benutzt werden[2]). Dabei mußte lediglich eine feine, unmittelbar außerhalb der bildseitigen Außenelektrode angeordnete Blende herausgenommen werden, die sonst die gestreuten Elektronen abfängt. Außerdem mußten die beiden Außenelektroden von 0,5 auf 1 mm aufgebohrt werden.

Als erstes wurde untersucht, inwieweit die Fehler der Abbildungslinse in die Messungen eingehen und wie sie zu beseitigen sind. Der Öffnungswinkel der Elektronenbündel ist hinter dem Objektiv im Verhältnis der Objektivvergrößerung kleiner als vor dem Objektiv. Daher kann man den Einfluß dieses Öffnungswinkels auf die Fehlerberechnung bei der Abbildungslinse in erster Näherung vernachlässigen.

[1]) Die Ringdurchmesser wurden vorher auf eine Strahlspannung von 50 e-kV reduziert. Die Aufnahmen selbst sind bei Strahlspannung zwischen 48 und 52 kV durchgeführt worden. — [2]) Vgl. z. B. H. Mahl, Kolloid-ZS. 91, 405, 1940.

Die Abbildungslinse verändert das Bild also nur durch ihren Verzeichnungsfehler. Es sei V_2 das Vergrößerungsverhältnis der Abbildungslinse, A_2 ihr Fehlerkoeffizient für die Verzeichnung; die Objektivlinse sei durch den Index 1 gekennzeichnet. Dann ist der Radius der Debye-Scherrer-Ringe im Endbild um die Strecke

$$\delta = -C_{f1}\,\alpha^3 V_2 + A_2\,(f_1\,\alpha)^3\,V_2$$

gegenüber den idealen Verhältnissen verschoben. Nun kann man für eine dünne Linse näherungsweise setzen:

$$A_2 = \frac{C_2}{f_2^3},$$

wo C_2 der Koeffizient des Öffnungsfehlers ist[1]). Damit ergibt sich

$$\delta = V_2\,\alpha^3\left[-C_{f_1} + C_2 \cdot \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^3\right]. \qquad (4)$$

Ist die zweite Linse der ersten gleich, so verschwindet bei großem V_2, d. h. für $C \approx C_f$, der Klammerausdruck in (4)[2]). Dann muß aber die 5. Potenz von α eine Rolle spielen. Rechnet man daher bei einer solchen Abbildungslinse aus den im Endbild gemessenen Radiendifferenzen nach (3) einen Fehlerkoeffizienten aus, so erhält man für die verschiedenen Winkelwerte α nicht den gleichen Wert. Der Einfluß des zweiten Gliedes in (4) verschwindet, wenn man eine große Abbildungslinse mit großer Brennweite wählt. Geht beispielsweise die Abbildungslinse durch einfache Vergrößerung um den Faktor n aus dem Objektiv hervor, so gilt $C_2 = n \cdot C_1$, $f_2 = n f_1$, insgesamt ist also das zweite Glied in (4) um den Faktor n^2 kleiner als das erste. Ist die Abbildungslinse so groß, daß bei weiterer Vergrößerung der Fehler-

---

[1]) Nach Brüche-Scherzer, Geometrische Elektronenoptik, Gl. (68) S. 129, Berlin, Springer, 1934, lautet der Fehler in der Bildebene

$$\varrho = -\frac{r_\beta}{\sqrt{U}} \cdot \int_{z_a}^{z_b} \frac{B\,r_\alpha}{\sqrt{\Phi}}\,\mathrm{d}z.$$

Dabei ist B eine homogene Funktion 3. Grades der Gaußschen Näherung. Für den Öffnungsfehler ist die Gaußsche Näherung gleich der Funktion $\alpha \cdot r_\alpha$, die durch $r_\alpha = 0$, $r'_\alpha = 1$ am Dingpunkt definiert ist. Für den Verzeichnungsfehler ist die Gaußsche Näherung gleich $r_{\text{Objekt}} \cdot r_\beta$, definiert durch $r_\beta = 1$, $r'_\beta = 0$ am Dingpunkt. Für dünne Linsen gilt bei hoher Vergrößerung ($a \approx f$) im Linsengebiet $r_\alpha \approx f \cdot r_\beta$, woraus die obige Behauptung folgt. — [2]) In diesem Falle wäre also für das Gesamtsystem Objektiv—Abbildungslinse die Fehlererscheinung in der Brennebene (der Leuchtschirmebene) nicht als Maßstab für den Öffnungsfehler zu gebrauchen.

koeffizient sich nicht mehr ändert, so kann die Abbildungslinse als genügend fehlerfrei angesehen werden.

Um Anhaltspunkte für die Wahl der Abbildungslinse zu erhalten, wurden Versuche mit drei Linsen verschiedener Brennweite durchgeführt. Die notwendige starke Annäherung von Objektiv und Abbildungslinse bei kleiner Brennweite wurde durch Verwendung von unsymmetrischen Blenden ermöglicht. Die Anordnungen sind in Fig. 5 schematisch wiedergegeben. Die Brennweite der Objektlinse war in allen Fällen (Mittelelektrode mit Glühkathode verbunden) die gleiche (6,8 bis 7,1 mm), die der Abbildungslinsen (eingestellt durch Spannungsteiler) waren 14,5, 28,5 und 36 mm. Die Meßergebnisse für diese Fälle sind in der Tabelle 1 wiedergegeben. Für alle drei Brennweiten erweist sich die Fehlerkonstante als genügend unabhängig vom Ablenkwinkel, und die Werte für die drei Linsen stimmen genügend überein. Die Abweichungen, die noch vorhanden sind, hat man auf Ungenauigkeit der Ablesungen zu schreiben und nicht der Abbildungslinse zur Last zu legen. Die beiden größeren Brennweiten sind auf jeden Fall genügend fehlerfrei.

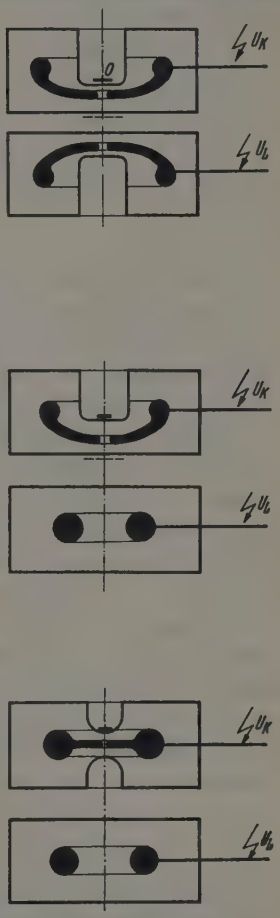


Fig. 5. Die benutzten Abbildungssysteme (schematisch, U_K = Kathodenpotential, U_L = einstellbares Potential der Abbildungslinse).

Der Vergleich der drei Abbildungslinsen wurde mit einer Objektivlinse von 5 mm Öffnung der Mittelblende durchgeführt. Die Brennweite ist normalerweise 6,8 mm, durch das Aufbohren der Außenelektroden erhöht sie sich auf 7,0 bis 7,1 mm. Hier ergab sich als Fehlerzahl

$$C_f \approx 80 \text{ mm}.$$

Die zweite untersuchte Linse, die zur Zeit normalerweise in den AEG-Übermikroskopen verwendet wird, hat eine Mittelöffnung von

Tabelle 1. Fehlerkonstanten bei verschiedenen Abbildungslinsen. (C_f unkorrigiert; $C_{f\,\text{korr.}}$ = korrigiert.)

Ringnummer	Winkelwerte α f in 50 e-kV	C_f $f_A = 14{,}5$ mm	C_f $f_A = 28{,}5$ mm	C_f $f_A = 36$ mm	$C_{f\,\text{korr.}}$ $f_A = 14{,}5$ mm	$C_{f\,\text{korr.}}$ $f_A = 28{,}5$ mm	$C_{f\,\text{korr.}}$ $f_A = 36$ mm
a	0,0237	—	—	—	80	80	80
b	0,0274	38	—	16	85	83	82
c	0,0386	41	44	35	75	81	71
d	0,0452	55	56	47	76	78	77
e	0,0494	67	71	70	82	85	83
f	0,0667	68	70	71	79	81	82
g	0,0771	78	79	79	86	90	88

4,8 mm und eine Brennweite von 6,1 mm. Hier ergibt sich eine Fehlerzahl

$$C_f \approx 65 \text{ mm}.$$

Die Genauigkeit der Messung wird auf 10 mm geschätzt.

Aus theoretischen Überlegungen[1]) folgt, daß Immersionsverzögerungslinsen kleinere Fehler haben sollten als Einzellinsen, deren Brennweite mit der größeren Brennweite der Immersionslinse übereinstimmt. Daher wurde versucht, Immersionsverzögerungslinsen nach dem Verfahren dieser Arbeit zu untersuchen. Dabei sollte als Abbildungslinse eine Immersions-Beschleunigungslinse dienen. Die Konstruktion war zunächst so durchgeführt worden, daß Objekt- und Abbildungslinse die gleiche Brennweite hatten. In diesem Falle ergab sich, daß die gemessenen Radiendifferenzen ganz anders als mit der dritten Potenz — etwa mit der fünften Potenz — des Beugungswinkels anwuchsen. Nach den obigen Überlegungen, Gl. (4), ist ein solches Verhalten verständlich. Versuche mit großbrennweitigen Abbildungslinsen mißlangen aber deshalb, weil ein zu starker Felddurchgriff und damit eine Beeinflussung der Objektlinse durch die Abbildungslinse eintrat. Eine klare Entscheidung über die Fehler der Immersionslinse konnte daher auf dem eingeschlagenen Weg nicht gewonnen werden, obwohl anscheinend eine Überlegenheit der Immersionslinse über die Einzellinse vorhanden ist[2])[3]).

[1]) A. Recknagel, Jahrb. AEG-Forsch. 7, 15, 1940 (Sonderheft).

[2]) Die theoretisch für dünne Linsen und experimentell wenigstens näherungsweise auch für dicke Linsen festgestellte Kompensation der Fehler bei gleicher Brennweite von Objektiv und Abbildungslinse bedeutet, daß damit eine Apparatur mit Linsen für Beugungsuntersuchungen gefunden ist, die für kleine Ablenkwinkel (Glieder mit α^3) korrigiert ist. In der Tat stimmten bei den Immersionslinsen die innersten Beugungsringe innerhalb der Meßgenauigkeit mit den fehlerfreien Ringen überein. Erst bei den äußersten Ringen, bei viel größeren Beugungswinkeln als bei anderen Anordnungen, traten Abweichungen vom idealen Verlauf auf. — [3]) Die Untersuchung wurde auf Immersions-Verzögerungslinsen beschränkt, weil nur diese ohne Schwierigkeit als Übermikroskop-Objektive bei großen Durchstrahlungsgeschwindigkeiten brauchbar sind.

Neben dem Öffnungsfehler können auch noch weitere Bildfehler untersucht werden, wenn man nicht nur die Größenänderung der Beugungsringe berücksichtigt, sondern auch die sonstigen Unterschiede gegenüber dem normalen Beugungsbild betrachtet. Solche Unterschiede sind beispielsweise Schärfeänderungen längs der Beugungsringe oder Verformung der Ringe in sich. An Hand der Formänderungen z. B. kann man auf Mängel in der Rotationssymmetrie der Linsen (Astigmatismus für Achsenpunkte) schließen. Die Methode ist, wie Experimente gezeigt haben, so empfindlich, daß Zentrierungsfehler im Objektiv, die zu einem merkbaren Astigmatismus im übermikroskopischen Bild führen, ebenfalls eine erkennbare Unsymmetrie der nach unserer Methode abgebildeten Beugungsringe bewirken.

Theoretischer Teil.

Es hatte sich ergeben, daß für dünne Linsen ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Zerstreuungskreis in der Gaußschen Bildebene und der Fehlererscheinung in der Brennebene besteht. Nun sind aber die Linsen der Übermikroskope keinesfalls als dünne Linsen aufzufassen. Daher fragt es sich, welche Beziehung in diesem Fall zwischen den Fehlergrößen besteht.

Die Abweichung der Elektronenbahn von der Gaußschen Näherung lautet[1]):

$$\varrho = \frac{r_\alpha}{\sqrt{U}} \int_{z_a}^{z} \frac{B r_\beta}{\sqrt{\Phi}} \, dz - \frac{r_\beta}{\sqrt{U}} \int_{z_a}^{z} \frac{B r_\alpha}{\sqrt{\Phi}} \, dz.$$

Dabei ist Φ das Potential auf der optischen Achse, gegen Kathode gemessen, U die Beschleunigungsspannung [$U = \Phi\,(z = z_a)$], B ist eine Funktion des Potentials und seiner Ableitungen sowie der Gaußschen Näherung, r_α und r_β sind spezielle Gaußsche Bahnen, definiert durch die Anfangsbedingungen

$$r_\alpha = 0,\ r'_\alpha = 1; \quad \text{am Dingpunkt } z = z_a,$$
$$r_\beta = 1,\ r'_\beta = 0; \quad \text{am Dingpunkt } z = z_a.$$

Am Bildpunkt $z = z_b$ ist $r_\alpha = 0, r_\beta = -V$, der Radius des Zerstreuungskreises wird also

$$\varrho = \frac{V}{\sqrt{U}} \int_{z_a}^{z_b} \frac{B r_\alpha}{\sqrt{\Phi}} \, dz. \tag{5}$$

[1]) Brüche-Scherzer, Geometrische Elektronenoptik, S. 129, Gl. (68).

Dagegen ist die Brennebene z_f charakterisiert durch $r_\beta = 0$, $r_\alpha = f$[1]), die Abweichung vom idealen Strahlverlauf wird

$$\Delta = \frac{f}{\sqrt{U}} \int_{z_a}^{z_f} \frac{B r_\beta}{\sqrt{\Phi}} \, \mathrm{d}z. \tag{6}$$

Für dünne Linsen, wo der Integrand voraussetzungsgemäß nur in einem sehr kleinen z-Bereich von Null verschieden ist, gilt in diesem z-Bereich $r_\alpha = a \cdot r_\beta$, daher

$$\varrho = V \cdot \frac{a}{f} \Delta = (V + 1) \Delta$$

in Übereinstimmung mit (3). Im Normalfall dicker Linsen läßt sich dagegen ein derart einfacher Zusammenhang nicht aufstellen. Man wird um so mehr Unterschied zwischen den beiden Größen finden, je weniger die Linse als dünn anzusprechen ist. Um doch zu einer brauchbaren Aussage über das Verhältnis der beiden Fehlergrößen zu gelangen, wurden beide Größen für die elektrostatischen Linsen, wie sie heute benutzt werden, durch numerische Rechnung bestimmt.

Berechnung des Potentials. Die rechnerische Ermittlung der Bildfehler von elektrischen Elektronenlinsen erfordert eine genaue Kenntnis des Potentials sowie seiner ersten und zweiten räumlichen Ableitung. Leider gibt es kein einfaches Verfahren, mit dessen Hilfe man die Potentialverteilung für die komplizierten Elektrodenformen elektrischer Linsen genügend genau berechnen kann. Daher wurde für die Linsen des AEG-Übermikroskops der folgende halbempirische Weg eingeschlagen:

Das gesuchte Potential wurde approximiert durch das analytisch bekannte Potential einer ähnlichen Anordnung, das noch einige wenige willkürlich wählbare Konstanten enthielt. Dieses Ersatzpotential wurde „nach Gefühl" so gewählt, daß es das tatsächliche Potential möglichst gut darstellt. Durch Verfügung über die willkürlichen Konstanten wurde das Potential solange geändert, bis sich die richtige Brennweite ergab. Eine Kontrolle für die Güte der so erhaltenen Potentialdarstellung erhält man durch die Berechnung der sonstigen bekannten Linseneigenschaften (Lage des Brennpunktes, Potentialwert im Sattelpunkt der Einzellinse). Werden diese Größen durch das Ersatzpotential gut wiedergegeben, so darf man hoffen, daß die unbekannten Linseneigen-

[1]) Dabei ist vorausgesetzt, daß Ding- und Brennebene im feldfreien Raum liegen. Bei den elektrostatischen Linsen ist das sehr gut verwirklicht.

schaften, z. B. die Fehlerzahlen, gut dargestellt werden. Unabhängig von dieser elektronenoptischen Kontrolle ist natürlich auch eine direkte, aber umständliche Prüfung möglich, indem man berechnet, wie genau die empirisch vorgegebenen Elektrodenformen durch die entsprechenden Potentialflächen des Ersatzpotentials angenähert werden.

Für die Rechnung wurde die Elektrodenform der Fig. 6 zugrunde gelegt; die Elektrodenoberflächen sollen sich als parallele Ebenen bis

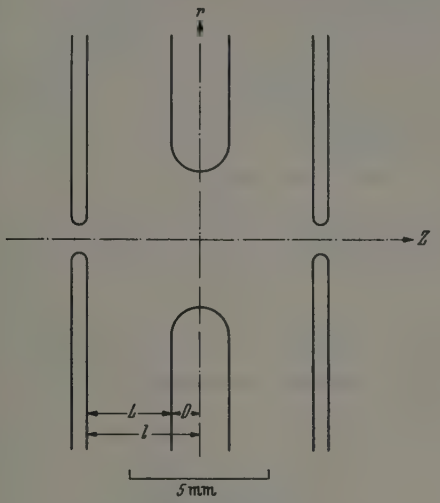


Fig. 6. Schema der berechneten Linse.

ins Unendliche erstrecken. Es kann angenommen werden, daß diese Idealisierung der in Wirklichkeit natürlich endlichen Elektroden keinen wesentlichen Einfluß auf das Potential der optischen Achse ausübt. Eine rohe Näherung für das Feld in der Öffnung einer dieser Elektroden ist das Feld einer Lochblende, d. h. einer Ebene konstanten Potentials, die mit einem Kreisloch versehen ist und zwischen zwei sehr weit entfernten Ebenen von anderem Potential steht. Als erstes soll versucht werden, das Feld der Linse additiv aus den Feldern dreier Lochblenden geeigneter Größe und Aufladung zusammenzusetzen, die in der Symmetrieebene der Linse bzw. in den inneren Begrenzungsflächen der beiden äußeren Elektroden sitzen.

Zur formelmäßigen Darstellung des Potentials wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem so in das Feld gelegt, daß die z-Achse mit der optischen Achse und die x-y-Ebene mit der Symmetrieebene der

Linse zusammenfällt. Der Abstand von der optischen Achse wird r genannt: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Die Lage einer Lochblende sei durch $z = z_0$ gekennzeichnet, ihr Radius sei r_0, das Feld in großer Entfernung links vor der Blende sei $\mathfrak{E}_0$, rechts hinter der Blende sei es $-\mathfrak{E}_0$. Dann lautet das Potential φ der Blende[1])

$$\varphi = 2 \cdot \mathfrak{E}_0 \cdot \psi(z_0, r_0), \tag{7'}$$

[2])

$$\psi = \frac{1}{\pi} |z - z_0| \left\{ \operatorname{arc\,tg} \mu + \frac{1}{\mu} \right\}, \tag{7''}$$

$$\mu = \frac{1}{r_0 \sqrt{2}} \sqrt{(z-z_0)^2 + r^2 - r_0^2 + \sqrt{[(z-z_0)^2 + r^2 - r_0^2]^2 + 4(z-z_0)^2 r_0^2}}. \tag{7'''}$$

Auf der optischen Achse gilt

$$\psi = \frac{1}{\pi} \left[(z - z_0) \operatorname{arc\,tg} \frac{z - z_0}{r_0} + r_0 \right]. \tag{8}$$

Die Überlagerung der drei Lochblendenpotentiale hat nun folgende Form:

$$\varphi_a = \frac{U}{L} [-\psi(-l, r_A) + 2\psi(0, r_I) - \psi(l, r_A)] + U. \tag{9}$$

Dabei ist r_A der Radius der äußeren Lochblenden, r_I derjenige der inneren. Dieser Ansatz erfüllt folgende Bedingungen (vgl. Fig. 6):

$$\begin{aligned} \varphi &= U \quad \text{für} \quad z \to \pm\infty, \\ \varphi &= U \quad \text{für} \quad z = \pm l \quad \text{und} \quad r \to \infty, \\ \varphi &= 0 \quad \text{für} \quad z = \pm D \quad \text{und} \quad r \to \infty. \end{aligned}$$

Dadurch ist erreicht, daß das Potential in großer Entfernung von der Linsenmitte (dem Koordinatennullpunkt) den richtigen Wert hat, abgesehen von dem unzugänglichen und uninteressanten Gebiet innerhalb der Mittelelektrode. Die Radien r_A und r_I sind vorläufig noch nicht festgelegt worden, über sie wird noch verfügt werden.

Um zu sehen, wie genau der bisherige Ansatz im ganzen ist, betrachte man das Potential auf der optischen Achse. Außerhalb der beiden äußeren Elektroden hat das tatsächliche Potential praktisch überall den Wert U (Beschleunigungspotential). Beim Durchgang durch die Außenelektroden beginnt das Potential schnell abzunehmen und fällt monoton bis zu einem Minimum in der Linsenmitte. Betrachtet man dagegen das

---

[1]) W. Henneberg, ZS. f. Phys. **94**, 22, 1935. — [2]) Die Funktion ψ ist natürlich nicht nur von z_0 und r_0, sondern auch von z und r abhängig. Der Kürze wegen wurde das nicht besonders angemerkt.

Ersatzpotential, so findet man auf der optischen Achse für große Entfernungen von der Linse

$$\varphi_a \approx \frac{U}{L} \cdot \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{1}{z^2} (r_I^3 - r_A^3) + U. \tag{10}$$

Wegen $r_I > r_A$ ist $\varphi_a > U$, d. h. das Ersatzpotential ist größer als das gesamte Beschleunigungspotential. Zahlenmäßig ist diese Ungenauigkeit so groß, daß sie noch beseitigt werden muß. Man muß also zu dem bisherigen Ansatz noch ein Potential zufügen, das in großer Entfernung von der Linse wie z^{-2} abklingt und symmetrisch zur Linsenmitte ist. Zu diesem Zweck breitet man in den Ebenen $z = -l,\ 0,\ +l$ je eine geeignete Flächenladung aus, deren Dichte wie ϱ^{-3} abnimmt (ϱ ist hier der Abstand von der optischen Achse). Die Ladung

$$\sigma(\varrho) = \frac{A}{\varrho^3},$$

die bei $z = z_0$ liegt und von $\varrho = \infty$ bis $\varrho = \bar{r}_0$ reicht, hat auf der optischen Achse das Potential

$$\varphi = A \cdot \frac{2\pi}{\bar{r}_0} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^2} \left[\sqrt{\bar{r}_0^2 + (z - z_0)^2} - \bar{r}_0 \right] \approx \frac{A}{\bar{r}_0} \cdot \chi(z_0, \bar{r}_0). \tag{11}$$

Durch den Ansatz

$$\varphi_\beta = -\frac{1}{6\pi^2} \cdot \frac{U}{L} \frac{r_I^3 - r_A^3}{\bar{r}_I - \bar{r}_A} \{\chi(-l, \bar{r}_A) - 2\chi(0, \bar{r}_I) + \chi(l, \bar{r}_A)\} \tag{12}$$

mit den neuen willkürlichen Konstanten $\bar{r}_I$ und $\bar{r}_A$ und Zufügen dieses Potentials zu φ_a wird das störende Glied der Formel (10) gerade beseitigt. Als besseres Ersatzpotential findet man also

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_\beta. \tag{13}$$

Dieser Ausdruck ist durch Wahl der Konstanten r_A, r_I, $\bar{r}_A$, $\bar{r}_I$ den tatsächlichen Verhältnissen möglichst weitgehend anzupassen. Zunächst wurde willkürlich ein Wert von r_A angenommen, der etwa doppelt so groß ist wie der tatsächliche Radius der Außenelektrode. Da die Elektronen im Gebiet der Außenblenden schnell sind, wird sich ein Fehlgriff in der Wahl von r_A auf die elektronenoptischen Eigenschaften verhältnismäßig wenig auswirken. Daher wurde r_A für die ganze weitere Rechnung auch nicht mehr geändert. Ein roher Wert von r_I wurde dadurch gewonnen, daß die Nullfläche des Potentials φ_a in der Symmetrieebene gerade die auf Nullpotential befindliche Mittelelektrode berührt. Diese Bestimmung ist sehr einfach durchzuführen, der Näherungswert von r_I ist praktisch unabhängig von dem ursprünglich gewählten r_A,

da der Abstand der Elektroden groß gegen r_A ist. Nun wurden durch Probieren die Werte $\bar{r}_I$ und $\bar{r}_A$ so festgelegt, daß der allgemeine Verlauf des Achsenpotentials richtig wiedergegeben wird: Außerhalb der Linse fast konstantes Potential, in den Außenelektroden scharfer Übergang zu stetigem Abfall nach der Mittelelektrode hin. Nachdem das erreicht war, wurde ebenfalls durch Probieren der endgültige Wert von r_I gewählt, der die richtige Brennweite ergab. Dabei brauchte $\bar{r}_I$ und $\bar{r}_A$ nicht mehr geändert zu werden. Die Tabellen 2 und 3 enthalten zwei der so erhaltenen Potentiale Φ auf der optischen Achse samt den ersten beiden Ableitungen nach z. Die Differentiationsstriche bedeuten dabei Ableitungen nach der dimensionslosen Größe $\zeta = z/L$. Für beide Linsen war $L = 3$ mm, $D = 1$ mm (vgl. Fig. 6). Die Tabellen sollen Linsen darstellen, bei denen der Durchmesser des Loches in der Mittelelektrode 4,8 bzw. 5,0 mm ist. Die Löcher der äußeren Blenden haben 0,5 mm Durchmesser.

Die elektronenoptischen Eigenschaften sind durch den Feldverlauf in seiner Gesamtheit bestimmt. Die Art der Ableitung, insbesondere

Tabelle 2.
Potential einer Einzellinse.
$r_A = 0{,}5$ mm, $\bar{r}_A = 2{,}0$ mm.
$r_I = 2{,}75$ mm, $\bar{r}_I = 4{,}2$ mm.

ζ	Φ/U	Φ'/U	Φ''/U
0	$0{,}226_6$	0	1,34
0,1	$0{,}233_2$	0,130	1,31
0,2	$0{,}252_6$	0,260	1,21
0,3	$0{,}284_7$	0,380	1,06
0,4	$0{,}327_5$	0,476	0,93
0,5	$0{,}378_9$	0,562	0,78
0,6	$0{,}439_5$	0,631	0,64
0,7	$0{,}505_0$	0,690	0,52
0,8	$0{,}577_4$	0,736	0,41
0,9	$0{,}653_7$	0,775	0,31
1,0	$0{,}730_9$	0,798	0,17
1,1	$0{,}810_8$	0,802	−0,15
1,2	$0{,}889_3$	0,746	−1,16
1,3	$0{,}954_7$	0,516	−3,29
1,4	$0{,}989_6$	0,194	−2,64
1,5	$0{,}999_3$	0,030	−0,78
1,6	$1{,}001_2$	−0,003	−0,16
1,8	$0{,}998_4$		
2,0	$0{,}997_0$		
2,2	$0{,}996_2$		
2,4	—		
2,6	$0{,}995_6$		

Tabelle 3.
Potential einer Einzellinse.
$r_A = 0{,}5$ mm, $\bar{r}_A = 2{,}0$ mm.
$r_I = 2{,}9$ mm, $\bar{r}_I = 4{,}2$ mm.

ζ	Φ/U	Φ'/U	Φ''/U
0	$0{,}253_9$	0	1,258
0,1	$0{,}260_2$	$0{,}124_9$	1,230
0,2	$0{,}278_5$	$0{,}244_4$	1,154
0,3	$0{,}308_7$	$0{,}354_4$	1,040
0,4	$0{,}349_0$	$0{,}452_9$	0,907
0,5	$0{,}398_2$	$0{,}535_6$	0,772
0,6	$0{,}455_8$	$0{,}606_6$	0,643
0,7	$0{,}519_5$	$0{,}664_8$	0,529
0,8	$0{,}588_5$	$0{,}712_5$	0,427
0,9	$0{,}661_7$	$0{,}750_3$	0,308
1,0	$0{,}738_1$	$0{,}776_9$	0,193
1,1	$0{,}816_5$	$0{,}783_9$	−0,119
1,2	$0{,}892_9$	$0{,}731_0$	−1,127
1,3	$0{,}957_0$	$0{,}513_0$	−3,262
1,4	$0{,}991_2$	$0{,}183_7$	−2,600
1,5	$1{,}000_3$	$0{,}027_5$	−0,754
1,6	$1{,}000_6$	$-0{,}011_8$	−0,141
1,8	$0{,}997_7$		
2,0	$0{,}996_0$		
2,2	$0{,}995_4$		
2,4	$0{,}995_4$		
2,6	$0{,}995_7$		

die Benutzung des empirischen Brennweitenwertes, gewährleistet, daß diese Eigenschaften richtig wiedergegeben werden. Das schließt aber nicht aus, daß die eine oder andere Einzelheit des Potentials falsch dargestellt wird. Beispielsweise treten auch in dem endgültigen Potential noch Werte auf, die größer sind als das gesamte Beschleunigungspotential [$\Phi/U > 1$]. Zahlenmäßig ist dieser Fehler allerdings so klein, daß er überhaupt nicht ins Gewicht fällt. Viel wichtiger ist es, ob das Potential in der Linsenmitte richtig ist, wo die Elektronen am langsamsten sind. Um dies nachzuprüfen, macht man die Mittelelektrode so weit negativ, bis die Linse keine Elektronen mehr durchläßt, d. h. bis der Linsenmittelpunkt den Potentialwert 0 (Kathodenpotential) hat. Aus den Werten der Tabellen 2 und 3 findet man das dazu nötige Potential U_s der Mittelelektrode nach der Formel

$$U_s = -U \frac{\Phi_{z=0}/U}{1 - \Phi_{z=0}/U}.$$

So ergibt sich für das Potential der Tabelle 3 der Wert $U_s = -0{,}34\ U$. Der experimentell ermittelte Wert ist $-0{,}31\ U$, wobei die Fehlergrenzen den theoretischen Wert einschließen.

Bestimmung der elektronenoptischen Kennwerte. Die Bahnen der in Achsennähe laufenden Elektronen werden aus der Gleichung

$$r'' + \frac{1}{2}\frac{\Phi'}{\Phi} r' + \frac{1}{4}\frac{\Phi''}{\Phi} r = 0 \qquad (14)$$

berechnet. Führt man die Hilfsveränderliche $R\,(z)$ mittels der Gleichung

$$r = \sqrt[4]{\frac{U}{\Phi}}\, R \qquad (15')$$

ein[1]), so erhält man aus (14) die neue Gleichung

$$R'' + \frac{3}{16}\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)^2 R = 0. \qquad (15'')$$

Die numerisch gewonnenen Lösungen von (15''), die den Anfangsbedingungen

$$R = 1,\ R' = 0 \text{ für } z = -\infty$$

genügen, sind in Tabellen 4 und 5 enthalten. Eine zweite unabhängige Lösung S ist

$$S\,(z) = R\,(-z). \qquad (16)$$

[1]) J. Picht, Ann. Phys. 15, 926, 1932.

Tabelle 4. Elektronenbahn des Potentials nach Tabelle 2.

ζ	R	$-R'$	ζ	R	$-R'$
$-1{,}6$	$1{,}000_0$	0	0	0,795	0,313
$-1{,}5$	$1{,}000_0$	0	$+0{,}1$	0,764	0,314
$-1{,}4$	$1{,}000_0$	$0{,}000_3$	$+0{,}2$	0,731	0,323
$-1{,}3$	$0{,}999_9$	$0{,}002_8$	$+0{,}3$	0,699	0,342
$-1{,}2$	$0{,}999_3$	$0{,}013_2$	$+0{,}4$	0,663	0,368
$-1{,}1$	$0{,}997_1$	$0{,}028_8$	$+0{,}5$	0,626	0,394
$-1{,}0$	$0{,}993_4$	$0{,}048_3$	$+0{,}6$	0,584	0,419
$-0{,}9$	0,987	$0{,}072_6$	$+0{,}7$	0,542	0,439
$-0{,}8$	0,978	$0{,}100_3$	$+0{,}8$	0,496	0,457
$-0{,}7$	0,968	0,132	$+0{,}9$	0,451	0,469
$-0{,}6$	0,952	0,168	$+1{,}0$	0,402	0,481
$-0{,}5$	0,935	0,206	$+1{,}1$	0,355	0,487
$-0{,}4$	0,911	0,243	$+1{,}2$	0,305	0,494
$-0{,}3$	0,886	0,276	$+1{,}3$	0,256	0,495
$-0{,}2$	0,856	0,301	$+1{,}4$	0,206	0,496
$-0{,}1$	0,827	0,311	$+1{,}5$	0,157	0,497
			$+1{,}6$	0,106	0,497

Tabelle 5. Elektronenbahn des Potentials nach Tabelle 3.

ζ	R	$-R'$	ζ	R	$-R'$
$-1{,}6$	$1{,}000_0$	$0{,}000_0$	0	$0{,}817_5$	0,268
$-1{,}5$	$1{,}000_0$	$0{,}000_0$	$+0{,}1$	$0{,}790_7$	0,269
$-1{,}4$	$1{,}000_0$	$0{,}000_3$	$+0{,}2$	$0{,}763_5$	0,276
$-1{,}3$	$0{,}999_9$	$0{,}002_7$	$+0{,}3$	$0{,}735_8$	0,291
$-1{,}2$	$0{,}999_2$	$0{,}011_8$	$+0{,}4$	$0{,}705_2$	0,311
$-1{,}1$	$0{,}997_3$	$0{,}027_0$	$+0{,}5$	$0{,}672_0$	0,334
$-1{,}0$	$0{,}993_7$	$0{,}045_9$	$+0{,}6$	$0{,}638_3$	0,356
$-0{,}9$	$0{,}988_0$	$0{,}068_2$	$+0{,}7$	$0{,}601_8$	0,376
$-0{,}8$	$0{,}980_0$	$0{,}093_5$	$+0{,}8$	$0{,}563_3$	0,393
$-0{,}7$	$0{,}969_2$	0,122	$+0{,}9$	$0{,}523_2$	0,407
$-0{,}6$	$0{,}955_5$	0,153	$+1{,}0$	$0{,}481_9$	0,418
$-0{,}5$	$0{,}938_6$	0,185	$+1{,}1$	$0{,}439_6$	0,427
$-0{,}4$	$0{,}918_6$	0,215	$+1{,}2$	$0{,}396_5$	0,433
$-0{,}3$	$0{,}895_7$	0,241	$+1{,}3$	$0{,}353_0$	0,437
$-0{,}2$	$0{,}870_6$	0,259	$+1{,}4$	$0{,}309_2$	0,438
$-0{,}1$	$0{,}844_3$	0,267	$+1{,}5$	$0{,}265_5$	0,438
			$+1{,}6$	$0{,}221_6$	0,438

Tabelle 6. Elektronenoptische Konstanten.

Potential nach Tabelle 2.		Potential nach Tabelle 3.	
$\lvert f\rvert$	6,05 mm	$\lvert f\rvert$	6.85 mm
$-z_f$	5,45	$-z_f$	6,32
C	61	C	83
C_f	—	C_f	69

Die Lage z_f der dingseitigen Brennpunkte und die Werte der Brennweiten $|f| = -\frac{1}{R'(z=+\infty)}$ sind in Tabelle 6 angegeben.

Bei der übermikroskopischen Abbildung setzt man das Ding praktisch in den dingseitigen Brennpunkt des Objektivs. Dabei kann man näherungsweise so rechnen, als ob das Ding genau im Brennpunkt und das Bild dementsprechend im Unendlichen sitze. Mit den schon früher eingeführten Bezeichnungen gilt für den Radius ϱ des Zerstreuungskreises in der Bildebene

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \alpha^3 \cdot \frac{V}{32} \cdot f^4 \int_{z_f}^{\infty} \sqrt{\frac{U}{\Phi}} \left\{ \left[\frac{5}{2} \left(\frac{d}{dz} \frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 + \frac{59}{48} \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^4 \right] S^4 - \right. \\ &\qquad \left. - 3 \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 S^2 S'^2 + \frac{25}{6} \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^3 S^3 S' \right\} dz \\ &= \alpha^3 \cdot V \cdot C. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Die numerisch ermittelten Werte von C sind ebenfalls in Tabelle 6 enthalten. Die Fehlergröße Δ in der bildseitigen Brennebene kann, da das Feld außerhalb der Blenden verschwindet, für hohe Vergrößerung in folgende Form gebracht werden:

$$\left.\begin{aligned} -\Delta &= \alpha^3 \cdot \frac{f^4}{32} \int_{z_f}^{\infty} \sqrt{\frac{U}{\Phi}} \left\{ \left[\frac{5}{2} \left(\frac{d}{dz} \frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 + \frac{59}{48} \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^4 \right] S^3 R - \right. \\ &\qquad \left. - 3 \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 S S'^2 R + \frac{25}{6} \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^3 S^2 S' R \right\} dz + \\ &\quad + \alpha^3 \cdot \frac{f^3}{32} \int_{z_f}^{\infty} \sqrt{\frac{U}{\Phi}} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 S S' - \frac{25}{24} \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^3 S^2 \right] dz + \alpha^3 \cdot \frac{3}{8} f \\ &= \alpha^3 \cdot C_f. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Auch der Koeffizient C_f ist in Tabelle 6 enthalten.

Von den beiden Linsen der Tabelle 6 hat die eine eine Brennweite (6,1 mm), wie sie üblicherweise in den Linsen des AEG-Übermikroskops benutzt wird. Die zweite Linse mit der größeren Brennweite 6,8 mm wird gelegentlich zu Versuchszwecken verwendet. Wie bereits ausführlich auseinandergesetzt wurde, wurden die Potentiale so gewählt, daß die experimentell ermittelten Brennweiten richtig herauskamen. Dagegen wurden die anderen elektronenoptischen Größen nicht benutzt, so daß diese als Maßstab für die Güte des berechneten Potentials dienen können. Dabei zeigt es sich, daß z. B. die Lage der Brennpunkte (Entfernung 5,5 mm von der Symmetrieebene bei der kleineren Linse) ausgezeichnet mit dem theoretisch ermittelten Wert übereinstimmt. Man wird daher den Aussagen der Rechnung auch für die Fehlerzahlen Vertrauen schenken.

Vergleicht man den theoretischen Wert von C_f mit dem gemessenen, so findet man, daß der gemessene deutlich größer ist (69 mm gegen 80 ± 10 mm). Tatsächlich bedeuten aber diese Zahlen keinen Unterschied. Die theoretischen Potentiale sollten ja die in den Übermikroskopen tatsächlich benutzten Linsen darstellen. Dagegen mußten zur experimentellen Untersuchung der Fehlerzahlen die Außenblenden der Linsen auf 1 mm Öffnung aufgebohrt werden. Wie nachträglich festgestellt wurde, bewirkt das eine deutliche Erhöhung der Brennweite. Sie ist z. B. bei der größeren Linse nicht 6,8 mm, sondern 7,0 bis 7,1 mm. Infolgedessen müssen die experimentellen Fehlerzahlen erniedrigt werden, um auf die gleichen Brennweiten wie bei den theoretischen Untersuchungen zu kommen. Dabei verschwindet der Unterschied zwischen den Fehlerzahlen der Tabelle 6 mit den experimentellen Werten.

Der Rechnung zufolge ist die Größe C_f etwas kleiner als die Größe C, beide sind aber von gleicher Größenordnung. Die Fehlerzahl C_f unterrichtet daher auch für die heutigen nicht als dünn anzusehenden elektrostatischen Übermikroskoplinsen hinreichend über den Absolutwert des Öffnungsfehlers und seinen Einfluß auf das Auflösungsvermögen. In der Einleitung wurde bereits hervorgehoben, warum die Größe C nur begrenzte Bedeutung haben kann. Hier sei insbesondere nochmals auf den Einfluß der Wellennatur der Elektronen auf das Bild hingewiesen. Wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, ist das besterreichbare Auflösungsvermögen proportional $\sqrt[4]{C}$. In dieser Formel könnte man natürlich ohne weiteres statt C die Größe C_f setzen und würde praktisch keine Änderung des Auflösungsvermögens finden.

Das Zusammenwirken von sphärischem Fehler und Beugung wurde bereits mehrfach untersucht. Am einfachsten ist die Übertragung der wellenoptischen Theorie der sphärischen Aberration in die Elektronenoptik. Damit bei der Wellenlänge λ der Abbildungsfehler nicht merklich wird, muß der Öffnungswinkel α der Bedingung

$$\alpha = \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{\lambda}{C}}$$

genügen[1]). Die im Mikroskop auflösbare Strecke δ ist aus der Helmholtz-Abbeschen Formel $\delta = 0{,}61\,\lambda/\alpha$ unter Benutzung dieses Winkels

[1]) J. Picht, Physik in regelm. Ber. 1, 78, 1933. — *Anmerkung bei der Korrektur.* Der Zahlenfaktor der obigen Formel hängt von verschiedenen nicht ohne weiteres zwangsläufigen Annahmen ab. W. Glaser erhält in einer inzwischen erschienenen Arbeit (ZS. f. Phys. 121, 647, 1942) statt des Faktors $\sqrt{2}$ den Wert 1,13.

zu berechnen. Mit dem Werte $C = 6$ bis 8 cm und 50 kV Elektronen ($\lambda = 5{,}3 \cdot 10^{-10}$ cm) ergibt sich ein Öffnungswinkel $\alpha \approx 4 \cdot 10^{-3}$. Das bedeutet bei einer Brennweite von 6 mm, daß die Aperturblende in der Brennebene einen Durchmesser von $^5/_{100}$ mm haben muß. Als auflösbare Strecke ergibt die Rechnung $\delta = 0{,}8$ mμ, während experimentell 8 mμ beobachtet wurden. Diese Zahlen zeigen die Möglichkeit zu bedeutenden Leistungssteigerungen der Mikroskope. Ähnliche Unterschiede zwischen errechnetem und erreichtem Auflösungsvermögen treten übrigens auch bei magnetischen Mikroskopen auf. Als Ursache für diesen Unterschied wird Störung der Rotationssymmetrie der elektromagnetischen Linsenfelder angesehen[1]).

[1]) W. Glaser, ZS. f. Phys. 120, 1, 1943.

Zur Anwendung des Gleichheitszeichens.

Von **R. W. Pohl** und **F. Stöckmann** in Göttingen.

(Eingegangen am 10. März 1944.)

Im Schrifttum werden oft zwei verschieden dimensionierte physikalische Größen auch dann durch ein Gleichheitszeichen (=) verknüpft, wenn man einen dimensionierten Proportionalitätsfaktor fortläßt. Das ist ein Mißbrauch des Gleichheitszeichens. Man muß in solchen Fällen das Gleichheitszeichen durch das „entspricht"-Zeichen (≙) ersetzen.

I. Gegeben eine beliebige Lösung eines Stoffes in einem anderen, z. B. von Kochsalz in Wasser. Dann kann man ihre Konzentration durch zwei *Meßverfahren* als abgeleitete Größe messen. Entweder als

$$\text{Massenkonzentration } c = \frac{\text{Masse des gelösten Stoffes}}{\text{Volumen der Lösung}},$$

z. B. für eine Kochsalzlösung

$$c = 29{,}3 \text{ gr/Liter} = 0{,}5 \text{ Mol/Liter usw.},$$

oder als

$$\text{Molekülkonzentration } N_v = \frac{\text{Zahl der gelösten Moleküle}}{\text{Volumen der Lösung}},$$

z. B. für die gleiche Kochsalzlösung

$$N_v = 3 \cdot 10^{23}/\text{Liter}.$$

Hat man die gleiche Konzentration nach beiden Verfahren sowohl als N_v wie als c gemessen, so erhält man als Verhältnis

$$\boxed{N_v/c = N.} \tag{1}$$

Dabei ist N die *spezifische Molekülzahl*, das Verhältnis Molekülzahl/Masse, mit dem empirischen Wert

$$N = 6 \cdot 10^{23}/\text{Mol} = 6 \cdot 10^{26}/\text{Kilomol usw.}$$

Zweifellos wird durch die beiden Meßverfahren und ihre Ergebnisse, nämlich die Größen c und N_v, die gleiche Konzentration gemessen. Trotzdem darf man die beiden verschieden dimensionierten Größen nie durch ein *Gleichheits*zeichen verbinden. Man darf in obigem Beispiel nicht schreiben

$$\text{Konzentration} = 3 \cdot 10^{23}/\text{Liter} = 29{,}3 \text{ gr/Liter}.$$

Das ist falsch. Richtig hingegen ist

$$3 \cdot 10^{23}/\text{Liter} = N \cdot 29{,}3 \text{ gr/Liter}$$

oder kürzer

$$3 \cdot 10^{23}/\text{Liter} \mathrel{\hat{=}} 29{,}3\ \text{gr/Liter}.$$

Dabei ist das Dachzeichen als „*entspricht*" zu lesen[1]) (DIN-Blatt 1302).

II. Ein Magnetfeld im Vakuum kann man durch zwei Meßverfahren als abgeleitete Größe messen. Entweder als

$$\text{Feldstärke } \mathfrak{H} = \frac{\text{Stromwindungszahl}}{\text{Länge}},$$

z. B. mit der in der Technik[2]) gebräuchlichen Einheit

$$79{,}6\ \text{Amp/meter} = 1\ \text{Oersted}$$

oder als

$$\text{Kraftflußdichte } \mathfrak{B} = \frac{\text{induzierter Spannungsstoß}}{\text{Windungsfläche der Induktionsspule}},$$

z. B. mit der ebenfalls in der Technik gebräuchlichen Einheit

$$10^{-4}\ \text{Voltsek/m}^2 = 1\ \text{Gauß}.$$

Hat man das gleiche Magnetfeld nach beiden Verfahren sowohl als $\mathfrak{B}$ wie als $\mathfrak{H}$ gemessen, so erhält man als Verhältnis

$$\boxed{\mathfrak{B}/\mathfrak{H} = \mu_0 .} \tag{2}$$

Dabei ist μ_0 die *Induktionskonstante* mit dem empirischen Wert

$$\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Voltsek}}{\text{Amp.meter}} = 1 \frac{\text{Gauß}}{\text{Oersted}}.$$

Zweifellos wird mit den beiden Meßverfahren und ihren Ergebnissen, nämlich den Größen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$, das *gleiche* Magnetfeld gemessen. Trotzdem darf man die beiden verschieden dimensionierten Größen nie durch ein *Gleichheits*zeichen verbinden. Man darf in obigem Beispiel nicht schreiben

$$10^{-4}\ \text{Voltsek/m}^2 = 79{,}6\ \text{Amp/meter},$$

$$1\ \text{Gauß} = 1\ \text{Oersted}.$$

---

[1]) Eisen hat die Dichte $\varrho = 7{,}8\ \text{gr/cm}^3$. Daher gilt für Eisen $1\ \text{cm}^3 \mathrel{\hat{=}} 7{,}8$ gr. — [2]) Die Unterscheidung von Gauß und Oersted hat überhaupt nur Sinn, wenn man, wie im internationalen Maßsystem, mindestens *eine* spezifische elektrische *Grund*größe einführt. — Definiert man, wie im absoluten elektromagnetischen Maßsystem, *sämtliche* elektrischen und magnetischen Größen als *abgeleitete* Größen, so sind abs. Gauss und abs. Oersted lediglich zwei verschiedene Namen für die *gleiche* Einheit $1\ \text{cm}^{-1/2}\,\text{gr}^{1/2}\,\text{sec}^{-1}$.

Wer sich nicht dazu entschließen kann, mindestens *eine* spezifische elektrische Grundgröße einzuführen, muß sich auch mit dem Übelstand abfinden, daß $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ im Vakuum gleiche Zahlenwerte und gleiche Dimensionen erhalten. Dieser Übelstand wird auch durch zwei verschiedene Namen für die gleiche Einheit (z. B. Kohlrausch, Praktische Physik, 18. Auflage, Band 1, S. 10) nicht aus der Welt geschafft.

Beides ist falsch. Richtig heißt es

$$10^{-4}\,\text{Voltsek/m}^2 = \mu_0 \cdot 79{,}6\,\text{Amp/meter},$$
$$1\,\text{Gauß} = \mu_0 \cdot 1\,\text{Oersted},$$

oder kürzer

$$10^{-4}\,\text{Voltsek/m}^2 \triangleq 79{,}6\,\text{Amp/meter},$$
$$1\,\text{Gauß} \triangleq 1\,\text{Oersted}.$$

III. Das Hauptkennzeichen der absoluten elektrischen Maßsysteme besteht darin, daß *sämtliche* elektrische und magnetische Begriffe quantitativ als *abgeleitete*[1]) Größen definiert werden, und zwar durch die Anwendung je zweier verschiedener *Meßverfahren* und daher mit je zwei verschiedenen Dimensionen. So mißt man eine gegebene *Ladung* entweder durch ein *elektrostatisches Meßverfahren* (also mit Kräften zwischen ruhenden Ladungen) und nennt sie elektrostatische Ladung Q_s mit der Einheit

$$1\,[\text{CGS}]_s = 1\,\text{cm}^{3/2}\,\text{gr}^{1/2}\,\text{sec}^{-1} \qquad (\alpha)$$

oder durch ein *elektromagnetisches Meßverfahren* (d. h. mit dem Magnetfeld bewegter Ladungen) und nennt sie elektromagnetische Ladung Q_m, mit der Einheit

$$1\,[\text{CGS}]_m = 1\,\text{cm}^{1/2}\,\text{gr}^{1/2}. \qquad (\beta)$$

Hat man die gleiche Ladung nach den beiden Verfahren sowohl als Q_s wie als Q_m gemessen, so erhält man als Verhältnis

$$\boxed{Q_s/Q_m = c.} \qquad (3)$$

Dabei ist c die *kritische Geschwindigkeit* mit dem empirischen Wert

$$c = 3 \cdot 10^{10}\,\text{cm/sec}.$$

So mißt man z. B. für die (allgemein e statt Q genannte) Elektronenladung

$$\frac{e_s}{e_m} = \frac{4{,}8 \cdot 10^{-10}\,\text{cm}^{3/2}\,\text{gr}^{1/2}\,\text{sec}^{-1}}{1{,}6 \cdot 10^{-20}\,\text{cm}^{1/2}\,\text{gr}^{1/2}} = 3 \cdot 10^{10}\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

[1]) Das ist der entscheidende Nachteil dieser Systeme, durch ihn entstehen die bekannten Absonderlichkeiten der Dimensionen (z. B. Ladung/Spannung = Länge). Sie verschwinden, sobald man wenigstens *eine* spezifisch elektrische *Grundgröße* einführt, z. B. Ladung oder Stromstärke. Dabei ist es nebensächlich, ob man die Einheit dieser Grundgröße elektrolytisch oder mit einer Kraftmessung *reproduziert*. In diesem Punkt muß man den meßtechnischen Zentralinstituten freie Hand lassen. Man darf nur nicht einem mit einer Kraftmessung definierten Ampere die Dimension $\text{cm}^{1/2}\,\text{gr}^{1/2}\,\text{sec}^{-1}$ geben, ebensowenig wie etwa einem elektrolytisch definierten Ampere die Dimension $\text{gr}\,\text{sec}^{-1}$.

Zweifellos wird durch die beiden Meßverfahren und ihre Ergebnisse, nämlich die Größen e_s und e_m, die *gleiche* Ladung gemessen. Trotzdem darf man die beiden Größen nie durch ein *Gleichheits*zeichen verbinden. Man darf *nicht* schreiben $e_s = e_m$, also nicht

$$4{,}8 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1} = 1{,}6 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}.$$

Denn das ergibt

$$3 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{sec}$$

und als Verhältnis der beiden Ladungs*einheiten*[1])

$$\frac{1\,[\mathrm{CGS}]_s}{1\,[\mathrm{CGS}]_m} = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}}.$$

Beides ist falsch. Es stimmen weder die Zahlenwerte noch die Dimensionen. In Wirklichkeit ist

$$\frac{1\,[\mathrm{CGS}]_s}{1\,[\mathrm{CGS}]_m} = 1\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}.$$

Das folgt aus einer einfachen Division der beiden obenstehenden Gleichungen (α) und (β).

Richtig muß es daher heißen

$$e_s = 4{,}8 \cdot 10^{-10}\,[\mathrm{CGS}]_s = c \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-20}\,[\mathrm{CGS}]_m$$

oder kürzer

$$4{,}8 \cdot 10^{-10}\,[\mathrm{CGS}]_s \mathrel{\hat{=}} 1{,}6 \cdot 10^{-20}\,[\mathrm{CGS}]_m.$$

In entsprechender Weise gilt für die *Einheiten* der *elektromagnetisch* gemessenen

Ladung Q_m: $1\,\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2} = 10$ abs. Coulomb,

Spannung U_m: $1\,\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-2} = 10^{-8}$ abs. Volt,

Kapazität C_m: $1\,\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{sec}^2 = 10^9$ abs. Farad

---

[1]) In Worten: Die elektromagnetische Ladungseinheit ist gleich dem $3 \cdot 10^{10}$-fachen der elektrostatischen. — Zu Gunsten dieser falschen Aussage beruft man sich oft auf folgende Tatsache: Ein Kondensator A enthalte die elektromagnetische Ladung $Q_m^A = 1\,[\mathrm{CGS}]_m$, ein zweiter Kondensator B die elektrostatische Ladung $Q_s^B = 1\,[\mathrm{CGS}]_s$. Dann ist das Verhältnis dieser beiden Ladungen gleich $3 \cdot 10^{10} : 1$, aber selbstverständlich nur dann, wenn man die Ladungen beider Kondensatoren in einer zwar beliebigen, aber für beide Kondensatoren *gleichen* Einheit mißt, z. B.

$$\frac{Q_m^A}{Q_m^B} = \frac{Q_s^A}{Q_s^B} = c \cdot \frac{1\,[\mathrm{CGS}]_m}{1\,[\mathrm{CGS}]_s} = c \cdot \frac{\mathrm{sec}}{\mathrm{cm}} = 3 \cdot 10^{10}.$$

Man kann dieser Zahl also nie eine Aussage über das Verhältnis zweier *verschiedener* Einheiten entnehmen.

und für die *Einheiten* der *elektrostatisch* gemessenen

Ladung Q_s: $1\ \mathrm{cm^{3/2}\,gr^{1/2}\,sec^{-1}} \begin{cases} = c \cdot 3{,}33 \cdot 10^{-10} \text{ abs Coulomb}, \\ \triangleq 3{,}33 \cdot 10^{-10} \text{ abs Coulomb}, \end{cases}$

Spannung U_s: $1\ \mathrm{cm^{1/2}\,gr^{1/2}\,sec^{-1}} \begin{cases} = c^{-1} \cdot 300 \text{ abs Volt}, \\ \triangleq 300 \text{ abs Volt}, \end{cases}$

Kapazität C_s: $1\ \mathrm{cm} \begin{cases} = c^2 \cdot 1{,}11 \cdot 10^{-12} \text{ abs Farad}, \\ \triangleq 1{,}11 \cdot 10^{-12} \text{ abs Farad}. \end{cases}$

Läßt man die dimensionierten Proportionalitätsfaktoren c, c^{-1} usw. fort, so entstehen weit verbreitete, aber trotzdem *falsche* Gleichungen[1]), wie etwa

1 elektrostatische Spannungseinheit $= 300$ abs Volt,

1 elektrostatische Kapazitätseinheit oder 1 cm $= 1{,}11 \cdot 10^{-12}$ abs Farad.

Die Anwendung solcher Gleichungen führt häufig zu Fehlern.

Beispiel. Berechnet man für einen flachen Plattenkondensator

$$C_s = 10^4 \text{ cm},$$

so mißt man mit einem ballistischen Galvanometer

$$C_m = 1{,}11 \cdot 10^{-8} \text{ abs Farad} = 1{,}11 \cdot 10^{-17}\ \mathrm{cm^{-1}\,sec^2}.$$

Das Verhältnis

$$\frac{C_s}{C_m} = \frac{10^4 \text{ cm}}{1{,}11 \cdot 10^{-17}\ \mathrm{cm^{-1}\,sec^2}} = 9 \cdot 10^{20}\ \frac{\mathrm{cm^2}}{\mathrm{sec^2}}.$$

ergibt korrekt das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit, bestehend aus Zahlenwert und Einheit.

Benutzt man aber die falsche Umrechnungsgleichung

$$1 \text{ cm} = 1{,}11 \cdot 10^{-12} \text{ abs Farad},$$

so erhält man

$$\frac{C_s}{C_m} = \frac{10^4 \text{ cm}}{1{,}11 \cdot 10^{-17}\ \mathrm{cm^{-1}\,sec^2}} = \frac{1{,}11 \cdot 10^{-8} \text{ Farad}}{1{,}11 \cdot 10^{-8} \text{ Farad}} = 1,$$

also

$$C_s = C_m, \quad \text{statt} \quad C_s = c^2 \cdot C_m.$$

Das unter I und II Gebrachte wird heute von allen Seiten anerkannt. Wir sehen daher keinen Grund, in den unter III erwähnten Fällen anders

[1]) Man wird sich auf altes Herkommen berufen. Aber in altem Herkommen ist manches falsch, wie etwa die Definition: „Die elektrische Feldstärke ist die auf die Einheitsladung wirkende *Kraft*." Die Feldstärke ist keine Kraft, sondern das Verhältnis einer Kraft zu einer Ladung. Sonst müßte man folgerichtig auch definieren: „Der elektrische Widerstand ist die *Spannung* zwischen den Enden eines vom Einheitsstrom durchflossenen Leiters." Selbstverständlich muß man jede Definition an Hand von Messungen erläutern. Dabei braucht man aber nicht in unverantwortlicher Weise physikalische *Größen* und ihre *Zahlenwerte* durcheinanderzuwerfen.

zu verfahren und halten es für überflüssig, noch weitere Beispiele anzuführen. Auf jeden Fall kann das Schrifttum von vielen Unklarheiten, Widersprüchen und zeitraubenden Erörterungen entlastet werden, wenn man den bisherigen Mißbrauch des Gleichheitszeichens aufgibt und statt dessen das in den DIN-Normen vorgesehene „entspricht"-Zeichen $\triangleq$ benutzt. Noch besser wäre es allerdings, wenn man in Zukunft auf das Fortlassen dimensionierter Proportionalitätsfaktoren verzichten und damit das ungewohnte $\triangleq$-Zeichen überflüssig machen würde.

Zusammenfassung.

1. Man darf aus dimensionsrichtigen Gleichungen dimensionierte Proportionalitätsfaktoren nicht wegstreichen und trotzdem das *Gleichheits*zeichen beibehalten.

2. Durch Verstöße gegen diese selbstverständliche Forderung entstehen weitverbreitete, aber *falsche* Gleichungen, wie z. B.

1 elektrostatische Spannungseinheit = 300 abs Volt,

oder *falsche* Aussagen wie etwa:

„Die elektromagnetische Ladungseinheit ist gleich dem $3 \cdot 10^{10}$-fachen der elektrostatischen."

Göttingen, Erstes Physikalisches Institut der Universität. Februar 1944.

Photometrische Bestimmung seltener Isotope.
Relative Isotopenhäufigkeiten und Atomgewicht von Nickel.

Von **H. Ewald** in Berlin-Dahlem.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Dezember 1943.)

Die kürzlich ausgearbeitete photometrische Methode der Eichelemente zur Ermittlung von relativen Isotopenhäufigkeiten ergab bei Bestimmung von Isotopen etwa gleicher Häufigkeit die gleiche Meßgenauigkeit wie sie bei elektrometrischer Messung erhalten wird. Bei Vergleich von häufigen und selteneren Isotopen war die erreichbare Genauigkeit geringer, weil der brauchbare Bereich der Schwärzungskurve begrenzt ist. Unter der Voraussetzung der Verwendung einer konstanten Ionenquelle wurde nun eine Erweiterung der Methode erprobt, die diese Schwierigkeit überwindet, ebenfalls ohne irgendeine Annahme über die Schwärzungsfunktion der Platte vorauszusetzen. Die Prüfung des Verfahrens geschah durch Bestimmung der Verhältnisse $^{128}Xe : {}^{124}Xe$ und $^{128}Xe : {}^{126}Xe$ mit Kr als Eichelement. Die Streuung (wahrscheinlicher Fehler) der Einzelergebnisse hatte nun die gleiche geringe Größe, wie sie bisher nur bei Linienverhältnissen etwa der Größe 1 erhalten wurde. Dies Verfahren wurde daraufhin bei der Bestimmung der relativen Häufigkeiten der Nickelisotope mit angewendet, für diese ergab sich:

Massenzahl	58	60	61	62	64
Prozentuale Häufigkeit ...	69,18	25,82	0,97	3,28	0,75
Wahrscheinlicher Fehler ..	1 %	2 %	3 %	2 %	4 %

und daraus das chemische Atomgewicht von Nickel $58{,}66_2 \pm 0{,}02_5$.

I. Die Meßmethode. Ein weitgehend voraussetzungsloses photometrisches Verfahren zur Bestimmung der relativen Häufigkeiten von Isotopen wurde kürzlich am Beispiel des Hafniums erprobt[1]) und anschließend auch auf Kupfer und Ruthenium angewandt[2]). Dabei wurde *zugleich* mit dem zu untersuchenden Element (kurz: Meßelement, Meßlinien) das Spektrum eines isotopenreichen, anderweitig gut bestimmten Eichelementes in etwa gleicher Intensität auf der Photoplatte erzeugt. Mittels dieses Eichelementes erhält man eine Art einfacher „Schwärzungskurve", aus der man graphisch die Relativzahlen der gesuchten Häufigkeiten unmittelbar entnehmen kann. Dieses Verfahren erfordert keine spezielle Annahme über die Schwärzungsfunktion der verwendeten Photoplatten wie etwa die Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes, und es gestattet im Gegensatz zu den bisherigen Verfahren auch die Verwendung von Ionenquellen geringerer Konstanz, besonders der sehr brauchbaren Dempsterschen Funkenröhre.

---

[1]) J. Mattauch u. H. Ewald, Naturwiss. **31**, 487, 1943; ZS. f. Phys. **122**, 314, 1944. — [2]) H. Ewald, ZS. f. Phys. **122**, 487, 1944.

Wie bei der Hafniumuntersuchung gezeigt werden konnte, ist bei Verwendung eines verläßlichen Eichelementes die gleiche Genauigkeit erreichbar wie bei direkter Bestimmung durch elektrometrische Messung der betreffenden Ionenströme. Dies gilt aber mit der Einschränkung, daß das zu bestimmende Linienverhältnis, d. i. der Quotient der Häufigkeiten zweier Meßlinien, nicht zu sehr von 1 verschieden ist[1]). Beim Hafnium konnten Linienverhältnisse zwischen den Werten 1 und 1,5 mit einer Genauigkeit (wahrscheinlicher Fehler) von 0,5 bis 1 % bestimmt werden. Für größere Linienverhältnisse war nur eine geringere Genauigkeit erreichbar. Der Grund ist darin zu suchen, daß der brauchbare Bereich jeder Schwärzungskurve ziemlich begrenzt ist. Die obere Grenze ist durch den Übergang der Kurve in das Sättigungsgebiet gegeben, wo große Intensitäts- bzw. Häufigkeitsunterschiede nur noch geringe Schwärzungsunterschiede hervorrufen. Auch nach unten ist der Verwendbarkeit der Schwärzungskurve eine praktische Grenze gezogen durch die Schwierigkeit der genauen Messung sehr kleiner Schwärzungen und Photometerausschläge, die durch das Vorhandensein der Plattenkornschwankungen der Photometerkurven noch verstärkt wird. Zwei Meßlinien sehr verschiedener Intensität kann man daher nicht gleichzeitig im optimalen Bereich der Schwärzungskurve erhalten und daher schwer miteinander vergleichen. Verhältnisse der Größenordnung 10 werden deshalb schon relativ unsicher bestimmt, und bei einer Größe 20 bis 30 sehen wir uns vor einer praktischen Grenze.

Da aber auch die Bestimmung von seltenen Isotopen vielfach wünschenswert ist, wurde hier eine Erweiterung unserer bisherigen Methode durchgeführt, die eine genaue Messung auch solch großer Linienverhältnisse gestattet. Wesentliche Voraussetzung ist dabei die Verwendung einer konstanten Ionenquelle, was gegenüber unserem bisherigen Verfahren eine gewisse Einschränkung bedeutet. Die Ionenstromintensitäten von Eichelement und Meßelement sollen sich zeitlich nicht wesentlich gegeneinander verschieben. Dann werden wir aus den Eichkurven der vier bis sechs verschiedenen Aufnahmen einer Platte, unabhängig von der Belichtungszeit und anderen Nebenbedingungen, für die Relativzahlen der Häufigkeiten der Linien des Meßelementes, abgesehen von einer einige Prozent betragenden Streuung.

[1]) Dazu ist zu bemerken, daß offenbar auch bei elektrometrischer Bestimmung die erreichbare Genauigkeit bei größeren Linienverhältnissen etwas abnimmt; denn die relativen Häufigkeiten der selteneren Isotope werden meist mit größerem prozentualen Fehler angegeben.

die gleichen Werte entnehmen. Es ist dann nicht mehr nötig, die relativen Häufigkeiten beider Linien eines zu bestimmenden extremen Linienverhältnisses aus der gleichen Aufnahme bzw. Eichkurve abzulesen. Wir können vielmehr aufeinanderfolgende Aufnahmen einer Platte abwechselnd kurz und lang belichten, so daß im ersteren Falle die Linie des häufigeren Isotopes, im zweiten Falle die des selteneren Isotopes im Bereich der optimalen Schwärzung erhalten wird. Aus der kurz belichteten Aufnahme erhalten wir so die Relativzahl der Häufigkeit des häufigeren Isotops, aus der lang belichteten die des selteneren Isotops. Der Quotient beider gibt dann das gesuchte Linienverhältnis.

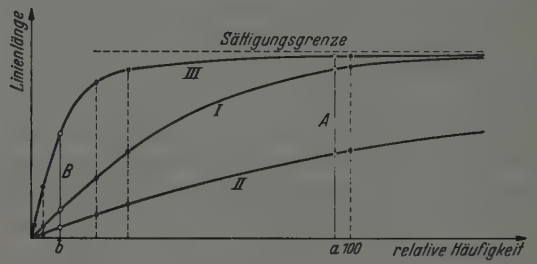


Fig. 1. Beispiel für das Aussehen der Eichkurven bei verschiedenen Belichtungszeiten.

Wichtig ist hier wieder die geeignete Auswahl und Intensitätsabstimmung des Eichelementes. Die stärkere Meßlinie darf nicht intensiver erscheinen als die häufigste Linie des Eichelementes. Die schwächere Meßlinie soll in einem Stück der Eichkurve liegen, das durch mehrere seltene Isotope des Eichelementes noch gut definiert ist. Zur Erhöhung der Ablesegenauigkeit muß man im letzteren Falle meist die Eichkurve in einem vergrößerten Abszissenmaßstab zeichnen. Die Edelgase Krypton und Xenon eignen sich besonders gut als Eichelemente, 1. weil die Zuverlässigkeit der von Nier gemessenen Häufigkeiten bei ihnen besonders gut sein dürfte, 2. weil sie als Gase in der konstant brennenden Gasentladungsröhre verwandt werden können und 3. weil sie neben häufigen Isotopen auch seltene aufzuweisen haben und damit ein gut definiertes unteres Ende der Eichkurve geben.

Die Fig. 1 zeigt, welches Aussehen die Eichkurve — hier im Beispiel Krypton als Eichelement, die Eichpunkte durch ausgefüllte Kreise und gestrichelte Ordinaten angedeutet — bei verschiedenen Belichtungszeiten etwa annehmen würde. Bei ideal konstanter Ionenquelle — konstanter Ionenstrom von Eich- und Meßelement — werden die in diese Kurven

einzutragenden Linienhöhen zweier Meßlinien A und B in jeder Kurve genau zu den gleichen Abszissenwerten a und b kommen (Meßlinien A und B im Beispiel durch offene Kreise und ausgezogene Ordinaten angedeutet).

Die Belichtungszeit der Kurve I würden wir etwa wählen müssen, wenn wir wie bisher beide Häufigkeitszahlen aus einer Aufnahme ablesen wollten. Wie aber schon eingangs betont, wird die Ablesegenauigkeit dann zu klein, weil der Photometerausschlag für die Linie A schon zu nahe an der Sättigungsgrenze der Photoplatte liegt und weil die Linie B zu klein zur genauen Messung ist. Die kürzere Belichtungszeit der Kurve II gibt zwar die Linie A im optimalen Schwärzungsbereich — Photometerlinienhöhe etwa die Hälfte des maximalen Ausschlages zwischen Sättigungsgrenze und ungeschwärzter Plattenstelle — und gestattet daher eine sehr genaue Bestimmung des Wertes a, andererseits ist hier die Linie B zu klein zur Messung. Bei der lang belichteten Kurve III hat dagegen B die optimale Schwärzung und gestattet bei Zeichnung des unteren Kurvenendes im geeigneten Maßstab die genaue Bestimmung des Wertes b. Die Linie A befindet sich bei der Kurve III schon weit im Sättigungsgebiet. Der Quotient der aus den beiden Kurven II und III gefundenen Werte a und b gibt das gesuchte Linienverhältnis.

Bei Verwendung einer konstanten Ionenquelle sollten die auf diese Weise erhaltenen Ergebnisse für Linienverhältnisse, die groß gegen 1 sind, keine größere prozentuale Streuung zeigen als solche von der Größenordnung 1, die aus einer einzigen Eichkurve bestimmt wurden. Der aus n Einzelergebnissen berechnete wahrscheinliche Fehler des Einzelergebnisses dient uns in jedem Falle als Maß der Streuung.

Zur Prüfung dieser Annahme wurden mit Krypton als Eichelement die Linienverhältnisse $^{128}Xe : {}^{124}Xe$ und $^{128}Xe : {}^{126}Xe$ bestimmt, für die aus den Nierschen Angaben die Zahlenwerte $20{,}4 \pm 0{,}65$ und $21{,}6 \pm 0{,}68$ zu folgern sind. Die Aufnahmen wurden in der Weise hergestellt, daß aus drei verschiedenen Glaskolben mit Fülldrucken von 20 bis 40 mm Hg Krypton, Xenon und Sauerstoff als Trägergas durch drei Nadelventile in geeignetem Verhältnis in die Gasentladungsröhre eingeführt wurden. Ein Trägergas mußte angewandt werden, weil sich sonst untragbar kurze Belichtungszeiten ergeben hätten. Die Aufnahmen wurden erst nach stundenlangem konstanten Brennen der Entladungsröhre gemacht. Die Belichtungszeiten aufeinanderfolgender Aufnahmen, die selbst nicht in die Messungen eingehen, müssen etwa im umgekehrten

Verhältnis der zu messenden Häufigkeiten stehen. Hier wurde dieses Verhältnis etwa 1 : 20 gewählt. Die Auswertung wurde so vorgenommen, daß jede lang belichtete Aufnahme mit den ein oder zwei benachbarten kurz belichteten Aufnahmen kombiniert wurde und umgekehrt. Vier brauchbare Aufnahmen auf einer Platte ergaben so beispielsweise drei Einzelergebnisse. Eine geringfügige Inkonstanz der Ionenquelle, wie z. B. eine kleine systematische Verschiebung der Ionenströme beider Elemente gegeneinander, wird bei dieser Art der Auswertung weitgehend herausgemittelt. Diese Inkonstanzen, die von einer Aufnahme zur übernächsten (etwa gleich belichteten) höchstens wenige Prozent betragen dürfen, wurden sorgfältig beachtet. Aufnahmen, bei denen größere relative Verschiebungen vorkamen, wurden ausgeschieden. Es zeigte sich, daß ein sehr sorgfältiges und langes Einbrennen der Entladungsröhre notwendig ist. Auch nach längerem konstanten Brennen der Röhre war die relative Intensität der Linien beider Elemente manchmal noch recht veränderlich. Auf 6 Platten wurden 19 brauchbare Einzelergebnisse erhalten. Daraus ergab sich

$$^{128}\mathrm{Xe} : {}^{124}\mathrm{Xe} = 21{,}8 \pm 0{,}28 \pm 1{,}3\,\%$$

$$^{128}\mathrm{Xe} : {}^{126}\mathrm{Xe} = 23{,}6 \pm 0{,}33 \pm 1{,}4\,\%$$

Im Vergleich zu einigen bei Hafnium, Kupfer und Ruthenium gemessenen Linienverhältnissen ergeben sich daraus die in der Tabelle 1 zusammengestellten wahrscheinlichen Fehler der Einzelergebnisse.

Tabelle 1.

Element	Linien	Linienverhältnis	n Einzelergebnisse	Wahrscheinlicher Fehler der Einzelmessung
Xe	128/124	21,8	19	5,6 %
Xe	128/126	23,6	19	6,1 %
Ru	99/100	1,009	19	6,4 %
Ru	104/101	1,076	19	4,5 %
Hf	180/178	1,296	55	4 %
Ru	101/99	1,325	19	6,6 %
Hf	177/179	1,334	64	4,2 %
Hf	178/177	1,467	50	2,9 %
Ru	102/104	1,716	18	5,8 %
Ru	100/96	2,235	19	9,2 %
Cu	63/65	2,330	42	8,9 %
Ru	96/98	2,554	19	10,0 %
Hf	179/176	2,614	57	15,6 %
Hf	176/174	29,7	23	21,0 %

Hieraus geht hervor, daß bei den früheren Messungen schon bei Linienverhältnissen, die größer als 2 sind, die Streuung der Einzelergebnisse merklich ansteigt. Die jetzigen Xenonmessungen haben dagegen mit einem wahrscheinlichen Fehler von etwa 6 % keine merklich größere Streuung als die früheren Messungen an den Linienverhältnissen der Größenordnung 1. Damit ist die Brauchbarkeit des neuen Verfahrens erwiesen.

Die Abweichung der beiden hier gefundenen Werte für die Xenon-Linienverhältnisse von den Nierschen Werten ist etwas größer, als nach den wahrscheinlichen Fehlern zu erwarten wäre. Es ist nicht ohne weiteres zu entscheiden, ob diese kleine Diskrepanz auf eine geringe Fehlerhaftigkeit der Nierschen Zahlen, entweder des Kryptons oder des Xenons, hindeutet oder ob bei den jetzigen Messungen sich ein kleiner systematischer Fehler eingeschlichen hat. Dieser könnte unter Umständen dadurch verursacht sein, daß wegen Luft-Verunreinigung des Trägergases Sauerstoff die Linie $^{80}Kr^{+}$ durch eine schwache Umladungslinie $2 \cdot {}^{40}A$ (Umladung $^{40}A^{++} \rightarrow {}^{40}A^{+}$) überlagert sein könnte, da nämlich auf den Aufnahmen die Linie $^{40}A^{+}$ relativ stark auftrat. Eine gleichbleibende Überlagerung dieser Art würde die beobachtete Abweichung erklären können.

Wahrscheinlicher ist aber die erste Möglichkeit, daß die relative Häufigkeit von ^{128}Xe von Nier etwas zu gering angegeben wurde, eine Vermutung, die schon in der Hafniumuntersuchung ausgesprochen wurde, weil dort die Xe-Eichkurven an der Stelle ^{128}Xe meist nicht ideal glatt erschienen[1]).

Fig. 2 zeigt als Beispiel die Vergrößerung der Krypton- und Xenongruppen von fünf Aufnahmen, wie sie auf einer Platte untereinander erhalten wurden.

Mit Hilfe dieser Aufnahmen wurde ferner der Versuch gemacht, die von uns verwendete Plattensorte „Schumann Hart" der Agfa[1]) bezüglich der Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes einer rohen Prüfung zu unterziehen. Die beiden Linienverhältnisse wurden dabei ohne Verwendung von Eichelement und Eichkurven nur aus den gemessenen Photometerlinienhöhen der Linien 128, 124 und 126 unter der vorläufigen Annahme der Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes bestimmt. Die hierfür erforderliche Intensitätsgleichheit der beiden zu vergleichenden Linien war aber in der Regel nicht genügend gegeben.

[1]) J. Mattauch u. H. Ewald, a. a. O.

Ebenso war die übliche Interpolation der richtigen Belichtungszeiten, bei denen Intensitätsgleichheit erreicht wird, mangels Aufnahmeserien mit abgestuften Belichtungszeiten nicht möglich. Daher wurde die vereinfachende und nur in roher Näherung gültige Annahme gemacht, daß die Schwärzungskurve, abgesehen von ihrem oberen Ende, durch eine durch den Nullpunkt gehende Gerade ersetzt werden kann. Dann muß das bei zwei benachbarten Aufnahmen angewandte Verhältnis der Belichtungszeiten t_2/t_1 mit dem Verhältnis x_1/x_2 der Photometer-

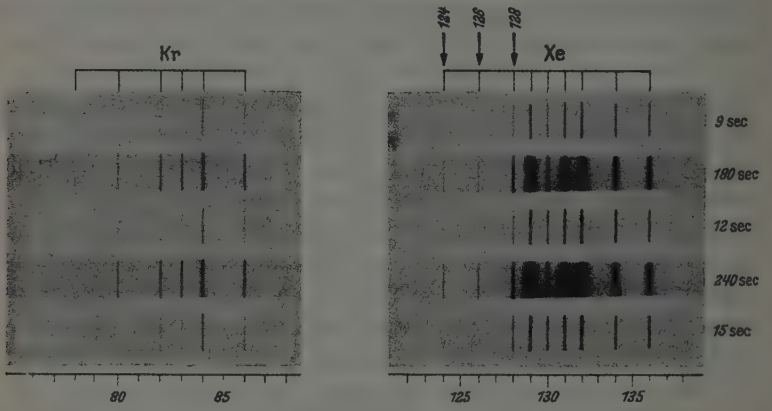


Fig. 2. Bestimmung der Linienverhältnisse $^{128}Xe : {}^{124}Xe$ und $^{128}Xe : {}^{126}Xe$ mit Krypton als Eichelement.

ausschläge für beide Linien multipliziert werden, um das gesuc Linienverhältnis zu erhalten. Auf diese Weise ergab sich

$$^{128}Xe : {}^{124}Xe = 20{,}9 \pm 0{,}5$$
$$^{128}Xe : {}^{124}Xe = 22{,}8 \pm 0{,}6$$

in überraschend guter Übereinstimmung mit den oben gefundenen wahren Werten, unter deren Verwendung sich hieraus ein Schwarzschild-Exponent von $1 \pm 0{,}02$ errechnet. Daraus darf man entnehmen, daß das Reziprozitätsgesetz für die Schumann Hart-Platten weitgehend erfüllt ist. Die Nichtgültigkeit des Reziprozitätsgesetzes für Ionenstrahlen wurde bisher nur bei den Q 1-Platten der Ilford von Lichtblau [1]) nachgewiesen.

II. Die relativen Häufigkeiten der Nickelisotope. Das erweiterte photometrische Verfahren wurde nun zur Überprüfung der relativen

[1]) H. Lichtblau, Phys. ZS. 41, 82, 1940; H. Lichtblau u. J. Mattauch, ZS. f. Phys. 117, 502, 1941.

Häufigkeiten der Nickelisotope angewendet. Hier liegen u. a. neuere Messungen von Straus[1]) und Valley[2]) vor, die beträchtlich voneinander abweichen. In den Isotopenberichten von 1941 und 1942[3]) wurde den Ergebnissen von Valley der Vorzug gegeben, hauptsächlich weil sie zu einem Wert des chemischen Atomgewichtes führen, der mit dem geltenden internationalen Wert in guter Übereinstimmung ist. Zu bedenken war dabei aber, daß die Zahlen von Straus mit einer verbesserten Meßmethode erhalten wurden. Er verwendete gleichzeitig zwei Auffänger und zwei Elektrometer und machte sich durch eine besondere Nullmethode frei von der Voraussetzung der Konstanz der Ionenquelle. Die folgenden Messungen haben jedoch die Ergebnisse von Valley als die richtigeren erwiesen.

Die Erzeugung der konstanten Nickelionenstrahlen in der Gasentladungsröhre wurde anfangs unter Verwendung des leicht verdampfbaren Nickelcarbonyls[4]) versucht. Krypton sollte als Vergleichselement genommen werden. Außerdem mußte wieder ein Trägergas verwendet werden, um zu genügend langen Belichtungszeiten — einige Sekunden bis Minuten — zu gelangen. Es wurde Stickstoff gewählt, da bei der Verwendung von Luft, wie schon erwähnt, die schwache Umladungslinie $^{40}A^{++} \rightarrow {}^{40}A^{+}$ bei der Massenzahl 80 die Linie ^{80}Kr stören kann. Die geeignete Mischung der drei Gase wurde durch drei feinregulierende Nadelventile[5]) erreicht. Es erwies sich aber aus nicht ganz geklärtem Grunde als sehr schwierig, einen genügend konstanten Ionenstrom zu erzeugen. Auch zeigten die Spektren außer den Nickellinien, wie auch zu erwarten, eine Reihe schwächerer Störlinien einiger Zwischenzerfallsprodukte des $Ni(CO)_4$ und zum Teil auch deren Umladungslinien. So überlagerte die Linie $^{58}NiCO$ die Linie ^{86}Kr. Es wurde daher dieser Weg wieder verlassen und die konstante Ionenerzeugung dadurch erreicht, daß Kathode und Backen des Strömungskanals aus Nickel hergestellt wurden, daß also die Ionenbildung durch Kathodenzerstäubung ermöglicht wurde[6]). Als Trägergas der Gas-

[1]) H. A. Straus, Phys. Rev. **59**, 102, 430, 1941. — [2]) G. E. Valley, ebenda **59**, 836, 1941. — [3]) S. Flügge u. J. Mattauch, Phys. ZS. **53**, 1, 1942; **44**, 181, 1943. — [4]) Für freundliche Übersendung eines reinen Präparats möchte ich der I. G. Farbenindustrie, Hauptlaboratorium, Ludwigshafen, meinen Dank aussprechen. — [5]) Für die Anregung zum Bau solcher Ventile, die im wesentlichen aus einer gut zentrierten und durch eine Bleiplatte gedrückten Näh- oder Stopfnadel bestehen, bin ich Herrn Prof. Menzer vom KWI. für Physik zu großem Dank verpflichtet. — [6]) Diese Methode hatte sich schon früher u. a. beim Mo gut bewährt; siehe J. Mattauch u. H. Lichtblau, ZS. f. phys. Chem. (B) **42**, 288, 1939.

entladung wurde wieder Stickstoff genommen, zur Erzeugung der Linien des Vergleichselementes Krypton in der geeigneten Intensität durch ein zweites Nadelventil aus einem weiteren Vorratskolben ein Stickstoff-Kryptongemisch vom Volumenverhältnis etwa 100 : 1 zugeführt. Jetzt gelang es ohne Schwierigkeiten, konstanten Ionenstrom zu erreichen, bei leichter Abstimmbarkeit der Intensitäten von Kr und Ni und Belichtungszeiten von höchstens 10 Minuten. Die damit erhaltenen Aufnahmen waren frei von Störlinien.

Die Linienverhältnisse $^{58}Ni : {}^{60}Ni$, $^{62}Ni : {}^{61}Ni$ und $^{61}Ni : {}^{64}Ni$, die von der Größenordnung 1 nicht allzu sehr abweichen, wurden nach dem bisherigen Verfahren ermittelt, so daß beide Linien eines Einzelergebnisses jeweils aus einer einzigen Aufnahme und entsprechend aus einer Eichkurve entnommen wurden. Das wesentlich größere Linienverhältnis $^{60}Ni : {}^{62}Ni$ wurde dagegen nach der neuen, eingangs beschriebenen und geprüften Methode erhalten. Die Tabelle 2 gibt die Resultate im Vergleich zu den Zahlen von Straus und Valley.

Tabelle 2.

	$^{58}Ni : {}^{60}Ni = L_2 \pm l_2$	$^{60}Ni : {}^{62}Ni = L_3 \pm l_3$	$^{62}Ni : {}^{61}Ni = L_4 \pm l_4$	$^{61}Ni : {}^{64}Ni = L_5 \pm l_5$
Straus	2,13 ± 0,09	6,33 ± 0,28	2,74 ± 0,12	1,34 ± 0,03
Valley	2,52	7,03	3,17	1,36
Ni (Kr)	2,68 ± 0,077	7,86 ± 0,077	3,38 ± 0,053	1,30 ± 0,036
Zahl der Einzelmessungen n	16	14	8	8
Wahrscheinliche Fehler der Einzelmessungen	11,5 %	3,7 %	4,5 %	7,8 %

Das nach dem neuen Verfahren gefundene Linienverhältnis $^{60}Ni : {}^{62}Ni$ hat, wie es sein soll und wie ein Vergleich mit den Werten der Tabelle 1 zeigt, eine recht geringe Streuung. Die Streuung der Einzelergebnisse des Linienverhältnisses $^{58}Ni : {}^{60}Ni$, das nach der alten Methode ermittelt wurde, ist dagegen erheblich größer. Die Aufnahmen zur Bestimmung dieses Verhältnisses wurden zuletzt gemacht. Dabei trat anfangs eine bisher nicht beobachtete Schwierigkeit auf, die Einzelergebnisse zeigten eine abnorm große Streuung, so daß kaum ein zuverlässig reproduzierbares Endergebnis zu erhalten war. Vermutlich wurde dies durch die aus irgendeinem Grunde geringere Güte der betreffenden Plattensendung bedingt, vielleicht durch eine bisher nicht aufgetretene Inhomogenität der Schicht. Denn bei den Platten einer neuen Sendung

wurde die Erscheinung nicht mehr beobachtet und daher die damit erhaltenen Ergebnisse als zuverlässig erachtet. Um sicher zu gehen, wurde dies aber mit dem Eichelement Zink nochmals geprüft und der Wert 2,71 ± 0,04 gefunden, fast in zu guter Übereinstimmung mit der oben gegebenen Zahl. Aus den mittels Krypton gefundenen Linienverhältnissen ergeben sich die prozentualen Häufigkeiten H_i^* der Nickelisotope, wieder im Vergleich zu Straus und Valley:

Tabelle 3.

Massenzahl	58	60	61	62	64
Straus	62,8	29,5	1,7	4,7	1,3
Valley	67,4	26,7	1,2	3,8	0,88
Ni (Kr)	69,18	25,82	0,97	3,28	0,75
Wahrscheinlicher Fehler.	1 %	2 %	3 %	2 %	4 %

Diese neuen Ergebnisse sind mit den Zahlen von Straus unvereinbar, mit Valley ergibt sich dagegen eine einigermaßen hinreichende Übereinstimmung.

Nach den Ausführungen in der Hafniumarbeit ergeben sich die prozentualen Häufigkeiten H_i^* aus den zuerst errechneten relativen Häufigkeiten H_i mittels der Beziehung

$$H_i^* = \frac{H_i}{C},$$

wobei $H_i = \frac{1}{L_1 L_2 \ldots L_i}$ (mit $L_1 \pm l_1 = 1 \pm 0$ willkürlich) und $C = \sum_1^n {}_i H_i$ ist.

Das mittlere Isotopengewicht errechnet sich dann zu

$$\overline{M} = \frac{\sum_1^n {}_i A_i (1 + P_i) H_i}{C} = \frac{\sum_i^n M_i H_i}{C},$$

wo A_i die Massenzahlen, M_i die Isotopengewichte und $P_i \pm p_i$ die zugehörigen Packungsanteile bedeuten. Es wurden die im Isotopenbericht 1942 angegebenen Packungsanteile der Nickelisotope[1]) verwendet.

[1]) T. Okuda, K. Ogata, H. Kuroda, S. Shima u. S. Shindo, Phys. Rev. 59, 104, 1941.

Der wahrscheinliche Fehler des mittleren Isotopengewichtes ist dann

$$\overline{m} = \sqrt{\sum_1^n \left(l_j \cdot \frac{\partial \overline{M}}{\partial L_j}\right)^2 + \sum_1^n \left(p_j \cdot \frac{\partial \overline{M}}{\partial P_j}\right)^2}$$

mit

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial L_j} = \frac{1}{C L_j} \sum^n H_i \cdot (\overline{M} - M_i)$$

und

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial P_j} = \frac{A_j H_j}{C}.$$

Es zeigt sich, daß die zweite Summe unter der Wurzel gegenüber der ersten zu vernachlässigen ist, daß der Fehler also fast ausschließlich durch die Fehler der Linienverhältnisse bedingt ist. Das Ergebnis ist:

$$\overline{M} = 58{,}678 \pm 0{,}015.$$

Unter Verwendung des Smytheschen Umrechnungsfaktors und unter Angabe einer gegenüber dem errechneten wahrscheinlichen Fehler in üblicher Weise vergrößerten Fehlergrenze finden wir damit das chemische Atomgewicht

$$58{,}66_2 \pm 0{,}02_5$$

in guter Übereinstimmung mit dem internationalen Wert 58,69 ± 0,01. Aus den Ergebnissen von Straus und Valley folgten dafür die Zahlen 58,84 bzw. 58,71 ± 0,02.

Über Ionisierung und Temperatur in Hochdruckbögen.

Von **P. Schulz** in Berlin und **W. Weizel** in Bonn.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 3. November 1943.)

Die in der Gasentladungsliteratur allgemein benutzte Saha-Gleichung muß durch Berücksichtigung der Zustandssummen erweitert werden. Für Quecksilber verdoppelt sich hierdurch der Ionisationsgrad bei den im Bogen vorkommenden Temperaturen. In früheren Arbeiten war für verschiedene Hg-Hochdruckbögen die Elektronendichte aus der Breite von Spektrallinien und hieraus mittels der Saha-Gleichung die Temperatur bestimmt worden. Die Temperaturwerte erfahren durch Verwendung der verbesserten Saha-Gleichung eine Korrektur. Sie macht etwa 500° bei Temperaturen von rund 8000° aus.

In der Theorie der Lichtbögen wird allgemein die Sahasche Gleichung

$$\frac{p x^2}{1 - x^2} = \frac{k T (2 \pi k T m)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{e V_i}{k T}} \tag{1}$$

verwandt, um den Ionisationsgrad x der Gasatome durch Druck und Temperatur auszudrücken[1]). Das Plasma wird als ein Gemisch von drei Gasen angesehen, dem Neutralgas, dem Ionengas und dem Elektronengas. Allen drei Gasen wird nur Translationsenergie zugeschrieben, von der Anregung der Atome wird ebenso abgesehen, wie von der der Ionen. Bei Molekülgasen wird Schwingung und Rotation vernachlässigt, und bei den Elektronen bleibt der Spin unberücksichtigt.

Es ist indessen nicht notwendig, sich solche Beschränkungen aufzuerlegen, denn schon vor längerer Zeit wurde eine Gleichung unter viel allgemeineren Voraussetzungen abgeleitet, und in der Astrophysik wird diese verbesserte Gleichung auch benutzt[2]).

Zu der allgemeineren Gleichung ohne Vernachlässigung kommt man leicht auf folgende Weise: Sind in das Volumen V im ganzen n Mole Neutralteilchen gegeben worden, so sind $n_i = xn$ Mole Ionen, $n_e = xn$ Mole Elektronen und $n_0 = (1 - x)\,n$ Mole Neutralteilchen bei einem Ionisierungsgrad x vorhanden. Sind p_0, p_i und p_e die Partialdrucke der beiden Teilchenarten und p der Gesamtdruck, so gilt

$$\left.\begin{aligned} &p_0 = \frac{(1-x)\,n\,R\,T}{V};\; p_e = p_i = \frac{x\,n\,R\,T}{V};\; p = p_0 + p_i + p_e = \frac{(1+x)\,n\,R\,T}{V}, \\ &p_0 = \frac{1-x}{1+x}\,p; \qquad p_e = p_i = \frac{x}{1+x}\,p. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

[1]) Vgl. A. v. Engel u. M. Steenbeck, Elektrische Gasentladungen. Berlin 1932; M. Knoll, F. Ollendorff u. R. Rompe, Gasentladungstabellen. Berlin 1935; W. Uyterhoeven, Elektrische Gasentladungslampen. Berlin 1938; R. Seeliger, Angewandte Atomphysik. Berlin 1938. — [2]) Vgl. A. Unsöld, Physik der Sternatmosphären. Berlin 1938.

Das thermische Gleichgewicht findet man, wenn man das thermodynamische Potential

$$G = U - TS + pV \tag{3}$$

bildet und verlangt, daß der Ionisationsgrad x sich so einstelle, daß G ein Minimum werde. Hieraus erhält man die Bedingung

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x} - T\frac{\partial S}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{4}$$

Die molare innere Energie einer Teilchenart setzt sich aus der Translationsenergie $3RT/2$ und der Energie u' der übrigen Freiheitsgrade zusammen. Die Elektronen besitzen nur Translationsenergie, doch behalten wir bei ihnen auch den Anteil u' aus Symmetriegründen bei. Die innere Energie des Gasgemisches ist dann:

$$\begin{aligned} U &= \tfrac{3}{2} RT\,(n_0 + n_i + n_e) + (n_0\,u_0' + n_i\,u_i' + n_e\,u_e') \\ &= \tfrac{3}{2}\,n\,RT\,(1+x) + n\,u_0' + n\,(u_i' + u_e' - u_0')\,x. \end{aligned} \tag{5}$$

Die molare Entropie

$$s_k = s_{tr} + s_k' \tag{6}$$

eines Gases unter dem Partialdruck p_k setzt sich aus dem Translationsanteil

$$s_{tr} = \frac{5R}{2} - R\ln\frac{p_k h^3}{kT\,(2\pi k T m_k)^{3/2}}$$

und einem Betrag s_k' zusammen, der mit den anderen Freiheitsgraden der Teilchen zusammenhängt. Die Entropie des Gemisches erhält man additiv aus den Anteilen der Einzelgase also

$$\begin{aligned} S &= n_i\,s_i + n_e\,s_e + n_0\,s_0 \\ &= n_i\,s_i' + n_0\,s_0' + n_e\,s_e' - R\,(n_i \ln p_i + n_e \ln p_e + n_0 \ln p_0) + \\ &\quad + R\,(n_i + n_e + n_0)\left(\tfrac{5}{2} - \ln\frac{h^3}{kT\,(2\pi k T)^{3/2}}\right) + \tfrac{3}{2} R\,n_e \ln m + \\ &\quad + \tfrac{3}{2} R\,(n_i + n_0)\ln M. \end{aligned} \tag{7}$$

M ist die Masse der Neutralteilchen bzw. Ionen, m die der Elektronen. Setzt man für die Molzahlen und Partialdrucke ihre Werte ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} S = n\Big\{ & s_0' + x\,(s_i' + s_e' - s_0') + R\,(1+x)\left(\tfrac{5}{2} - \ln\frac{h^3}{kT\,(2\pi k T)^{3/2}}\right) - \\ & - R\,(1+x)\ln p + R\,(1+x)\ln(1+x) - 2\,x\,R\ln x - \\ & - (1-x)\,R\ln(1-x) + \frac{3}{2}\,R\ln M + \frac{3}{2}\,R\,x\ln m\Big\}. \end{aligned} \tag{7a}$$

Jetzt können wir die Gleichung (4) bilden. Sie lautet:

$$0 = u_i' + u_e' - u_0' - T(s_i' + s_e' - s_0') + RT \ln \frac{h^3 p x^2}{kT(2\pi kTm)^{3/2}(1-x^2)}.$$

Von u_i' spalten wir zunächst die Ionisierungsarbeit NeV_i ab und bezeichnen den Rest u_i'' und erhalten die Gleichung

$$\ln \frac{h^3 p x^2}{(kT2\pi kTm)^{3/2}(1-x^2)} = \frac{T(s_i' + s_e' - s_0') - NeV_i - (u_i'' + u_e' - u_0')}{RT} \quad (8a)$$

(N Loschmidtsche Zahl).

Führen wir die Zustandssummen $\sigma_i, \sigma_e, \sigma_0$ ein, so hängen diese mit innerer Energie und Entropie durch

$$RT \ln \sigma = Ts' - u'$$

zusammen, und wir erhalten endlich die verbesserte Saha-Gleichung

$$\frac{p x^2}{1-x^2} = \frac{\sigma_i \sigma_e}{\sigma_0} \frac{kT(2\pi kTm)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{eV_i}{kT}}. \quad (9)$$

Die Zustandssummen sind jeweils das Produkt der Zustandssummen der einzelnen Freiheitsgrade Rotation, Schwingung, Elektronenanregung und Spin. Bei freien Elektronen kommt nur der Spin in Frage, und es ist $\sigma_e = 2$. Bei atomaren Gasen sind in σ_i und σ_0 nur Anregung und Spin zu berücksichtigen. Der Spin trägt bei Atomen oder Ionen im Singulettzustand den Faktor 1, im Dublettzustand den Faktor 2 usw. bei. Bei Quecksilber ist der Grundzustand des normalen Atoms ein Singuletterm und es ist

$$\sigma_0 = \sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}}, \quad (10a)$$

der Index n läuft über die Anregungszustände. Das Ion gehört dem Dublettsystem an und es ist also

$$\sigma_i = 2 \sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}}. \quad (10b)$$

Der Index i läuft über die Anregungszustände des Ions.

Bei Quecksilber erhalten wir also die Saha-Gleichung

$$\frac{p x^2}{1-x^2} = \frac{4 \sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}}}{\sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}}} \cdot \frac{kT(2\pi kTm)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{eV_i}{kT}}.$$

Bei mäßigen Temperaturen kann man angenähert

$$\sigma_0 = 1; \ \sigma_e = \sigma_i = 2$$

setzen, und zur gewöhnlichen Form (1) der Saha-Gleichung kommt einfach der Faktor 4 hinzu, da in den Summen (10a) und (10b) nur die Glieder mit $E_i = 0$ bzw. $E_k = 0$ etwas Wesentliches beitragen. Bei den im Hg-Hochdruckbogen vorkommenden Temperaturen kann x^2 gegen 1 vernachlässigt werden, und man erhält für denIonisierungsgrad:

$$x^2 = 4 \cdot 4{,}73 \cdot 10^3 \frac{1}{p} \left(\frac{kT}{e}\right)^{5/2} e^{-\frac{eV_i}{kT}} \qquad (11)$$

(p Druck in Atmosphären).

Im allgemeinen macht es nichts aus, ob man die alte oder die neue Form der Saha-Gleichung verwendet. Gewöhnlich will man nur das Verhältnis der Elektronendichte bei einer Temperaturerhöhung aus ihr gewinnen. Es ist dann:

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{-\frac{eV_i}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)}.$$

Für einige Fragen indessen ist die verbesserte Formel doch von Wichtigkeit.

Man findet häufig die Meinung angedeutet, daß der Ionisationsgrad sich dadurch erhöhe, daß auch angeregte Zustände vorhanden sind, von denen aus die Ionisierung nur einen Teil der Ionisationsenergie benötigt[1]). Von solchen „cumulativen Effekten" erwartet man also die experimentell festgestellte Erniedrigung der wirksamen Ionisierungsspannung, die in der Quecksilber-Hochdruckentladung z. B. um fast 1 Volt unter der gewöhnlichen Ionisierungsspannung liegt[2]). Dieser Wert muß in den Exponenten der Formel eingesetzt werden. Es wäre aber ein Irrtum zu glauben, daß dies die Folge der Besetzung der Anregungszustände wäre, welche sich nur in den Zustandssummen ausdrückt, nicht aber in V_i. Da die Anregungsstufen des Neutralatoms niedriger als die des Ions sind, ist $\sigma_0 > \sigma_i$, und durch die Besetzung der angeregten Zustände wird der Ionisationsgrad nicht erhöht, sondern erniedrigt.

Die Herabsetzung der Ionisierungsspannung hat also nichts mit den cumulativen Effekten zu tun. Sie ist vielmehr eine echte Herabsetzung durch die im Plasma wirkenden Mikrofelder[3]) und schon früher auf ein Ineinanderfließen der sehr dicht gelagerten oberen Terme infolge ihrer Verbreiterung, vornehmlich durch Elektronenstoß, zurückgeführt worden.

---

[1]) R. Mannkopff, ZS. f. Phys. **76**, 396, 1932. — [2]) R. Rompe u. P. Schulz, ebenda **110**, 223, 1938. — [3]) R. Rompe u. P. Schulz, l. c.; A. Unsöld, Ann. d. Phys. **33**, 607, 1938.

In einem anderen Fall ist der Faktor 4 von großer Bedeutung. Will man absolute Werte des Ionisierungsgrades aus der Temperatur oder umgekehrt absolute Werte der Temperatur aus der Kenntnis des Ionisierungsgrades bestimmen, so kommt es auf diesen Faktor an. Nun kann man aus der Verbreiterung gewisser Spektrallinien die Elektronendichte, damit den Ionisierungsgrad und hieraus mit Hilfe der Saha-Gleichung die Plasmatemperatur bestimmen[1]).

Wie früher gezeigt wurde, ist die Breite der $3D$-Terme im Quecksilber-Hochdruckbogen auf Elektronen- bzw. Ionenstoß, d. h. auf die Wechselwirkung der angeregten Atome mit den freien Elektronen oder Ionen während einer Nahpassage bei der thermischen Bewegung zurückzuführen. Für die Breite gilt[2])

$$\delta = 3{,}75 \cdot 10^{-10} \cdot T^{1/6} C^{2/5} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)^{1/6} N^* \text{ cm}^{-1}. \tag{12}$$

Darin bedeuten: T die absolute Temperatur, C die Konstante für den quadratischen Stark-Effekt, μ_1 das Atomgewicht des strahlenden Atoms, μ_2 dasjenige des Elektrons bzw. Ions, N^* die Anzahl der Elektronen bzw. Ionen im cm³. Für den Quecksilberbogen ergibt sich mit $C = 4{,}1 \cdot 10^{-14}$ für die $3D$-Terme und $\mu_1 = 200{,}6$, $\mu_2 = {}^1/_{1830}$ die Elektronenstoßbreite zu:

$$\delta = 1{,}56 \cdot 10^{-17} \cdot T^{1/6} N^* \text{ cm}^{-1} \tag{13}$$

bzw. mit $\mu_2 = 200{,}6$ die Ionenstoßbreite zu:

$$\delta = 2{,}06 \cdot 10^{-18} T^{1/6} N^* \text{ cm}^{-1}. \tag{14}$$

Ein Vergleich von Gl. (13) und (14) zeigt, daß die Ionenstoßbreite nur ${}^1/_{7{,}5}$ der Elektronenstoßbreite ausmacht.

Die Breite der $3D$-Terme erhält man aus der Breite der gelben Quecksilberlinien 5770/91 Å ($2\,{}^1P_1 - 3\,{}^3D_2$ bzw. $2\,{}^1P_1 - 3\,{}^1D_2$), wenn man hiervon die Breite des $2\,{}^1P_1$-Terms abzieht. Letztere ist, wie ebenfalls schon gezeigt wurde[3]), praktisch gleich der Breite der ultraroten Quecksilberlinie 10140 Å ($2\,{}^1P_1 - 2\,{}^1S_0$).

Aus der auf diese Art erhaltenen Breite der $3D$-Terme kann nach Gl. (13) die Elektronendichte berechnet werden, wobei dieser Wert wegen des Anteils der Ionenstoßverbreiterung nach Gl. (14) um ${}^1/_{7{,}5}$ verkleinert werden muß. In die Gleichungen geht noch die Temperatur ein. Da diese aber nur unter der 6. Wurzel erscheint, genügt zunächst ein ungefährer Wert.

---

[1]) P. Schulz, ZS. f. Phys. **114**, 435, 1939. — [2]) A. Unsöld, ZS. f. Astrophys. **12**, 56, 1936. — [3]) R. Rompe u. P. Schulz, ZS. f. Phys. **108**, 654, 1938.

Aus der Elektronendichte erhält man die Temperatur nach der Beziehung

$$N^* = x\,(pT) \cdot N,$$

wo für x nun die verbesserte Saha-Gleichung (11) zu benutzen ist (N Anzahl der Atome im cm³). Mit $N = 2{,}7 \cdot 10^{19} \cdot p \cdot \frac{273}{T}$ folgt hieraus:

$$N^* = 8{,}44 \cdot 10^{18}\, p^{1/2}\, T^{1/4}\, e^{-\frac{eV_i}{2kT}}. \qquad (15)$$

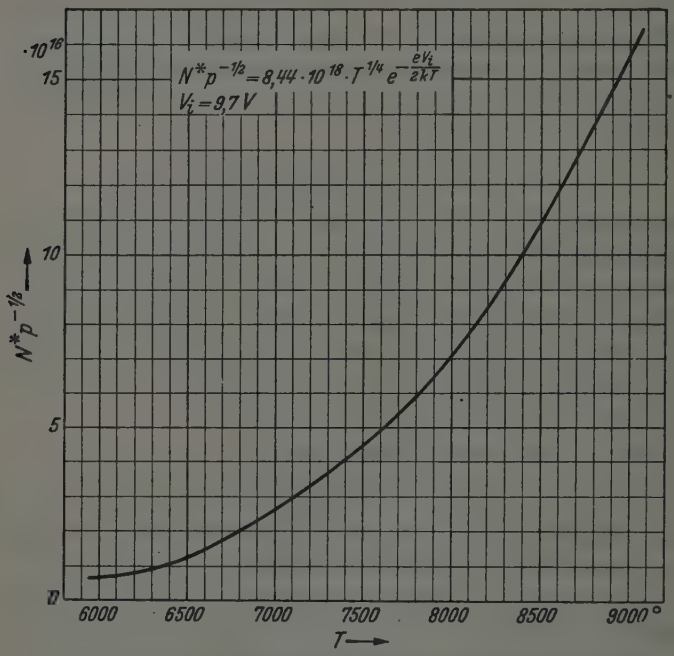


Fig. 1. Anzahl N^* der Elektronen im cm³ des Quecksilber-Hochdruckbogens in Abhängigkeit von der Temperatur.

Diese Beziehung unterscheidet sich gegenüber der früher verwendeten um den Faktor 2.

Die Temperatur kann nach (15) am einfachsten graphisch[1]) aus der Kurve

$$N^*\, p^{-1/2} = 8{,}44 \cdot 10^{18}\, T^{1/4}\, e^{-\frac{eV_i}{2kT}} \qquad (16)$$

erhalten werden. Fig. 1 gibt diesen Zusammenhang wieder. Für die Ionisierungsspannung ist dabei wegen der Verschmierung der oberen

[1]) P. Schulz, Abhandl. Osram **5**, 88, 1943.

Terme $V_i = 9{,}7$ V (an Stelle von $V_i = 10{,}4$ V für freie Quecksilberatome) angenommen worden. In früheren Arbeiten wurde meistens 9,5 V angesetzt. Da jedoch die Linie 2925 Å mit einer Anregungsspannung von etwa 9,6 V noch im Hochdruckbogen beobachtet werden kann, erscheint der Wert $V_i = 9{,}7$ V als der richtigere. Quantitativ macht diese Korrektur jedoch für die Temperaturbestimmung nur sehr wenig aus.

Schließlich kann mit dem jetzt erhaltenen Wert der Temperatur die Elektronendichte nach Gln. (13) und (14) neu berechnet werden. Diese Korrektur macht wegen $N^* \sim \frac{\delta}{T^{1/6}}$ nur wenig aus und ist bei einer abermaligen Bestimmung der Temperatur mit Hilfe der Gl. (16) bzw. Fig. 1 praktisch ohne Bedeutung.

Wir wollen nun die Temperaturen in verschiedenen Hg-Hochdruckbögen mittels der verbesserten Gl. (16) aus den Breitenmessungen berechnen. Bei einer Quecksilberhochdruckentladung von 35 at, 4,5 mm Bogenlänge und 80 Volt Brennspannung in einer kugelförmigen Entladungsröhre (Type HBO 501) wurden folgende Halbwertsbreiten der Linien gemessen:

10140 Å	$(2\,^1P_1 - 2\,^1S_0)$	: 32 cm^{-1}.
5770/91 Å	$(2\,^1P_1 - 3\,^3D_2;\ i = 1{,}3)$	: 54,2 cm^{-1},
Daraus ergibt sich die Breite der $3D$-Terme zu:		22,2 cm^{-1}.

Nach Gl. (13) folgt, wenn zunächst als ungefähre Bogentemperatur 6000° angesetzt wird:

$$N^* = 3{,}34 \cdot 10^{17}$$

oder unter Berücksichtigung des Ionenstoßanteils:

$$N^* = 2{,}9 \cdot 10^{17}.$$

Aus Gl. (16) bzw. Fig. 1 erhält man hieraus:

$$T = 7600^0.$$

Wird mit dieser Temperatur noch einmal N^* aus Gln. (13) und (14) berechnet, so ergibt sich

$$N^* = 2{,}7 \cdot 10^{17}$$

und daraus nach Gl. (16) bzw. Fig. 1

$$T = 7540^0,$$

also ein Wert, der mit dem zunächst ermittelten von 7600° innerhalb der Meßgenauigkeit fast übereinstimmt.

Mit Hilfe der nicht korrigierten Saha-Gleichung wurde die Temperatur zu 8140° bestimmt[1]). Trotz des Faktors 2, der in Gl. (16) gegenüber der damals benutzten auftritt, ist die Abweichung nicht sehr groß, da dieser nur logarithmisch eingeht. Ebenso hängt die Temperatur nur logarithmisch von der Elektronendichte ab, so daß kleine Fehler bei der Bestimmung von N^* sehr wenig ausmachen. Da andererseits die Elektronendichte aus der Breite der Spektrallinien recht genau zu ermitteln ist, dürfte unsere Methode der Temperaturbestimmung zu sehr genauen Werten führen.

Die Neuberechnung der Temperatur soll nun auch für einen Quecksilberbogen bei 80 at, 1,25 Amp., 21 mm Bogenlänge, 2 mm Bogenbreite und eine Brennspannung von 730 Volt durchgeführt werden. Es waren hier folgende Halbwertsbreiten gemessen worden:

10140 Å	$(2\,^1P_1 - 2\,^1S_0)$	: 74 cm^{-1},
5770/91 Å	$(2\,^1P_1 - 3\,^1D_2)$ $i = 1{,}2$	: 108 cm^{-1},
daraus Breite der 3 D-Terme		: 34 cm^{-1}.

Wird als erste Näherung für die Bogentemperatur 7000° angenommen, so folgt aus Gl. (13) unter Berücksichtigung von Gl. (14)

$$N^* = 4{,}3 \cdot 10^{17}$$

und daraus nach Gl. (16) bzw. Fig. 1

$$T = 7600^0.$$

Eine Neuberechnung der Elektronendichte nach Gln. (13) und (14) und abermalige Temperaturbestimmung nach Gl. (16) und Fig. 1 führt zu demselben Wert. Zum Vergleich sei wieder der nach der nicht korrigierten Saha-Gleichung bestimmte Wert angegeben. Er ist $T = 8160^0$[1]).

Schließlich soll die Neuberechnung auch für den Bogen bei 4,5 at, 40 mm Bogenlänge und 140 V Spannung vorgenommen werden. Die gemessenen Breiten betragen:

10140 Å	$(2\,^1P_1 - 2\,^1S_0)$	: 9,2 cm^{-1},
5770/91 Å	$(2\,^1P_1 - 3\,^1D_2)$ $i = 1{,}2$	: 12,6 cm^{-1},
Breite der 3 D-Terme		: 3,4 cm^{-1}.

Daraus ergibt sich die Elektronendichte zu $N^* = 4{,}3 \cdot 10^{16}$ und die Temperatur zur $T = 6820^0$ gegenüber $T = 7260^0$ nach der nicht-korrigierten Saha-Gleichung[1]).

[1]) P. Schulz, l. c.

Zum Schluß sei noch kurz auf den Einfluß der Temperaturbestimmungen beim Vergleich zwischen Theorie und Experiment für die Eigendruckverbreiterung des $2\,^1P_1$-Terms eingegangen. Für die Eigendruckverbreiterung bei hohen Dichten ist theoretisch die Beziehung[1])

$$\delta = \frac{3}{2}\,\frac{e^2}{\pi^2 m c^2 \nu} f N \text{ cm}^{-1} \qquad (17)$$

abgeleitet worden (f Oszillatorenstärke für den Übergang in den Grundzustand, ν Wellenzahl dieses Überganges, N Anzahl der Atome im cm³).

Mit $f = 1{,}3$ und $\nu = \frac{1}{1850} \cdot 10^8$ für den $2\,^1P_1$-Term des Quecksilbers ergibt sich:

$$\delta = 1{,}02 \cdot 10^{-18} \cdot N \text{ cm}^{-1}. \qquad (17a)$$

Bei den Breitenmessungen war der Druck bekannt. Zur Bestimmung von N gemäß $N = 2{,}7 \cdot 10^{19} \cdot p\,\frac{273}{T}$ muß auch die Temperatur vorgegeben sein. Da diese aber nur linear in Gl. (17) eingeht, haben die verhältnismäßig geringen Temperaturkorrekturen keine große Bedeutung. Die neu berechnete Temperatur beträgt für die Entladung bei 35 at 7540°. Mit diesen Daten ergibt sich nach Gl. (17)

$$\delta = 35 \text{ cm}^{-1}.$$

Mit dem experimentellen Wert $\delta = 32 \text{ cm}^{-1}$ besteht im Rahmen der Genauigkeit der Theorie völlige Übereinstimmung.

Bei der Entladung von 80 at war T zu 7600° bestimmt worden. Aus Gl. (17) folgt damit:

$$\delta = 78 \text{ cm}^{-1}.$$

ebenfalls in guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert $\delta = 74 \text{ cm}^{-1}$. Für die Entladung bei 4,5 at entfällt ein Vergleich, da bei diesem geringen Druck Gl. (17) nicht mehr anwendbar ist.

Berlin, Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung.

Bonn, Institut für theoretische Physik.

---

[1]) W. Furssow u. A. Wlassow, J. of Phys. **1**, 335, 1939.

Große Barkhausen-Sprünge in tordierten, von Wechselstrom durchflossenen Drähten.

Von **K. M. Koch** in Wien.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 27. Dezember 1943.)

Schickt man durch einen tordierten Eisen- oder Nickeldraht einen Wechselstrom beliebiger Frequenz, während der Draht gleichzeitig einem allmählich anwachsenden magnetischen Längsfeld ausgesetzt wird, so erfolgt der Anstieg der longitudinalen Magnetisierung in großen Sprüngen, die mit der Wechselfrequenz synchron sind. Der Effekt läßt sich in Analogie mit dem Sixtus-Tonks-Effekt durch die Annahme erklären, daß die zirkuläre Magnetisierung infolge der Torsionsspannung die Keime für die longitudinale Magnetisierung liefert und daß ein großer Sprung der Magnetisierung jeweils die gesamten Keime verbraucht, so daß die Sprünge in der Frequenz der keimerzeugenden zirkulären Magnetisierung erfolgen müssen.

Vor einiger Zeit wurde über eine Erscheinung berichtet[1]), die in einem Stahldraht auftritt, wenn seine longitudinale Magnetisierung geändert wird, während er gleichzeitig Torsionsschwingungen konstanter Amplitude ausführt. Es erwies sich, daß die unregelmäßigen Barkhausen-Sprünge, die unter den gleichen Verhältnissen im ruhenden Draht auftreten, im schwingenden Draht ausblieben; an ihrer Stelle war ein Ton konstanter Höhe, anscheinend die Oktave der Torsionsschwingung, zu hören. Man muß dabei beachten, daß bei Schwingungen, die extrem von der Sinusform abweichen wie im vorliegenden Fall, die Tonhöhe nicht ganz leicht feststellbar ist. Im Kathodenstrahloszillographen war die Erscheinung recht schwierig zu beobachten, da die Schwingung zu unstabil war, um die Synchronisierung der Kippfrequenz aufrechterhalten zu können. Immerhin trat die Periodizität des Effektes klar und unzweideutig hervor. Auch so viel war zu erkennen, daß die Sprünge ziemlich gleich in ihrer Amplitude und um Wesentliches größer waren, als im ruhenden Draht. Es hatte also den Anschein, daß die periodische Torsionsspannung das Zustandekommen großer und mit ihrer Frequenz synchronisierter Barkhausen-Sprünge begünstigte. Die störende Inkonstanz der Torsionsschwingung (der Draht wurde elektromagnetisch mit seiner mechanischen Eigenfrequenz angetrieben) ist offenbar eine Folge der von Becker und Kornetzki[2])

[1]) K. M. Koch, Naturwiss. **31**, 233, 1943. — [2]) R. Becker u. M. Kornetzki, ZS. f. Phys. **88**, 634, 1934.

beobachteten Abhängigkeit der Dämpfung — und somit in engeren Grenzen auch der Eigenfrequenz — vom Magnetisierungszustand.

Auf Grund der Umkehrbarkeit der magnetomechanischen Effekte war zu erwarten, daß eine ähnliche Erscheinung auch dann zu beobachten sein werde, wenn man dem Draht eine konstante Torsion gibt und einen Wechselstrom gleichbleibender Amplitude durch ihn hindurch schickt. Diese Erwartung bestätigte sich voll und ganz, d. h. man beobachtete auch in diesem Fall eine Synchronisierung der Barkhausen-Sprünge mit der Frequenz des Wechselstroms und ebenso einen starken Anstieg in der Größe der Sprünge. Nun treten in einem tordierten, von Wechselstrom durchflossenen Draht auch ohne longitudinales Magnetfeld schon Barkhauseneffekt-ähnliche Erscheinungen auf, die von Kobayasi[1]), Procopiu[2]) und Giorgio Valle[3]) bereits untersucht worden sind. Procopiu hat überdies festgestellt, daß der von ihm als „zirkulärer Barkhausen-Effekt" bezeichnete Effekt durch ein longitudinales Magnetfeld beeinflußt wird. Es empfiehlt sich, diesen „zirkulären" Effekt zuerst etwas eingehender zu studieren, ehe wir auf die Beeinflussung des eigentlichen Barkhausen-Effekts (B. E.) durch den Wechselstrom eingehen, da nur so die anfangs etwas verwirrende Fülle der Erscheinungen übersehbar wird.

1. Der zirkuläre Barkhausen-Effekt (Z. B. E.). Wird durch einen tordierten Draht aus ferromagnetischem Material (am klarsten sind die Verhältnisse beim Nickel), ein Wechselstrom hindurchgeschickt, so zeigt sich, daß von einer bestimmten Grenzstromstärke I_G angefangen in jeder Halbperiode ein äußerst sprunghafter Wechsel der longitudinalen Magnetisierung auftritt. Nach Procopiu wäre I_G jene Stromstärke, bei der die an der Oberfläche des Drahtes auftretende zirkuläre Magnetfeldstärke gleich der Koerzitivkraft ist. Dies dürfte zutreffend sein, wenn man berücksichtigt, daß der Magnetisierungscyclus für ringförmige Magnetisierung unbekannt ist und auf jeden Fall eine starke Abhängigkeit von der Torsionsspannung aufweist. So wurde an einem Nickeldraht von 0,5 mm Durchmesser bei einer Torsion von 180° (Länge des Drahtes = 25 cm) $I_G = 2{,}0$ Amp. beobachtet, bei einer Torsion von 360° dagegen nur mehr 1,5 Amp. Bei Stahl lagen die Werte entsprechend höher, bei Weicheisen tiefer.

---

[1]) T. Kobayasi, Jap. J. Phys. **5**, I, 1928; **5**, III, 1929. — [2]) St. Procopiu, Ann. Scient. de l'Univers. de Jassy XXIII, 168, 1937; C. R. **204**, 673 u. 973, 1937. — [3]) Giorgio Valle, Atti della Reale Acc. delle Scienze di Torino LXVII, 1932.

Es muß aber gleich betont werden, daß das Einsetzen des Effekts keinesfalls sehr scharf erfolgt. Bei den Versuchen, über die hier berichtet wird, kam zum Nachweis der Magnetisierungsänderungen eine Versuchsanordnung zur Anwendung, die Fig. 1 schematisch zeigt. Der Draht war von einer Induktionsspule umgeben, die auf 4 cm Länge ungefähr 2000 Windungen zählte. Die in ihr induzierten Spannungen wurden über einen Vorverstärker mit etwa 100facher Spannungsverstärkung an einen Philips-Oszillographen GM 3152 mit eingebautem zweistufigen Verstärker geführt. Es zeigte sich schon bei kleinen Stromstärken eine Sinuslinie im Oszillogramm, die aber aller Wahrscheinlichkeit nach zur Hauptsache durch Asymmetrien des magnetischen Kraftflusses infolge von Inhomogenitäten des Drahtes bedingt ist. In dieser Linie erscheinen aber kleine Unstetigkeiten (Fig. 2) genau an den Stellen, an denen später die Zacken des Zirkuläreffekts auftreten. Diese Unstetigkeiten wachsen anfangs einigermaßen proportional der Stromstärke; sobald die Grenzstromstärke überschritten ist, bewirken die kleinsten Änderungen der Stromstärke ein ganz außergewöhnliches Wachstum der Zacken. Es ist also nicht auszuschließen, daß mit dem Überschreiten dieser Stromstärke ein zusätzlicher Mechanismus angenommen werden muß; daß z. B. die unterhalb I_G statistisch verteilten kleinen Magnetisierungssprünge oberhalb I_G zu großen Sprüngen gekoppelt werden.

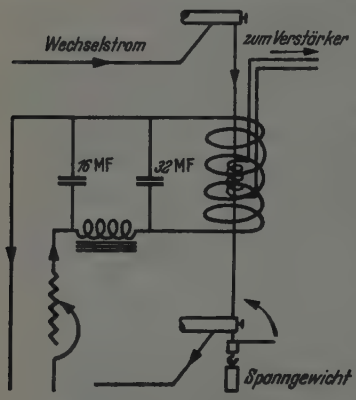


Fig. 1. Schematische Darstellung der Versuchsanordnung.

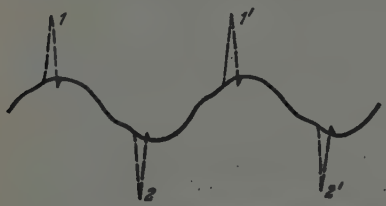


Fig. 2. $I < I_G$. Bei ansteigendem Längsfeld entstehen die B. Z. je nach der Feldrichtung an den Stellen 1, 1' oder 2, 2'.

Es ist weiter nicht ohne Interesse, daß die Form der erhaltenen Oszillogramme offenbar sehr stark durch die strukturellen Ungleichmäßigkeiten des Drahtes beeinflußt wird und daß man infolgedessen nie bei zwei Proben gleiche Kurvenformen erhält. Schließlich wurde der Effekt noch bei verschiedenen Frequenzen im Bereich von 20 bis

10000 Hertz untersucht. Es erwies sich, daß er im wesentlichen unverändert blieb und daß auch die Grenzstromstärke innerhalb des ganzen Intervalls ziemlich konstant blieb.

Die Erklärung dieses Effekts ist in großen Zügen bereits von Procopiu und Valle gegeben worden. Beim Wechsel der durch den Längsstrom bedingten zirkulären Magnetisierung springt deren Vektor in einer Anzahl von Weißschen Bezirken um 180°. Da aber die Längsrichtung des Drahtes auf jeden Fall eine Vorzugsrichtung der Magnetisierung ist, so bleibt ein Teil der Sprünge schon nach einer Drehung um 90°, also in der Längsrichtung liegen. Zunächst ist keine der beiden Längsrichtungen bevorzugt, so daß eine annähernd gleiche Zahl von Bereichen nach rechts bzw. nach links umklappt; nach außen ergibt sich somit keine Wirkung. Ist aber der Draht überdies tordiert, so wird die Vorzugsrichtung der Magnetisierung um einen Winkel φ aus der Drahtachse herausgedreht. In diesem Falle (Fig. 3) haben die aus der zur Drahtachse senkrechten Lage umklappenden Bereiche nach der einen Seite den Winkel $90 - \varphi$, nach der anderen Seite den größeren Winkel $90 + \varphi$ zurückzulegen; sie werden somit in jeder Halbphase nach derselben Seite umklappen. Es entsteht also in der einen Phase eine Magnetisierung von sagen wir links nach rechts, die in der zweiten Halbperiode durch Sprünge entgegengesetzten Vorzeichens wieder aufgehoben bzw. zum Umklappen um 180° gebracht wird. So erhalten wir für eine Vollperiode des Wechselstroms eine Kurve, wie sie Fig. 4 zeigt. Aus der vorstehenden Erklärung geht hervor, daß es sich eigentlich um einen Sekundäreffekt des zirkulären B. E. handelt, der seinerseits an drahtförmigen Proben nicht unmittelbar nachweisbar ist. Der Kürze wegen mag für diesen Effekt die Bezeichnung zirkulärer Barkhausen-Effekt beibehalten werden.

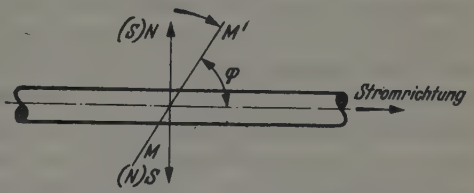


Fig. 3. NS (bzw. SN) ist der wechselnde Magnetisierungsvektor des Längsstromes, MM' die Richtung der leichtesten Magnetisierbarkeit, in die die Bereiche auf dem kürzesten Weg (Pfeil) umklappen.

Fig. 4. $I > I_G$. Bei dieser Probe wies die Kurve auch unterhalb von I_G eine größere Anzahl von Unstetigkeiten auf.

2. Der synchronisierte B. E. Zur Erzeugung einer longitudinalen Magnetisierung war der Draht, wie Fig. 1 zeigt, noch von einer Spule

umgeben, die so dimensioniert war, daß ein Strom von 100 mA ein Magnetfeld von 37 Ørsted lieferte. Der Magnetisierungsstrom wurde durch Schiebewiderstände geregelt; es erwies sich, daß die Zwischenschaltung einer aus großen Elektrolytblocks und einer NF-Drossel bestehenden Siebkette ausreichte, um selbst bei größter Verstärkung die beim Regulieren auftretenden Stromstöße auszugleichen. Bei Verwendung des Reinnickeldrahtes traten die Barkhausen-Sprünge in einem Feldstärkenintervall von 15 bis 37 Ørsted auf. Das Spektrum war typisch unregelmäßig, die größten Zacken ungefähr 10 mm lang. Durchfloß während der Änderung des Longitudinalfeldes ein Wechselstrom den (überdies tordierten) Draht, so beobachtete man schon bei kleinen Stromstärken ein Zusammenrücken der B. Z. auf ein ziemlich begrenztes Intervall der Wechselstromperiode, wobei die Amplitude stark anstieg. Mit wachsender Stärke des Längsstroms vereinigten sich die kleinen B. Z. zu isolierten, großen und scharf begrenzten Zacken, die gerade dort auftreten, wo sich der Zirkulareffekt ankündigt, natürlich dem Vorzeichen des Magnetfeldes entsprechend, immer nur nach der einen Richtung. Wir erhalten somit in jeder Vollperiode des Wechselstroms immer nur eine B. Z., und zwar an der Stelle, wo der Zirkulareffekt die gleiche Richtung hätte (vgl. Fig. 2). Es zeigt sich ferner, daß mit wachsender Stromstärke der Wert der magnetischen Feldstärke, bei dem die B. Z. erstmalig einsetzen, merklich abnimmt; knapp unterhalb I_G treten kleine B. Z. schon von den kleinsten Feldstärken an auf. Es hat den Anschein, als ob hier sich derselbe Faktor äußern würde, der uns beim zirkulären Effekt die kleinen Unstetigkeiten unterhalb und die großen Zacken oberhalb I_G unterscheiden läßt, nur daß hier die Abgrenzung der beiden Stufen des Effekts noch unschärfer ist als dort. Die Größe der Zacken oberhalb der Grenze läßt darauf schließen, daß hier ganz große makroskopische Bereiche ihre Magnetisierung ändern, während unterhalb nur kleine und voneinander isolierte Bezirke umklappen.

Die Form des Effekts hängt offenbar auch sehr stark von der Geschwindigkeit ab, mit der das Magnetfeld ansteigt. Einwandfreie Feststellungen werden hier erst dann möglich sein, wenn die Regelung des Magnetisierungsstroms automatisch mit regelbarer Geschwindigkeit erfolgt.

Bemerkenswert sind die Erscheinungen, die auftreten, sobald L_G überschritten ist. Dann besteht die erste Wirkung des eingeschalteten Längsfeldes darin, daß es den Zirkulareffekt zum Verschwinden bringt. Diese Beobachtung hat schon Procopiu gemacht; sie ist noch in einigen Einzelheiten zu ergänzen. Zunächst ist die Stärke des Längsfeldes, das die Zacken des Zirkulareffekts zum Verschwinden bringt,

vom Betrag der Überschreitung der Grenzstromstärke (also von $I - I_G$) abhängig. Nach dem Verschwinden der großen Zacken bleiben die kleinen Ausbuchtungen der Sinuskurve, wie sie unterhalb von I_G beobachtet wurden, bestehen, erst bei ganz hohen Feldstärkenwerten verschwinden auch sie. Beim Abschalten des Feldes bleibt der Zirkulareffekt infolge der remanenten Magnetisierung stark reduziert und erreicht erst beim Einschalten eines Gegenfeldes, sobald die Magnetisierung Null geworden ist, ein überaus steiles Maximum. Neben dieser Beeinflussung des Zirkulareffekts treten so wie früher die synchronisierten Zacken der longitudinalen Magnetisierung auf, nur werden die Dinge infolge des begrenzten Aussteuerungsbereiches des Oszillographen mit wachsender Stärke des Längsstroms immer schwerer beobachtbar.

3. Zur Deutung des Effekts. Die Deutung der im vorstehenden beschriebenen Synchronisierung der B. S. mit der Änderung der zirkulären Magnetisierung fällt nicht schwer, wenn man den Ablauf des normalen B. E. einmal im Lichte der Versuchsergebnisse von Sixtus und Tonks [1]) betrachtet. Bei diesen handelt es sich darum, daß die Magnetisierung eines Drahtes, die sonst bei der Umkehr der magnetischen Feldstärke oberhalb eines bestimmten Wertes derselben in einer unregelmäßigen Folge kleinerer und größerer Sprünge in die neue Richtung umklappt, zum Umklappen in einem einzigen großen Sprung gebracht werden kann, wenn man das Magnetfeld zuerst bis knapp an den kritischen Wert erhöht und dann ein Ende des Drahtes einem räumlich begrenzten Zusatzfeld gleicher Richtung, dem Startfeld, aussetzt. Becker [2]) hat diese Erscheinung mit Recht der Auslösung einer Umwandlung durch Keimbildung in Parallele gesetzt. Nun haben Sixtus und Tonks [3]) überdies gezeigt, daß ein über den ganzen Draht ausgedehntes zirkuläres Feld dieselbe Wirkung hat wie das longitudinale Startfeld. Ist der Draht überdies tordiert, so genügt schon ein kleinerer Längsstrom zur Auslösung des Sprungs. Man kann dies durch die Annahme erklären, daß die vom zirkulären Feld ausgelösten 90°-Sprünge, wie wir sie früher zur Erklärung des Z. B. E. angenommen haben, als Keime für das Umklappen der longitudinalen Magnetisierung dienen können. Bei den Versuchen von Sixtus und Tonks ist das Längsfeld konstant, während das zirkuläre Feld solange gesteigert wird, bis das Umklappen der Magnetisierung erfolgt. In unserem Falle wächst das longitudinale Feld, während das zirkuläre Feld periodisch wechselt. Denken wir uns das

[1]) Sixtus u. Tonks, Phys. Rev. **37**, 930, 1931; **42**, 419, 1932. — [2]) R. Becker u. W. Döring, Ferromagnetismus, S. 184. Berlin, Springer, 1936. — [3]) Tonks u. Sixtus, Phys. Rev. **43**, 70, 1933.

zirkuläre Feld zuerst gleich Null, so müssen wir annehmen, daß in dem Draht eine größere Anzahl von Magnetisierungskeimen enthalten sind, die aber infolge ihrer verschieden großen Spannungsenergie nur nacheinander zur Wirkung gelangen und es bedingen, daß die Magnetisierung in kleinen, unregelmäßigen Stufen ansteigt. Das ist der Mechanismus des normalen B. E. Dabei ist eine gewisse Kopplung zwischen räumlich und energetisch benachbarten Bereichen nicht auszuschließen, so daß zwischendurch Sprünge von überdurchschnittlicher Amplitude auftreten. Jedenfalls ist die zeitliche Aufeinanderfolge der Sprünge von keinem nachweisbaren Gesetz beherrscht und bei jeder Wiederholung des Versuchs eine andere. Wenn wir nun zu Anfang durch ein zirkuläres Feld geeigneter Richtung einen ganz großen Sprung auslösen, so wird man sich vorstellen müssen, daß dabei alle verfügbaren Keime verbraucht werden. Demnach sind weitere Sprünge der Magnetisierung bei stetigem Anstieg von H erst dann möglich, wenn durch einen neuerlichen Impuls der zirkulären Magnetisierung neue Keime geliefert werden. Somit ist es klar, daß die Sprünge in der Frequenz des zirkulären Feldes erfolgen müssen, aber auch die Abhängigkeit von dH/dt ist verständlich, wenn auch vorläufig nicht zu erfassen. Es scheint für diese Auslegung zu sprechen, daß die B. Z. in den Oszillogrammen immer etwas nach den Zacken des zirkulären Effekts auftreten, und zwar um so mehr, je höher die Frequenz des Wechselstroms ist.

Es kann kaum einem Zweifel unterliegen, daß die im schwingenden Draht auftretenden Erscheinungen auf denselben Mechanismus zurückzuführen sind. Der Parallelismus wird noch klarer, wenn man sich überlegt, daß auch im ruhenden Draht, wenn er bei konstantem Längsfeld von einem Wechselstrom durchflossen wird, Torsionsschwingungen auftreten (Wiedemann-Effekt), die bei höheren Frequenzen sogar deutlich hörbar werden. Immerhin wird es sich empfehlen, die Effekte im schwingenden Draht noch einmal unter günstigeren Versuchsbedingungen zu untersuchen und dabei auch die Frage der Frequenzverdopplung klarzustellen.

4. Schlußbemerkungen. Es ist bisher unterlassen worden, über die Besonderheiten der in Drähten aus Eisen und Stahl auftretenden Erscheinungen zu berichten. Dazu ist zu sagen, daß der Grundcharakter derselben, also insbesondere das Auftreten der großen, mit der Frequenz des Wechselstroms synchronen Barkhausen-Sprünge, in allen untersuchten Proben der gleiche ist. Im Gegensatz zum Nickel zeigen Eisen und Stahl schon bei kleinen Stromstärken einen deutlichen, aber stetigen Wechsel der longitudinalen Magnetisierung, der von der Torsion abhängt

und durch ein Längsfeld gehemmt wird. Daß es sich hierbei um einen reellen Effekt und nicht um eine einfache Einstreuung durch Asymmetrien handelt, geht auch aus folgendem hervor. Steigert man die Stromstärke des Wechselstroms auf einen Wert oberhalb I_G und bringt den zirkulären B. E. durch ein longitudinales Magnetfeld zum Verschwinden, so ergibt sich ein labiles Zwischenstadium, in welchem die Kurve des Oszillogramms deutlich eine Sinuslinie von doppelter Frequenz zeigt. Wird in diesem Stadium die Feldstärke vorsichtig erhöht, so erhält man auch tatsächlich die doppelte Anzahl von B. Z. Bei weiterer Erhöhung der Feldstärke erscheint wieder eine Sinuslinie einfacher Frequenz. Ich möchte annehmen, daß dieser besondere Zustand durch eine Überschneidung der Hysteresiskurven für die zirkuläre und die longitudinale Magnetisierung zustande kommt und daß sich bei weiterer Verfolgung dieser Verhältnisse die Unzulänglichkeit des Bildes der Weißschen Bezirke, die sich jeweils in ein lokales Energieminimum einstellen, ergeben wird. Man wird dieses Bild durch Begriffe, die sich auf die Totalität des magnetischen Zustandes beziehen, ergänzen müssen, eine Entwicklung, die eigentlich schon durch die Beobachtungen von Sixtus und Tonks angebahnt worden ist. Sie weiter vorzutreiben, ist von einem universellen Interesse, das sich nicht auf das Problem des Ferromagnetismus beschränkt, da z. B. auch die Erscheinungen der Supraleitung uns vor ähnliche Fragen stellen.

Schließlich muß noch bemerkt werden, daß die vorliegende Untersuchung keinesfalls erschöpfend ist und ergänzt werden soll, sobald die Versuchsanordnung entsprechend verbessert worden ist. So war es z. B. sehr hinderlich, daß die Kurve des Wechselstroms nicht mitregistriert werden konnte; dadurch war die Feststellung der Phasenverhältnisse nicht möglich. Besonders die bei Eisen und Stahl auftretenden Überlagerungen zweier Effekte wären nur bei fortlaufender Registrierung erfaßbar. Beim Kathodenstrahloszillographen fällt ein Teil der sehr rasch ablaufenden Vorgänge gerade in die Rückkehrphase des Strahles.

Dem Vorstand des Instituts für wiss. und techn. Kinematographie an der T. H. in Wien, Herrn Hofrat Dr. P. v. Schrott, gebührt mein aufrichtiger Dank für die Einräumung eines Arbeitsplatzes und die Überlassung der Geräte sowie für fördernde Diskussion. Auch der Forschungsgesellschaft für Funk- und Tonfilmtechnik (Studiengesellschaft für angewandte Physik) habe ich für die materielle Ermöglichung dieser Untersuchungen zu danken.

Über das Zischen des Homogenkohlebogens*).

(Untersuchungen über Hochstromkohlebögen. VII.)

Von **H. Schluge** und **W. Finkelnburg** in Straßburg.

Mit 23 Abbildungen. (Eingegangen am 3. Juni 1943.)

Problemstellung. — Oszillographische Untersuchungen: Absolutwerte von Strom und Spannung, Strom- und Spannungsverlauf, Phasenbeziehung, Zusammenhang zwischen Ton und Spannung, Zusammenhang zwischen Leuchtdichteschwankung und Spannung, Messung des Absolutwertes der Leuchtdichteschwankung in Stilb. — Filmaufnahmen: Zeitlupenaufnahmen, durchlaufende Aufnahmen des ganzen Kraterbildes, durchlaufende Aufnahmen mit Schlitzblende vor dem Film. — Zischneigung und Zischeinsatz. — Die neue Vorstellung vom Mechanismus des Zischbogens.

1. Problemstellung.

Trotz der Auffälligkeit des Zischeffektes an überlasteten Homogenkohlen ist es bis jetzt nicht gelungen, eine befriedigende Theorie für den zischenden Lichtbogen aufzustellen[1–5]), obwohl durch die Arbeiten von Finkelnburg und Mitarbeitern die Vorgänge im hochbelasteten *Beck-Bogen* weitgehend geklärt werden konnten[6]). Wohl wurde im Laufe der Zeit eine Menge Material über den Zischbogen zusammengetragen, aber es handelt sich dabei meistens nur um qualitative Untersuchungen. Als Grundlage einer Theorie aber sind quantitative Messungen erforderlich. Auch die vorliegende Arbeit bringt keine Theorie des Zischens, jedenfalls nicht in dem Sinne, daß wir die Vorgänge im zischenden Lichtbogen als notwendige Folge bekannter physikalischer Gesetze darstellen könnten, sondern wir stellen uns die Aufgabe, die Vorgänge am überlasteten Homogenkohlebogen quantitativ zu beschreiben und die vielen Parameter, die die Erscheinungen am Lichtbogen so unübersichtlich machen, entweder konstant zu halten oder ihren Einfluß zahlenmäßig zu erfassen.

---

*) Die vorliegende Arbeit ist eine gekürzte Wiedergabe der Dissertation von H. Schluge (D 87).

[1]) E. Bräuer, Phys. ZS. **20**, 409, 1919. — [2]) W. Mathiesen, Untersuchungen über den elektrischen Lichtbogen. Leipzig 1921. — [3]) H. Schmick u. R. Seeliger, Phys. ZS. **29**, 168, 1928. — [4]) W. Weizel u. J. Faßbender, ZS. f. techn. Phys. **21**, 391, 1940. — [5]) W. Weizel u. J. Faßbender, ZS. f. Phys. **120**, 252, 1943. — [6]) W. Finkelnburg u. H. Schluge, ebenda **112**, 305; **113**, 562; **114**, 734; **116**, 214; **117**, 344; **119**, 206, 1939—1942, im folgenden mit I bis VI bezeichnet.

Die Schnelligkeit des Ablaufes der Zischvorgänge läßt vor allem zwei Meßmethoden als besonders geeignet erscheinen: erstens oszillographische Aufnahmen der elektrischen Vorgänge und aller anderen, die sich in elektrische verwandeln lassen, und zweitens Filmaufnahmen in der üblichen Art der Zeitlupenaufnahmen sowie in abgewandelten Arten, die eine kontinuierliche Beobachtung gestatten.

Ferner sollten statistische Messungen über die Zischneigung und den Zischeinsatz verschiedener Kohlesorten unternommen werden.

Alle Versuche wurden ausgeführt am freibrennenden Gleichstrom-Kohlelichtbogen mit einer Winkelbogenlampe ohne Stabilisierungs- oder Blasmagneten. Es wurden verkupferte Positivkohlen von 7 mm Durchmesser der folgenden vier Kohlesorten verwendet:

1. Type „534", bestehend aus technisch reinem Graphit.
2. Gamma S, bestehend aus reinem Koks.
3. Gamma X, bestehend aus einem Gemisch von Ruß und Koks.
4. Gamma V, bestehend aus reinem Ruß.

Die spezifischen Widerstände ohne Verkupferung betragen:

„534" 1700—2000 $\mu\Omega/cm^3$,
Gamma S 5000—5500 $\mu\Omega/cm^3$,
Gamma X 6000—6500 $\mu\Omega/cm^3$,
Gamma V 7500—8000 $\mu\Omega/cm^3$.

Als Negativkohle dienten 6 mm „Gamma D"-Kohlen. Alle Kohlen sind Fabrikate der Ringsdorff-Werke K.-G. Mehlem a. Rh.

2. *Oszillographische Untersuchungen.*

a) Experimentelles. Zur Verfügung stand ein AEG-Zweistrahl-Elektronenstrahl-Oszillograph. Da alle Vorgänge am Zischbogen so unregelmäßig verlaufen, daß das Kurvenbild trotz Synchronisiereinrichtung nicht zum Stehen gebracht werden kann, kann man durch visuelle Beobachtung keine quantitativen Messungen ausführen. Um nun die Vorgänge oszillographisch festhalten zu können, wurden Momentaufnahmen mit der „Hell-Dunkel-Steuerung" in Verbindung mit einem Kurzzeitschalter gemacht (Optik 1 : 1). Mit Hilfe eines Helmholtzschen Pendels wurde die zur Hell-Dunkel-Steuerung nötige Spannung von etwa 20 Volt an die Hell-Dunkel-Klemmen — d. h. an den Wehnelt-Zylinder — eines oder beider Strahlen gelegt. Die Zeit, während der das Pendel die Spannung an die Klemmen legt, wurde so groß gewählt, daß der hellgesteuerte Strahl gerade etwas weniger als einmal über den Leuchtschirm lief. Der Nachteil dieser Methode ist nur der, daß man

den Einsatzpunkt nicht an den linken Bildrand legen kann, wodurch der aufgenommene Kurvenzug eine Unterbrechung aufweist. Als Zeitmaßstab wurde die Schwingung eines Röhrensummers von 2880 Hz mit dem zweiten Strahl aufgenommen.

Die Absolutwerte von Strom und Spannung. Zur Bestimmung des jeweiligen Absolutwertes der Bogenspannung wurde diese direkt an die Ablenkplatten des Oszillographen gelegt, der dazu für einen Strahl einen besonderen Eingang hat. Die Aufnahmen erfolgten nun so, daß zunächst bei eingeschalteter Zeitablenkung, zur Aufnahme einer Nullinie, der Verschluß bei abgeschalteter Bogenspannung geöffnet wurde; man erhält dadurch einen geraden Strich ($U = 0$-Linie). Dann wurde die Netzspannung an die Kohlen gelegt und wieder belichtet, wodurch ein zweiter, dem ersten paralleler Strich aufgezeichnet wird; dadurch bekommt man eine Eichung der Spannungsempfindlichkeit der Strahlablenkung. Nun wurde der Bogen gezündet und die Bogenbrennspannung gleichzeitig mit der Eichfrequenz als Zeitmaßstab aufgenommen. Im allgemeinen genügt natürlich die Aufnahme der Nullinie und des Zischvorganges, da ja die Spannungsempfindlichkeit der Strahlablenkung konstant bleibt (vgl. dazu Fig. 2).

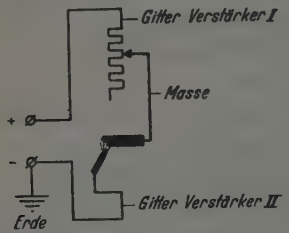


Fig. 1. Schaltskizze zur gleichzeitigen Aufnahme von Strom und Spannung. Strom und Spannung werden dadurch gegensinnig aufgezeichnet.

Zur Aufnahme der Absolutwerte der Stromstärke wurde in ähnlicher Weise vorgegangen.

Strom- und Spannungsverlauf, Phasenbeziehung. Während bei den vorigen Aufnahmen hauptsächlich der Absolutwert der Wechselspannungs- und der Wechselstromkomponente in Volt bzw. Ampere gemessen wurde, mußten zum Studium des genauen Spannungs- und Stromverlaufs und vor allem der Phasenbeziehung Strom und Spannung stark vergrößert — d. h. über die Verstärker — und gleichzeitig photographiert werden. Die beiden Pole der Netzspannung wurden dazu nach Fig. 1 so an die Gitter der beiden Verstärker gelegt, daß Verstärker I den Spannungsabfall über den Vorschaltwiderstand, d. h. eine dem Strom proportionale Größe, und Verstärker II die Spannung verstärkte Der Punkt zwischen dem Vorschaltwiderstand und dem Lichtbogen lag an Masse des Oszillographen, und da ein Pol

der Netzspannung geerdet ist, mußte die Erdung des Oszillographen aufgehoben werden.

Zur genaueren Festlegung der Phasenbeziehung zwischen Strom und Spannung wurden außerdem Lissajoussche Figuren aufgenommen. Der Strom wurde an das senkrecht ablenkende Plattenpaar gelegt, während die Spannung an die „Zeitplatten" gelegt wurde.

Zusammenhang zwischen Ton und Spannung. Zur Überprüfung der Phasenbeziehung zwischen Zischspannung und Zischgeräusch wurde ein Kristallmikrophon verwendet. Die Mikrophonspannung wurde dabei über einen Vorverstärker und den einen eingebauten Verstärker an den einen Strahl, an den anderen wieder die Bogenspannung gelegt. Das Mikrophon befand sich in einem Abstand von 15 cm seitlich vom Lichtbogen. Die durch die Schallgeschwindigkeit bedingte Verzögerung beträgt demnach etwa $4{,}5 \cdot 10^{-4}$ sec. Mit Hilfe der auf allen Aufnahmen mitphotographierten Eichfrequenz konnte diese Korrektur leicht vorgenommen werden. Lissajoussche Figuren zur Überprüfung der Phasenlage werden aber durch diese Verzögerung unmöglich.

Zusammenhang zwischen Leuchtdichteschwankung und Spannung. Schließlich sollten auch die Leuchtdichteschwankungen im Zusammenhang mit den Spannungsschwankungen untersucht werden. Da sich die Sperrschichtzelle als zu träge erwies[1]), wurde mit einer Vakuumphotozelle gearbeitet. Die Abbildung des Kraters wurde nun so gewählt, daß einmal die gesamte Kraterstrahlung in die Zelle fiel; das andere Mal war der Bilddurchmesser des Kraters etwa zehnmal so groß wie der Zellendurchmesser. Während also im ersten Fall eine mittlere Leuchtdichteschwankung gemessen wurde, erhält man im zweiten Fall die Leuchtdichteschwankung des einzelnen Flächenelementes.

Messung des Absolutwertes der Leuchtdichteschwankung in Stilb. Zur Messung des Absolutwertes der Leuchtdichteschwankung wurden die Ausschläge am Leuchtschirm des Oszillographen ausgemessen, und zwar wie stets in Abhängigkeit von der Stromstärke. Die Eichung erfolgte dadurch, daß die jeweilige Homogenkohle durch eine Reinkohle ersetzt wurde, deren Leuchtdichte bekannt ist (RW Mira 10 mm Durchmesser, 28 Amp. gleich 18000 Stilb). Dann wurde in den Strahlengang der Abbildung eine rasch rotierende Schlitzscheibe gebracht, wodurch Wechsellicht bekannter Amplitude entstand. Wenn

[1]) W. Finkelnburg u. H. Schluge, ZS. f. techn. Phys. **24**, 72, 1943.

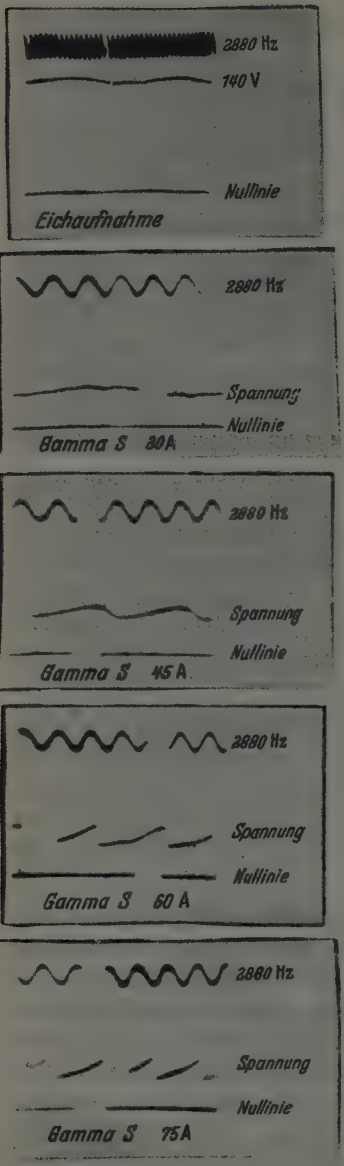


Fig. 2. Aufnahmenreihe zur Bestimmung des jeweiligen Momentanwertes der Bogenbrennspannung mit einer Eichaufnahme der Spannungsempfindlichkeit der Strahlablenkung.

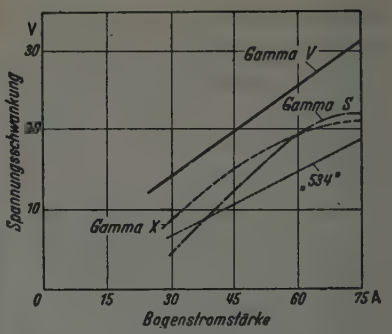


Fig. 3. Die Spannungsschwankungen in Abhängigkeit von der Bogenstromstärke. (Mittelbildung aus mehreren Meßreihen.)

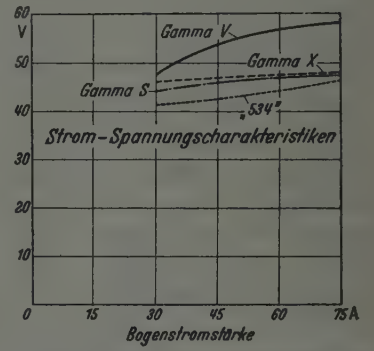


Fig. 4. Die den Oszillogrammen entnommene Gleichstromcharakteristik. (Mittelbildung aus mehreren Meßreihen.)

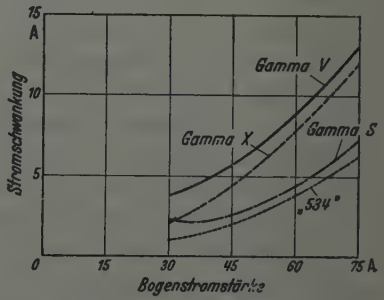


Fig. 5. Die Stromschwankungen in Abhängigkeit von der Bogenstromstärke. (Mittelbildung aus mehreren Meßreihen.)

wir aber Leuchtdichten von Lichtquellen so verschiedener spektraler Zusammensetzung wie auf der einen Seite die Mira, auf der anderen Seite die blaugrünen Dampfwolken des Zischbogens — denn diese sind es vor allem, die die Leuchtdichteschwankungen hervorrufen — miteinander vergleichen wollen, dann muß die Zelle eigentlich auf Augenempfindlichkeit abgestimmt werden, denn nur dann kann man — definitionsgemäß — Leuchtdichten mit ihr messen. Diese Voraussetzung war nun bei der Caesium-Kalium-Vakuumphotozelle keineswegs gegeben und daher sind die Ergebnisse, wie orientierende Versuche zeigten, mit einem Fehler von etwa $\pm$ 15% behaftet.

b) Ergebnisse der oszillographischen Aufnahmen. Wir untersuchen zunächst die Absolutwerte der Spannungsschwankungen. Die Fig. 2 zeigt als Beispiel eine hierfür aufgenommene Reihe von Oszillogrammen mit einer Eichaufnahme, auf der die Oberwelligkeit der Netzspannung von 100 Hz sichtbar ist.

Die aus diesen Oszillogrammen folgenden Ergebnisse sind in den Kurven der Fig. 3 zusammengestellt. Wie schon aus Fig. 2 zu ersehen ist, steigt die Spannungsamplitude mit wachsender Stromstärke deutlich an und erreicht bei der Gamma V bei 75 Amp. den erstaunlich hohen Wert von 30 Volt. Die über mehrere Aufnahmenreihen gemittelten Kurven für alle untersuchten Kohlen (Fig. 3) zeigen nun, daß diese Eigenschaft zwar allen Kohlen eigen ist, aber in verschiedenem Maße. Charakteristisch ist die Reihenfolge: Gamma V, Gamma X, Gamma S und „534"; wir werden diese Reihenfolge immer wieder finden, so z. B. auch bei den Gleichspannungscharakteristiken in Fig. 4, die als die linearen Mittelwerte der Spannungskurven ebenfalls aus den Oszillogrammen entnommen wurden. Die Auswertung der Oszillogramme in dieser zweiten Richtung hin wurden nur ausgeführt, um die Genauigkeit der Auswertung zu überprüfen, denn die Kurven der Fig. 4 können zumindest ebenso gut mit einem Drehspulinstrument erhalten werden (vgl. Arbeit I, S. 309 und 312).

In Fig. 5 ist die Stromschwankung in Abhängigkeit von der Bogenstromstärke aufgetragen. Die Reihenfolge der Kurven ist wieder die gleiche wie in den Fig. 3 und 4. Auch die Stromstärkeschwankungen erreichen den recht beachtlichen Wert von etwa 13 Amp.

Ferner wurde aus allen oszillographischen Aufnahmen, auch aus denen, die noch zu besprechen sind, mit Hilfe der Vergleichsfrequenz die Zischfrequenz bestimmt. Zur Mittelbildung standen für jede Kohlen-

sorte und jede der vier Stromstärken etwa 10 bis 15 Meßwerte zur Verfügung. Die sich aus diesen über 200 Oszillogrammen ergebende Ab-

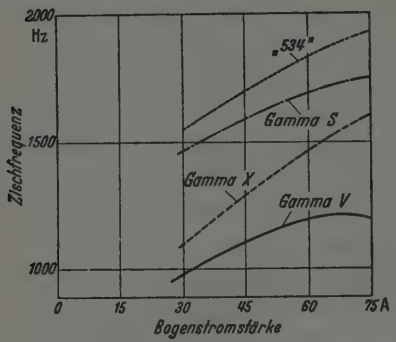


Fig. 6. Die Zischfrequenzen in Abhängigkeit von der Bogenstromstärke.

hängigkeit der Zischfrequenz von der Stromstärke ist für die vier untersuchten Kohlesorten in Fig. 6 wiedergegeben. Der mittlere Fehler beträgt dabei $\pm 10\%$, jedoch wurden besonders bei etwas ungleichmäßigem oder ruckartigem Vorschub Höchstfrequenzen bis zu 2500 Hz beobachtet. Die wesentliche Ursache dieses Effektes scheint aber in der damit verbundenen plötzlichen Stromstärkesteigerung zu liegen, da auch bei sehr gewissenhaftem Kohlennachschub bei rascher Stromstärkesteigerung der Zischton, der, wie wir später sehen werden, fest mit der elektrischen Zischfrequenz gekoppelt ist, deutlich hörbar hochgeht. Der aus Fig. 6 ersichtliche Frequenzgang mit der Stromstärke ist aber im Gegensatz zu dieser als dynamisch zu bezeichnenden Frequenzabhängigkeit als statisch anzusprechen, da diese Werte erst nach einigem Einbrennen aufgenommen wurden.

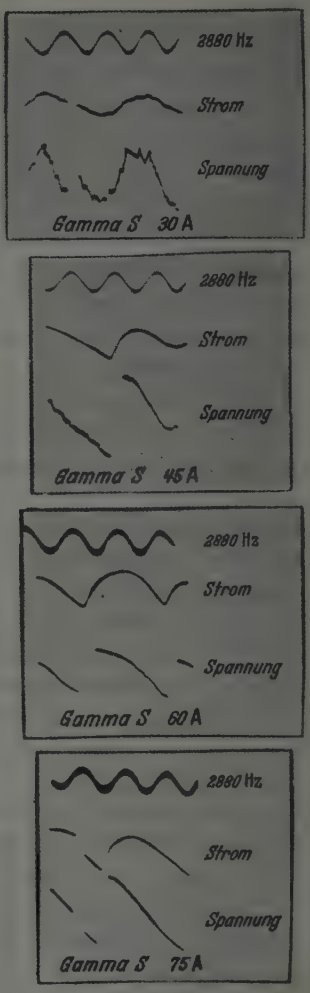


Fig. 7.
Aufnahmenreihe zur Bestimmung der Kurvenform und Phasenlage der Strom- und Spannungsschwankungen. (Spannung umgekehrt aufgezeichnet.)

Eine sehr große Anzahl von Aufnahmen war dem Studium der genauen Kurvenform und der Phasenlage zwischen Strom und Spannung gewidmet. Ganz allgemein kann gesagt werden, daß vom Eintritt des Zischens bis etwa 35 Amp. die Strom- und Spannungsschwankungen weitgehend unperiodisch verlaufen; dabei fällt aber stets ein Maximum der Spannung mit einem Minimum des Stromes zusammen. Die auffälligste Erscheinung bei diesen niedrigen Stromstärken ist die hochfrequente Oberwelligkeit insbesondere der Spannungskurven, die dadurch in einzelne Zacken oder Punkte aufgelöst erscheinen. Frequenz und Amplitude dieser Oberwellen sind verschieden und einander etwa umgekehrt proportional. Ihre Frequenz bewegt sich ungefähr zwischen 30000 und 80000 Hz, die Spannung zwischen 0,1 und 0,5 Volt. Auch die Stromstärke hat eine Oberwelligkeit gleicher Frequenz, jedoch sind die Amplituden sicherlich kleiner als 0,1 Amp., so daß sie auf den Oszillogrammen kaum noch wahrzunehmen sind.

Oberhalb etwa 35 Amp. kommen mit immer größerer Häufigkeit steile Spannungszusammenbrüche vor. Die Zeit, während der die Spannung zusammenbricht, nimmt mit wachsender Stromstärke von etwa 10^{-4} auf 10^{-5} sec ab. Die Kurve, längs der die Spannung wieder ansteigt, ist verschieden und auch von der Kohlensorte abhängig.

In der Fig. 7 ist eine Aufnahmereihe der Kokskohle Gamma S wiedergegeben. Zu allen Aufnahmen, bei denen Strom und Spannung gleichzeitig aufgenommen wurden, ist zu bemerken, daß infolge der spiegelnden Schaltung nach Fig. 1 die Spannung im Gegensatz zur Stromstärke verkehrt aufgezeichnet wird, d. h. also, daß jedes Maximum tatsächlich ein Minimum ist, und daß insbesondere die steilen Änderungen in den Kurven Spannungszusammenbrüche sind und nicht Anstiege. Die Kohlensorte Gamma S zeigt also, wie auch die „534“ und Gamma X, für die Spannung oberhalb 45 Amp. Sägezahnkurven und für die Stromstärke nach oben gewölbte Bogen. Die Rußkohle Gamma V dagegen zeigt wesentlich unregelmäßigere Kurvenzüge. Der charakteristische Spannungszusammenbruch wird bei dieser Kohle erst ab 60 Amp. zur Regel.

Zumindest für die Kohlen „534“, Gamma S und Gamma X lassen sich aber die in Fig. 8 gezeichneten schematischen Kurven angeben; die eingetragenen Zahlenwerte entsprechen ungefähr dem 75 Amp.-Bogen. Daß dieser Verlauf und insbesondere die Phasenbeziehung einigermaßen den Tatsachen entsprechen, geht aus der guten Übereinstimmung zwischen der in Fig. 9 konstruierten — der Pfeil gibt den

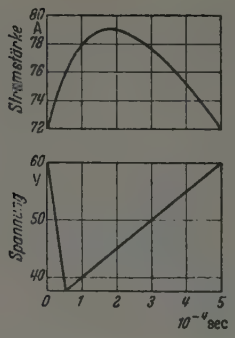


Fig. 8. Schematische Wiedergabe des Strom- und Spannungsverlaufes. Die Zahlenwerte entsprechen etwa dem 75-Amp.-

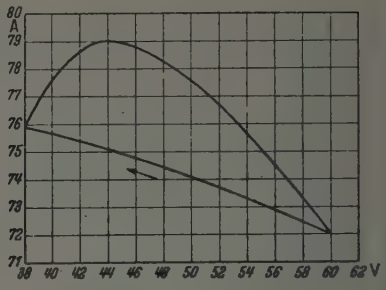


Fig. 9. Die aus Fig. 8 konstruierte Lissajoussche Figur.

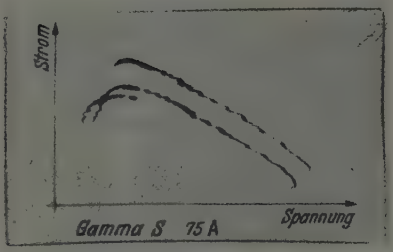


Fig. 10. Oszillographisch aufgenommene Lissajoussche Figur.

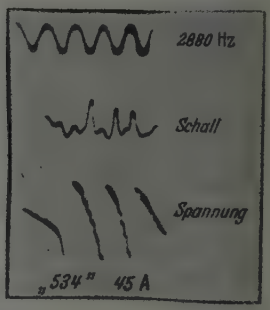


Fig. 11. Zusammenhang zwischen Zischton und Spannungsschwankung. Jedem Spannungszusammenbruch entspricht eine Druckwelle. (Spannung umgekehrt aufgezeichnet.)

Fig. 12. Zusammenhang zwischen den Schwankungen des Gesamtbogenlichtes und der Spannung. (Spannung umgekehrt aufgezeichnet.)

Fig. 13. Lage der Vakuumphotozelle im Lichtbogenbild.

Umlaufsinn an — und der in Fig. 10 photographierten Lissajousschen Figur hervor. Besonders schön ist in der Fig. 10 noch die hochfrequente Oberwelligkeit zu sehen.

Daß der Zischton und die elektrische Zischfrequenz in einem sehr engen Verhältnis stehen, war zu erwarten. Fig. 11 beweist dies an dem Beispiel der Graphitkohle „534" bei 45 Amp. Drei eng beieinanderliegende Spannungszusammenbrüche haben nach der auf S. 717 berechneten Verzögerung drei entsprechende Druckwellen zur Folge. Daß die Druckwellen noch etwas enger liegen als die Spannungszacken, liegt an der nichtlinearen Zeitablenkung, die auch an der Eichfrequenz sichtbar ist.

Die Aufnahmen der Leuchtdichteschwankungen brachten folgendes Ergebnis: Bei den Aufnahmen, bei denen das Kraterbild ebenso groß wie die Öffnung der Zelle war, erfolgte die Lichtschwankung im Rhythmus der Spannungsschwankung, und zwar so, daß bei jedem Zusammenbruch der Spannung die Leuchtdichte sehr steil anstieg, dann fast über die ganze Periode mit nur kleinen Schwankungen konstant blieb und am Ende wieder steil abfiel. Der Absolutwert der Schwankung betrug etwa 1000 bis 2000 Stilb. Dieser regelmäßige Zusammenhang stellte sich jedoch erst nach Ausbildung der Sägezahnkurve ein. Fig. 12 zeigt eine solche Aufnahme bei 60 Amp. Unterhalb 30 Amp. waren zwischen Licht und Spannung keine periodischen Zusammenhänge zu beobachten.

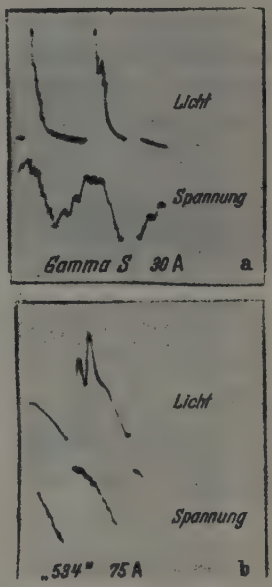


Fig. 14. Die Leuchtdichteschwankungen des in Fig. 14 gekennzeichneten Flächenelementes im Zusammenhang mit den Spannungsschwankungen; a) bei niedriger Stromstärke und b) bei hoher Stromstärke. (Spannung umgekehrt aufgezeichnet.)

Bei der anderen Abbildungsart, bei der die Fläche der Zelle nur $^1/_{100}$ der Kraterbildfläche betrug, befand sich die Zelle nach Fig. 13 im unteren Drittel des Kraterbildes. Fig. 14a gibt nun eine Aufnahme bei 30 Amp. wieder. Man sieht daraus, daß die Leuchtdichte an dieser Kraterstelle etwa im Minimum der Spannung — alle Aufnahmen der Spannung werden ja durch die Schaltung umgekehrt — plötzlich ansteigt,

um nach einigen kleinen, eng beieinanderliegenden Zacken wieder steil abzusinken. Bei hohen Stromstärken haben die Leuchtdichteschwankungen auch Sägezahncharakter, nur daß das Maximum in zwei Spitzen aufgelöst ist. Die erste Spitze liegt knapp hinter dem Minimum der Spannung; in Fig. 14b — Kohle „534", 75 Amp. — ist die Phasenbeziehung gut zu erkennen. Diese Tatsache wird für die spätere Deutung von Wichtigkeit sein. Der Absolutwert der Leuchtdichteschwankung betrug bei dieser Art der Abbildung mit steigender Stromstärke abnehmend 10000 bis 5000 Stilb, also ein Mehrfaches der Bruttoschwankung des gesamten Kraterlichtes.

3. Filmaufnahmen.

a) Versuchsaufbau. Zur weiteren Aufklärung des Zischvorganges wurde ein Filmgerät in methodisch verschiedener Weise eingesetzt. Im folgenden werden zunächst der Aufbau des Gerätes und seine verschiedenen Anwendungsarten beschrieben, während erst auf S. 727 die Ergebnisse zusammen diskutiert werden[1]).

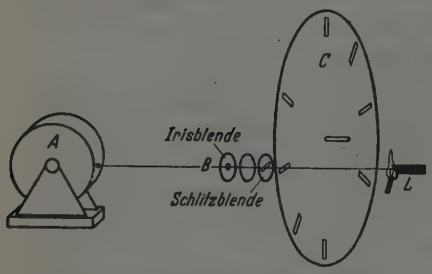


Fig. 15. Prinzipskizze des Filmgerätes.

In Fig. 15 ist die Prinzipskizze des Aufbaues des Filmgerätes wiedergegeben: Auf die Trommel A wird der Film gespannt; in B ist die Optik mit Spalt und Irisblende und der Verschluß; C stellt die Schlitzscheibe dar. Das Licht vom Lichtbogen L fällt also durch einen Schlitz der Schlitzscheibe in die Optik und erzeugt auf der Trommel ein Bild. Sowohl die Schlitzscheibe als auch die Filmtrommel werden von je einem Gleichstrommotor angetrieben, so daß die Drehzahlen getrennt variiert werden können. Der Verschluß in B muß nun so lange geöffnet werden, daß die Filmtrommel sich gerade etwas weniger als einmal herumdreht.

Drei Eigenschaften fordert man nun von einem Zeitlupengerät: Erstens hohe Bildzahl/sec, zweitens befriedigende Bildschärfe und

[1]) Herrn Prof. Dr. W. Weizel und Herrn Dr. J. Faßbender, Bonn, danken wir für den Gedankenaustausch und die Mitteilung der Erfahrungen, die sie mit ihrem Filmgerät gesammelt hatten.

drittens hohe Lichtstärke. Diese drei Forderungen widersprechen sich aber grundsätzlich und stellen uns vor die Wahl, entweder einen Kompromiß zu wählen, oder aber unter bewußtem Verzicht auf eine oder zwei Eigenschaften die dritte hochzuzüchten. Allerdings ist man dann gezwungen, den Apparat auch auf das andere Extremum umzubauen, um sich ein vollständiges Bild von dem Vorgang machen zu können. Der Weg der zwei Extrema wurde eingeschlagen. Bei der ersten Anordnung wurde vor allem auf gute Bildschärfe bei möglichst hoher Lichtstärke Wert gelegt. Es betrugen:

Bildzahl 800/sec,
Belichtungszeit ..... $1{,}3 \cdot 10^{-5}$ sec,
Bildunschärfe ..... 0,11 mm.

Infolge des zeitlichen Dreiecksverlaufes der einfallenden Lichtenergie ist die tatsächliche Unschärfe noch etwas kleiner, da die Belichtung mit kleiner Energie beginnt und aufhört, was die wirksame Belichtungszeit erheblich verkürzt. Die Lichtstärke war in dieser Anordnung so groß, daß die Aufnahmen durch ein Rotfilter noch gut durchexponiert waren.

Im zweiten Fall sollte eine möglichst hohe Bildzahl erreicht werden. Es betrugen:

Bildzahl 4000/sec,
Belichtungszeit ..... $3{,}8 \cdot 10^{-6}$ sec,
Bildunschärfe ..... 0,16 mm.

Während die erste Anordnung ein Maximum an Lichtstärke bei verhältnismäßig geringer Bildzahl brachte, stellte die zweite Anordnung das Maximum der Bildzahl dar, das mit unserem einfachen selbstgebauten Zeitlupengerät erreicht werden konnte, obwohl, wie die Besprechung der Ergebnisse zeigen wird, eine weitere Steigerung der Bildzahl wünschenswert gewesen wäre. Vor allem scheiterte eine weitere Steigerung der Bildzahl an den beängstigenden Flatterschwingungen, die die Schlitzscheibe bei 6000 Umdr./min ausführte, zum zweiten aber war die Lichtstärke der Optik zu klein, um bei einer weiteren Verkürzung der Belichtungszeit noch einigermaßen gut belichtete Bilder zu geben.

b) Durchlaufende Aufnahmen des ganzen Kraterbildes. Trotz der hohen Bildzahl von 4000 Bildern/sec war die Bildfolge zu langsam, um alle Phasen des Zischvorganges im einzelnen genau zu verfolgen.

Entfernt man nun die Schlitzscheibe vor dem Objektiv, so erhält man auf dem Filmstreifen keine Reihe von Einzelbildern mehr, sondern man erhält einen durchlaufenden Streifen von der Breite der Anode. Zweck dieser Aufnahmen war festzustellen, ob erstens gewisse Vorgänge an der Anode kontinuierlichen oder sprunghaften Änderungen unterworfen sind, und zweitens, ob diese Vorgänge prinzipiell hintereinander oder auch gleichzeitig an verschiedenen Punkten der Anode vor sich gehen können. Welche Vorbedingungen müssen dazu erfüllt sein, bzw. mit welcher Sicherheit können solche Feststellungen auf Grund dieser Aufnahmen gemacht werden?

Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir aus der Behandlung der Ergebnisse vorwegnehmen, daß es sich um einen Brennfleck handelt, der entweder kontinuierlich oder sprunghaft auf der Anodenstirnfläche wandert. Der Durchmesser dieses Brennflecks soll zunächst mit etwa 1 bis 2 mm angenommen werden. Diese Brennfleckwanderung werden wir nur dann verfolgen können, wenn die Helligkeit des Brennflecks so groß ist, daß er sich immer von dem kontinuierlichen Untergrund, der von der glühenden Anode herrührt, abhebt. Der Flächenhelligkeitsunterschied zwischen Brennfleck und übriger Anodenfläche muß dazu ganz erheblich sein, da das Bild des glühenden Kratergrundes etwa viermal so lange auf dem einzelnen Flächenelement des Filmes liegt als das des kleinen Brennflecks.

Erfolgt die Wanderung des Brennflecks sprunghaft, so ist dieses Ergebnis einfach feststellbar. Der Filmstreifen müßte dann einzelne gleichmäßig schwarze Striche zeigen, die zueinander parallel verschoben sind.

Der zweite wesentliche Punkt, der mit diesen Aufnahmen geklärt werden sollte, war die Frage, ob zwei oder mehrere Brennflecke nebeneinander bestehen können. Mit Sicherheit könnte diese Frage nur dann bejaht werden, wenn die Spuren der Brennflecke länger als einen Kohledurchmesser nebeneinander herliefen; denn es wäre ja schließlich möglich, daß der Brennfleck an dem Rande der Kohle, der in Richtung der Filmbewegung liegt, verlöscht und gleichzeitig an dem entgegengesetzten Rand ansetzt. In diesem Grenzfall liefen also zwei dunkle Brennfleckspuren eine ganze Kohlendicke nebeneinander, ohne daß zwei Brennflecke gleichzeitig gebrannt hätten.

c) Durchlaufende Aufnahmen mit Schlitzblende vor dem Film. Die im vorigen Kapitel beschriebenen Aufnahmen hatten vor allem zwei

Nachteile: Erstens die starke Überstrahlung durch den glühenden Kratergrund, wodurch alle Feinheiten verschwinden, und zweitens die große Unsicherheit bezüglich der Frage nach dem zeitlichen Nebeneinander oder Nacheinander.

Diesen beiden Mängeln kann man nun teilweise dadurch begegnen, daß man vor dem Film einen Spalt anbringt, der senkrecht zur Bewegungsrichtung des Films steht. Dieser Spalt, dessen Breite von 0,7 bis 4 mm variiert werden konnte, blendete aus dem Bild des Lichtbogens einen verhältnismäßig schmalen Streifen heraus. Damit war nun die Überstrahlung durch die große Anodenfläche beseitigt, und die Intensitätsverhältnisse wurden wieder weitgehend richtig wiedergegeben. Natürlich kann man nun nicht mehr erwarten, den Brennfleck dauernd beobachten zu können, sondern man muß hoffen, daß dieser während eines Umlaufes der Filmtrommel mindestens einmal über die Spaltblende läuft und dabei photographiert wird.

Zweitens war damit die Entscheidung über die Gleichzeitigkeit zweier Vorgänge nur noch mit der Unsicherheit einer Spaltbreite behaftet. Findet man also zwei helle Streifen nebeneinander, so ist dies ein hinreichender Beweis für die Gleichzeitigkeit zweier Brennflecke, wenn es auch keine notwendige Bedingung ist, d. h. das Fehlen dieser Erscheinung beweist noch nicht das Gegenteil, da sich der zweite Brennfleck auch außerhalb des Spaltes befunden haben kann.

Bei allen Aufnahmen mit durchlaufendem Film wurden die Ergebnisse um so klarer, je größer die Filmgeschwindigkeit war. Dabei wurde die Filmtrommel bei einigen Aufnahmen mit 5000 Umdr./min angetrieben, was einer Filmgeschwindigkeit von etwa 50 m/sec entsprach. Erst bei dieser Filmgeschwindigkeit waren die feinen Einzelheiten im Brennfleck einigermaßen aufgelöst. Eine weitere Steigerung der Tourenzahl war nicht mehr möglich, da schon bei 5000 Umdr./min der Film häufig von der Trommel platzte.

d) Ergebnisse der Filmaufnahmen. Auch alle Filmaufnahmen wurden ausgeführt an den Homogenkohlen „534", Gamma S, Gamma X und Gamma V, jedoch wurden die beiden Sorten „534" und Gamma V besonders bevorzugt, da sich diese Kohlen schon in den elektrischen Eigenschaften entgegengesetzt verhielten. Die Stromstärken betrugen 18, 30, 45, 60 und 75 Amp., d. h. also vom Einsetzen des Zischens bis zu einer Stromstärke, bei der nach unseren Beobachtungen keine neuen Erscheinungen an der Anode mehr hinzutreten. Die Einstellung war

wieder die alte, nur wurde die Lampe für eine Reihe von Aufnahmen um 90° geschwenkt, so daß die positive und negative Kohle in einer horizontalen Ebene lagen.

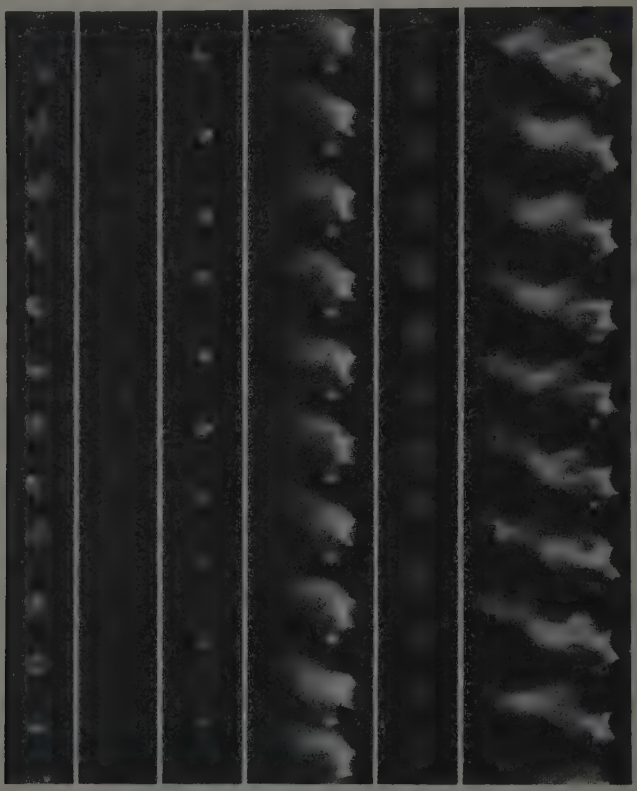


Fig. 16. Zeitlupenaufnahmen: a) Gamma V, 18 Amp.; b) Gamma *S*, 18 Amp. c) „534", 18 Amp.; d) „534", 45 Amp.; e) und f) „534", 75 Amp.

In Fig. 16 sind Teile aus charakteristischen Zeitlupenaufnahmen wiedergegeben.

Die Aufnahmen bei 18 Amp. zeigen alle einen deutlichen Brennfleck, wie ihn schon Weizel und Faßbender[1]) gefunden haben. Die Form und der Durchmesser des Brennflecks sind von der Kohlensorte

[1]) W. Weizel u. J. Faßbender, l. c.

abhängig: Gamma V und Gamma S, Fig. 16a u. b, zeigen auf einem einigermaßen kontinuierlichen Untergrund einen runden oder etwas länglichen Brennfleck, während die Kohle „534", Fig. 16c, ein Bild zeigt, das mit dem Anblick des Mondes verglichen werden könnte. In der Bildreihe der Gamma S, Fig. 16b, sind ferner zwei Bilder (das zweite und siebente von oben), auf denen deutlich zwei Brennflecke zu erkennen sind. Zu bemerken ist schließlich noch, daß sich die einzelnen aufeinanderfolgenden Bilder nicht wie bei normalen Filmaufnehmen nur durch kleine Verschiebungen unterscheiden, sondern daß die Bilder scheinbar zusammenhanglos untereinander stehen. Dies deutet darauf hin, daß die Brennfleckbewegung so rasch erfolgt, daß die zurückgelegte Strecke während $^1/_{800}$ sec — die Zeit von Bild zu Bild — in der Größenordnung des Kraterdurchmessers liegt. Selbst bei den Aufnahmen, die mit einer Bildgeschwindigkeit von 4000 Bildern/sec gemacht sind, ist noch keine klare Entwicklung von Bild zu Bild festzustellen.

Die Aufnahmen bei 30 Amp. zeigen die Erscheinung des Brennflecks wesentlich schwächer. Dagegen konnten auf einem Bildchen sogar drei Brennflecke beobachtet werden.

Bei 45 Amp. ist der Brennfleck fast vollständig verschwunden. Die Bilder sehen nun so aus, als ob sich Dampfwolken über den Krater schöben, deren runde Säume etwas heller sind. Von der Seite ergibt sich nun folgendes Bild, Fig. 16d: Von irgendeiner Stelle der Anode aus geht ein heller Entladungsschlauch mit einem photographisch dunkler erscheinenden Kern an die Kathode. Die Krümmung des Schlauches ist so, daß er sowohl an der Anode wie an der Kathode etwa senkrecht ansetzt. Die Erscheinung ist unabhängig von der Kohlensorte.

Bei 60 Amp. sind die Brennflecke endgültig verschwunden; dagegen ist in den Queraufnahmen der helle Schlauch noch deutlicher zu sehen.

Bei 75 Amp. erreicht der Zischvorgang den höchsten Grad an Regelmäßigkeit. Die Bogen bzw. Kreise laufen wie Wellen über die Anode (Fig. 16e); allerdings zu schnell, um selbst bei der hohen Bildzahl in ihrer Entwicklung beobachtet werden zu können. In den Queraufnahmen ist außer dem Entladungsschlauch ein weiterer interessanter Effekt zu beobachten (Fig. 16f). Der von der Anode abströmende Dampf ist zu Wolken geballt, deren Abstände etwa 12 mm betragen. Nimmt man an, daß diese Wolken im Rhythmus der Zischfrequenz

ausgestoßen werden, also mit rund 2000 Hz, so ergibt sich daraus eine Dampfstrahlgeschwindigkeit von etwa 25 m/sec. Dieses Ergebnis wird später noch durch andere Messungen bestätigt werden.

Fig. 17. Durchlaufende Aufnahme: Gamma V, 18 Amp.

Die Aufnahmen durch das Rotfilter zeigen bis 35 Amp. alle Erscheinungen wesentlich schwächer als ohne Filter, obwohl die allgemeine Schwärzung des Films durch Öffnen der Blende konstant gehalten wurde. Über 35 Amp. dagegen sind praktisch alle Einzelheiten vollkommen verschwunden. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß die optischen Erscheinungen am Zischbogen im wesentlichen nicht vom festen Kohlekrater herrühren, sondern von den C_2- und CN-Dämpfen, deren Bandensysteme im roten Spektralbereich keine erhebliche Intensität besitzen.

In Fig. 17 ist eine durchlaufende Aufnahme ohne Spalt bei 18 Amp. wiedergegeben. Man gewinnt daraus den Eindruck, daß sich der Brennfleck zwar mit verschiedener Geschwindigkeit und Helligkeit, aber doch kontinuierlich fortbewegt.

Die Gleichzeitigkeit zweier Brennflecke konnte bei keiner dieser Aufnahmen mit Sicherheit festgestellt werden.

Wird die Stromstärke gesteigert, so verschwinden zunächst alle Einzelheiten auf der Anodenstirnfläche, und was man sieht, sind lediglich die im Takte der Zischfrequenz erfolgenden Dampfausbrüche, die über den Rand der Anode hinausgehen.

Fig. 18 zeigt durchlaufende Aufnahmen mit dem Spalt vor dem Film bei 18 Amp. Die Stücke des Films, bei denen der Brennfleck über den Spalt lief, sind dabei vergrößert wiedergegeben. Man erkennt nun deutlich eine Feinstruktur, nämlich die Auflösung der Brennfleckspur in eine Zickzacklinie. Aus dem mittleren Abstand der einzelnen Zacken und der Filmgeschwindigkeit läßt sich eine Umlauffrequenz eines „Mikrobrennflecks“ von 80000 bzw. 60000 Hz berechnen. Aus diesen Aufnahmen lassen sich außerdem Mikrobrennfleckspuren von 0,3 mm Durchmesser ablesen. Sollte tatsächlich die gesamte Stromstärke im wesentlichen auf diesen kleinen Brennfleck konzentriert sein, so entspräche das einer Stromdichte von etwa 20000 Amp./cm².

Zu den Aufnahmen der Fig. 18 muß noch gesagt werden, daß die Spaltbreite etwa 1,5 mm betrug. Das bedeutet, daß alle Mikrovorgänge in Brennflecken, deren Spuren breiter als 1,5 mm sind, Unterbrechungen aufweisen *müssen*, die keineswegs eine sprunghafte Wanderung des Mikrobrennflecks bedeuten. Um die Stetigkeit der Brennfleckspuren nachweisen zu können, wurde der Spalt auch auf 3 mm erweitert. Tatsächlich trat der erwartete Erfolg ein: Die Spuren der Mikrobrennflecke

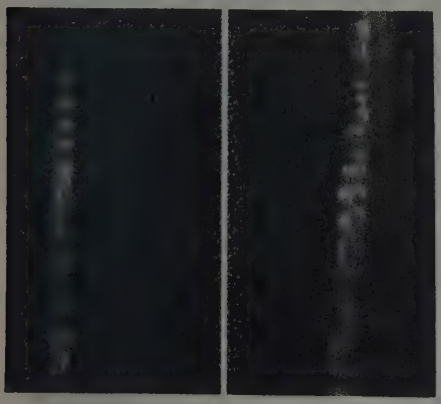


Fig. 18. Durchlaufende Aufnahmen mit dem Spalt vor dem Film; Ausschnittsvergrößerungen: „534", 18 Amp.

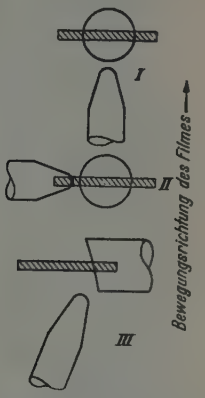


Fig. 19. Die drei für hohe Stromstärken charakteristischen Orientierungen von Lichtbogenbild, Spalt und Bewegungsrichtung des Filmes.

zeigten keine Unterbrechungen mehr. Leider eignen sich die Filme dann nicht mehr zur Wiedergabe, da die Überstrahlung mit der Spaltbreite stark zunimmt.

Für alle folgenden Aufnahmen bei höheren Stromstärken ist ferner die Stellung der Spaltblende im Lichtbogenbild von Wichtigkeit, da hier charakteristische und für die Deutung wichtige Unterschiede auftreten. In Fig. 19 sind die drei Stellungen aufgezeichnet; der Pfeil bedeutet die Bewegungsrichtung des Films.

Fig. 20a ist in Stellung I aufgenommen: Man sieht darauf kurze Brennfleckspuren mit noch angedeuteter Feinstruktur; die Brennflecke halten sich bevorzugt in den beiden äußeren Dritteln des Kraters auf. Fig. 20b, in Stellung II aufgenommen, zeigt dagegen schräge helle Linien, die manchmal gerade in der Mitte Unterbrechungen aufweisen, quer über den breiten hellen Streifen, den die Positivkohle erzeugt. Aus der Bewegungsrichtung des Films und dem Winkel, den die Brenn-

fleckspuren mit ihr einschließen, geht hervor, daß sich der Brennfleck von dem Rande der Positivkohle, der der Negativkohle am nächsten liegt, an den entgegengesetzten Rand bewegt. Aus den Aufnahmen in Stellung I (Fig. 20a) und der Tatsache, daß die Linien in den Auf-

Fig. 20. Durchlaufende Aufnahmen mit dem Spalt vor dem Film: a), b) und c) „534", 45 Amp. d) und e) „534", 75 Amp.

nahmen der Stellung II (Fig. 20b) häufig in der Mitte Unterbrechungen aufweisen, läßt sich schließen, daß der Brennfleck den Mittelpunkt des Kraters gern meidet und etwa regelmäßig wechselnd links und rechts vom Mittelpunkt vorbeiläuft. Verbindet man übrigens in Fig. 20b die Anfangs- und Endpunkte der schrägen Brennfleckspuren miteinander, so erhält man eine Sägezahnkurve derselben Frequenz, wie sie der Oszillograph für die Spannung liefert (Fig. 2).

Fig. 20c zeigt eine Queraufnahme (Stellung III): Ein „hohler" Dampfstrahl, gefolgt von einer diffusen Dampfwolke, bewegt sich mit großer Regelmäßigkeit über den Krater. Der „hohle" Dampfstrahl ist aber nichts anderes als die stromführende Säule, die zum anodischen Brennfleck führt. Wir können die Geschwindigkeit des hinter der Säule abströmenden Dampfes aus der Filmgeschwindigkeit und dem Winkel, den die Dampfwolke auf dem Film mit seiner Bewegungsrichtung einschließt, berechnen: Sie beträgt in Übereinstimmung mit der ersten Abschätzung von Finkelnburg (Arbeit III, S. 739) etwa 20 bis 25 m/sec und nimmt mit steigendem Abstand von der Anode langsam ab.

Bei 75 Amp. werden vor allem bei der Kohle „534" die Erscheinungen noch wesentlich regelmäßiger und klarer, nur daß jetzt der eigentliche Brennfleck nicht mehr sichtbar ist, sondern an seine Stelle die Projektion oder Seitenansicht der röhrenförmig erscheinenden kontrahierten Säule tritt.

Fig. 20d ist in Stellung I aufgenommen: Man sieht etwas langgezogene Kreise, die wie die großen Glieder eines Kettenarmbandes mit etwas Abstand aneinandergereiht sind. Das ist genau das, was man erwarten muß, wenn Kreise senkrecht zum Spalt über diesen hinwegbewegt werden. Fig. 20e ist in Stellung II aufgenommen: Man sieht zwei parallele Streifen, die unter einem solchen Winkel von der Kathode weggehen, daß man aus der Bewegungsrichtung des Films auf eine Bewegung auf der Anode von der Kathodenseite weg schließen kann. Auch diese Erscheinung ist verständlich, wenn man sich vorstellt, daß ein Kreis mit seinem Mittelpunkt etwa auf dem Spalt entlanggeführt wird. Auf die Deutung kommen wir noch zu sprechen.

4. Zischneigung und Zischeinsatz.

Von großer Wichtigkeit für eine Theorie ist die Frage nach dem Einsatzpunkt des Zischens in der Strom-Spannungscharakteristik. Eine eindeutige Entscheidung dieser Frage ist unmöglich, da nur der häufigste Strom-Spannungs-Wert des Zischeinsatzes statistisch festgelegt werden kann. Tatsächlich kann man nämlich bei allen Stromstärken, auch den höchsten, beide Brennformen nebeneinander beobachten. Als Beleg für diese erstmalig in I, S. 310 mitgeteilte Tatsache ist in Fig. 21 die Abhängigkeit der Zischneigung von der Stromstärke für die Kohle Gamma S wiedergegeben. Unter Zischneigung verstehen

wir dabei das Verhältnis der Zeit, während der der Bogen zischt, zu der gesamten Brennzeit. Dabei wurde durch Abstandsvariation die bekannte Beobachtung quantitativ bestätigt, daß durch Vergrößerung der Bogenlänge die Zischneigung kleiner wird. Für alle übrigen Untersuchungen war der Abstand nach Fig. 21 auf 4 mm eingestellt worden.

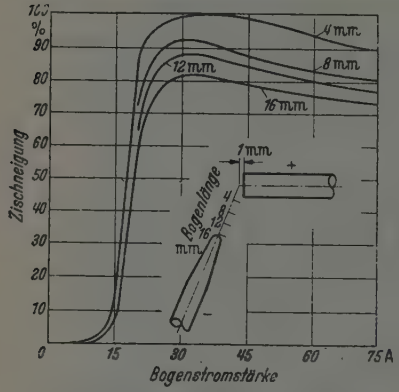


Fig. 21. Die „Zischneigung" in Abhängigkeit von der Bogenstromstärke und der Bogenlänge für die Kokskohle Gamma *S*.

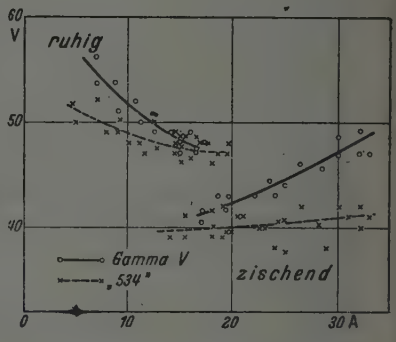


Fig. 22. Statistische Aufnahme der Stromspannungscharakteristik im Bereich des Zischeinsatzes.

Definieren wir nun als Zischeinsatz die Zischneigung 50%, so bleiben wir in Übereinstimmung mit den Zahlenangaben bisheriger Veröffentlichungen. Diese Definition ist auch sinnvoll, da der Durchgang durch 50% sehr steil erfolgt. Aus Fig. 22 folgt, daß dieser Punkt im flachen Minimum der Strom-Spannungs-Charakteristik liegt, daß zum zischenden Bogen also stets eine steigende, zum nicht-zischenden eine fallende Kennlinie gehört.

5. *Diskussion der Ergebnisse.*

Ehe wir in die Diskussion der Ergebnisse eintreten, die notwendigerweise mit spekulativen Überlegungen verbunden sein wird, wollen wir noch einmal die wichtigsten experimentellen Ergebnisse herausstellen. Es handelt sich dabei um diejenigen Ergebnisse, die wir zur Grundlage einer Vorstellung des Zischvorganges machen wollen, die die Fülle der übrigen Beobachtungen als Folge dieser Vorstellungen zu deuten gestattet.

1. Der Eintritt des Zischens ist mit der Ausbildung eines Brennflecks verbunden.

   Beleg: Die Zeitlupenaufnahmen von 18 bis 35 Amp. (Fig. 16a, b, c).

2. Die Bogenbrennspannung ist eine Funktion des Ortes, an dem sich der Brennfleck befindet.
   Beleg: Oszillogramme von Licht und Spannung nach Fig. 14.
3. Der Brennfleck ist der „Tummelplatz" eines Mikrobrennflecks.
   Beleg: a) Die durchlaufenden Aufnahmen mit dem Spalt vor dem Film Fig. 18.
   b) Die hochfrequenten Oberschwingungen der Spannungsoszillogramme in Fig. 7.
4. Oberhalb 35 Amp. — die Grenze ist fließend — wandert der Brennfleck mit großer Regelmäßigkeit von der Kathodenseite der Anode weg über den Anodenkrater.
   Beleg: Durchlaufende Aufnahmen mit dem Spalt vor dem Film Fig. 20b.
5. Oberhalb 35 Amp. ist die Säule zu einer hellen Röhre mit einem photographisch dunkler erscheinenden Kern kontrahiert.
   Beleg: a) Zeitlupenaufnahmen frontal und quer, Fig. 16d, e, f.
   b) Durchlaufende Aufnahmen mit dem Spalt vor dem Film, Fig. 20c, d, e.

Was läßt sich daraus über die Vorgänge an der Anode bei Einsatz des Zischens schließen? Die Entladung kontrahiert im Anodenfallgebiet, wodurch sich ein Mikrobrennfleck ausbildet, dessen Durchmesser etwa 0,3 bis 0,5 mm beträgt. Oberhalb 30 Amp. werden die magnetischen Anziehungskräfte der einzelnen Stromlinien auch außerhalb des Anodenfallgebietes so groß, daß die Kontraktion entgegen der thermischen Diffusion über die Säule bis zur Kathode fortschreitet. Wir haben denselben Effekt vor uns, der bei Stromstärken über 100 Amp. auch bei den ruhig brennenden Lichtbögen zur Kontraktion der Säule von der Kathode aus, d. h. zur „negativen Flamme" führt und bereits in Arbeit IV, S. 228 beschrieben und erklärt wurde.

Dabei drängt sich die Frage auf, weshalb der Kern der Säule, der ja die größte Stromdichte und infolgedessen auch die größte Temperatur haben muß, dunkler erscheint als der ihn umgebende Schlauch. Hierzu ist zu bemerken, daß gerade wegen der hohen Temperatur die Gasdichte im Kern besonders gering ist, und daß zweitens wegen der hohen Temperatur im Kern keine Moleküle mehr bestehen können, die im übrigen Bogenplasma infolge der günstigen Lage der Bandensysteme des CN und C_2 im sichtbaren Spektralbereich fast ausschließlich für die sichtbare Strahlung verantwortlich sind. Der

Kern dagegen sendet im wesentlichen ein Kontinuum aus, in dem sich nur wenige schwache, stark verbreiterte Linien befinden (vgl. auch Arbeit IV, S. 230). Da sich aber dieses Kontinuum nach seiner theoretischen Deutung als Bremskontinuum noch weit ins UV und UR erstrecken muß, ist es durchaus möglich, daß die Säule im sichtbaren Gebiet dunkler erscheint, obwohl die pro Kubikzentimeter abgestrahlte Gesamtenergie immer noch größer ist als die aller übrigen Bogenteile.

Die Stromdichte im Mikrobrennfleck dürfte nun etwa mit einigen 1000 Amp./cm² beginnend mit der Stromstärke exponentiell zunehmen und bei 75 Amp. mindestens 50000 Amp./cm² erreichen. Auf jeden Fall ist aber die dem Mikrobrennfleck zugeführte Energie (Energie der einfallenden Elektronen) so groß, daß die Kohle an dieser Stelle heftig verdampfen muß, wodurch der Mikrobrennfleck, wie die Aufnahmen der Fig. 18 zeigen, anscheinend „weitergeschoben" wird. Der Bogen entzieht sich durch diese Bewegung also der Notwendigkeit, in dem von ihm hervorgerufenen Dampfstrom zu brennen, was nach unserer Arbeit IV einen erheblichen Anstieg des Anodenfalls bedingen würde, während tatsächlich die Brennspannung beim Einsetzen des Zischens sogar um 10 Volt absinkt. Der Brennfleck gleitet also gewissermaßen am Abhang eines sich unter ihm immer neu bildenden Potentialberges dahin. Diese Bewegung des Mikrobrennfleckes erfolgt mit der sehr großen Geschwindigkeit von etwa 300 m/sec, und ihr kann die träge Bogensäule nicht folgen. Da aber der Mikrobrennfleck trotz seiner großen Geschwindigkeit an die Säule gebunden ist, kann er sich nur auf einem sehr kleinen Fleck etwa kreisförmig in der Reichweite der kontrahierten Säule bewegen, wodurch der in den Zeitlupenaufnahmen (Fig. 16a, b, c) festgestellte Brennfleck entsteht.

Die Spannungsschwankungen kleiner Amplitude, deren Frequenz von etwa 50000 Hz sich mit der photographisch festgestellten Umlauffrequenz des Mikrobrennflecks deckt, kommen nun dadurch zustande, daß sich die Länge der Säule bei dieser raschen Bewegung des Mikrobrennflecks immer etwas ändert; die niederfrequenten Spannungsschwankungen großer Amplitude werden dagegen durch die verhältnismäßig langsame Wanderung der kontrahierten Säule über die ganze Anodenstirnfläche hervorgerufen, durch die die Säulenlänge erheblich geändert wird.

Während die eben besprochene Mikrobewegung des Brennflecks also wohl durch die Anodenverdampfung bewirkt wird, kann die langsame Wanderung der kontrahierten Säule zwei Ursachen haben:

1. Thermische Einflüsse und Turbulenz.
2. Magnetische Kräfte.

Bis zu einer Stromstärke von etwa 35 Amp. scheinen die ersten Ursachen die Hauptrollen zu spielen. Die Bewegungen sind nämlich gänzlich ungeordnet, was sich u. a. akustisch dadurch äußert, daß man keinen Ton, sondern ein Geräusch hört. Oberhalb 35 Amp. tritt aber vor allem die enge Einschnürung des Entladungsschlauches auf, der als Verbindung zwischen Anode und Kathode gekrümmt sein muß, insbesondere, wenn die Kohlen in der Winkelstellung gebrannt werden. Aber auch in der koaxialen Stellung wird, schon aus thermischen Gründen, der Entladungsschlauch nicht ganz gerade bleiben können. Nun hat jede gekrümmte Strombahn infolge ihres Eigenmagnetfeldes das Bestreben, ihren Krümmungsradius zu vergrößern. Das geschieht gemäß Fig. 23a durch Hochwandern des Brennflecks, wozu gemäß Fig. 23b noch eine seitliche Krümmung hinzukommen kann.

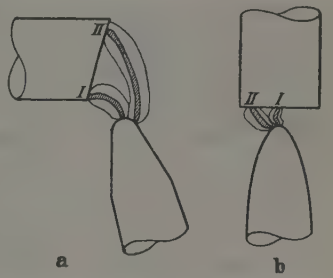


Fig. 23. Prinzipskizze zum Mechanismus des Zischens bei hohen Stromstärken.

Wir können uns also von dem Hochstromzischen oberhalb 35 Amp. etwa folgende Vorstellung machen: Die stark kontrahierte Säule, die zunächst irgendwo an der Anode ansetzen soll, beginnt, sich unter der Wirkung des Eigenmagnetfeldes zu strecken, und verschiebt dadurch ihren Fußpunkt gegen den oberen Rand der Anode. Dadurch wird die Säule länger und die Spannung am Bogen steigt langsam an. Ist der Brennfleck am Rande angelangt, so ist inzwischen die Spannung so hoch angestiegen, daß in der hocherhitzten Atmosphäre der Umgebung des Bogens eine Neuzündung am inneren Kraterrand möglich wird. Die Spannung ist durch diese Neuzündung auf den kleinstmöglichen Wert zusammengebrochen. Nun beginnt das Spiel wieder von vorn. Die Säule streckt sich, bis sie am oberen Rand abreißt oder durch eine Neuzündung zum Verlöschen gebracht wird. Der Brennfleck läuft dabei nicht über die Kratermitte, sondern wird durch eine kleine zufällige Anfangskrümmung in der Horizontalebene nach rechts oder links weggedrückt. Die große Regelmäßigkeit des Vorganges zeigt sich in den Oszillogrammen und Zeitlupenaufnahmen und wird durch den „Ton“ bestätigt.

Im einzelnen ungeklärt bleibt allerdings die Frage, warum die einzelnen Kohlesorten sich so verschieden verhalten, aber bei allen quantitativ erfaßten Eigenschaften in der gleichen Reihenfolge: „534", Gamma S, Gamma X, Gamma V. Es mag für eine spätere Theorie von Wichtigkeit sein, daß diese Reihenfolge auch für die elektrischen Leitfähigkeiten gilt und — da das Wiedemann-Franzsche Gesetz nach unseren überschlägigen Messungen auch für die verschiedenen Modifikationen des Kohlenstoffs gilt — auch für die Wärmeleitfähigkeiten. Die spezifischen Widerstände sind auf S. 715 angegeben.

Schließlich müssen wir uns noch mit der Frage beschäftigen, wie es möglich ist, daß die zischende Bogenform wieder in die ruhige umschlagen kann. Hierfür ist die Tatsache wichtig, daß für den nichtzischenden Bogen eine konstante Stromdichte von etwa 40 Amp./cm² charakteristisch ist, wie die Messung der anodischen Stromeintrittsfläche als Funktion der Stromstärke zeigt. Bei der Stromstärke des Zischeinsatzes bedeckt die Stromeintrittsfläche etwa die ganze Anodenstirnfläche. Bei höheren Stromstärken kann also der Bogen nur dann ruhig brennen, wenn er auf den Kohlenmantel übergreift. Tatsächlich kann in den zischfreien Augenblicken bei 75 Amp. ein Übergreifen des Stromansatzes auf den Mantel der Anode in einer Breite von 6 bis 7 mm gemessen werden, so daß die Stromdichte wieder 40 Amp./cm² beträgt. Für unsere Deutung spricht, daß die Beruhigung des Zischbogens in der Winkelstellung dadurch begünstigt wird, daß man die Positivkohle etwas zu weit vorschiebt und dadurch den Bogenansatz an der Anodenmantelfläche erleichtert.

6. Zusammenfassung.

1. Es wurde der zischende Lichtbogen mit Hilfe eines Zweistrahl-Elektronenstrahl-Oszillographen untersucht. Die Spannungsschwankungen, die bei niedrigen Stromstärken unperiodisch verlaufen, nehmen bei hohen Stromstärken die Form von Sägezahnkurven, die Stromstärke die Form von nach oben gewölbten Bogen an. Die Spannungsschwankungen erreichen dabei einen Wert von 30 Volt, die Stromstärkeschwankungen 13 Amp. Die Phasenbeziehung wurde durch Lissajoussche Figuren sichergestellt.

2. Der Zischton entspricht den ins Akustische übersetzten Spannungsschwankungen.

3. Die Schwankungen des Gesamtbogenlichtes sind gegeben durch die im Rhythmus der Zischfrequenz erfolgende periodische

Abströmung von C_2-Dampfwolken; die Flächenhelligkeitsschwankungen dagegen rühren von einem wandernden Brennfleck bzw. der an ihn ansetzenden schlauchförmig kontrahierten Säule her. Diese Vermutung wurde durch Filmaufnahmen gesichert.

4. Die Spannungsschwankungen zeigen eine hochfrequente Oberwelligkeit von etwa 50000 Hz, die von dem in den Filmaufnahmen sichergestellten Mikrobrennfleck herrührt, der sich im eigentlichen Brennfleck mit großer Geschwindigkeit bewegt.

5. Die Bewegung des Brennflecks auf der Anodenstirnfläche wird bei niedrigen Stromstärken thermisch, bei hohen Stromstärken magnetisch gedeutet.

6. Die statistischen Untersuchungen über den Zischeinsatz und die Zischneigung ergeben, daß die ruhige und die zischende Brennform bei allen Stromstärken nebeneinander bestehen können, und daß die zeitliche Verteilung auf die beiden Brennformen gegeben ist durch die Möglichkeit zur Ausbreitung des anodischen Stromeintritts bei konstanter Stromdichte. Ist diese Möglichkeit gut geboten, so brennt der Bogen vornehmlich ruhig und umgekehrt.

7. Verschiedene Kohlesorten zeigen ein deutlich verschiedenes Zischverhalten. Dabei scheint die Wärmeleitfähigkeit des Materials die maßgebliche Rolle zu spielen.

8. Die Zeitlupenaufnahmen und die durchlaufenden Aufnahmen gestatten je eine Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit des von der Anode abströmenden Dampfes. Die Werte stimmen untereinander und mit den Berechnungen in Arbeit III, S. 739 gut überein.

Die Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Darmstadt ausgeführt. Herrn Prof. Dr. H. Rau danken wir für sein stetes Interesse, Herrn Dipl.-Phys. Hannappel für seine Hilfe bei den Versuchen. Der verwendete Zweistrahl-Elektronenstrahl-Oszillograph wurde uns von der Helmholtz-Gesellschaft zur Verfügung gestellt, wofür wir auch an dieser Stelle unseren Dank aussprechen. Unser Dank gilt weiter den Ringsdorff-Werken K.-G., sowie Herrn Dr. Neukirchen, Mehlem, für zahlreiche Diskussionen und Anregungen.

Strassburg (*Els.*), Physikalisches Institut der Reichsuniversität, Mai 1943.

(Mitteilung aus dem Kernphysikalischen Institut des Reichspostministeriums, Berlin-Lichterfelde-Ost und der Forschungsanstalt der Friedrich Krupp, Essen.)

Ein kernphysikalisches Verfahren zur Bestimmung geringer Kohlenstoffzusätze in Eisen.

Von **Manfred von Ardenne** und **Fritz Bernhard.**

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 4. Februar 1944.)

Durch direkten Beschuß der Eisenprobe mit Protonen oder Deuteronen wird der zu bestimmende Kohlenstoff in Radiostickstoff umgewandelt, dessen Aktivität leicht meßbar ist und dadurch eine Bestimmung des Kohlenstoffgehaltes der Eisenprobe ermöglicht.

1. Einleitung.

Beschießt man Kohlenstoff mit Protonen- oder Deuteronenstrahlen[1]) von ungefähr 1 e-MV, so wandelt sich Kohlenstoff um in radioaktiven Stickstoff nach der Gleichung:

$$^{12}_{6}C + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{13}_{7}N^{*} \rightarrow ^{13}_{6}C + e^{+} \quad \text{bzw.} \quad ^{12}_{6}C + ^{2}_{1}D \rightarrow ^{13}_{7}N^{*} + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{13}_{6}C + ^{1}_{0}n + e^{+},$$

wobei die Halbwertszeit 9,93 Min. beträgt.

Die Friedrich Krupp, Forschungsanstalt, hat vor einiger Zeit in einer Patentschrift[2]) vorgeschlagen, sehr kleine, auf chemischem Wege nur umständlich bestimmbare Kohlenstoffgehalte durch direkte Bestrahlung der Proben mit Protonen- oder Deuteronenstrahlen auf dem Wege der künstlichen Radioaktivität des Stickstoffs zu ermitteln. Der von der Firma Friedrich Krupp (Forschungsanstalt) an uns ergangenen Anregung, das angedeutete Verfahren praktisch zu verwirklichen und auszubauen, sind wir gern gefolgt. Es galt zu prüfen, ob Kohlenstoffgehalte bis zu 10^{-4} und weniger auf kernphysikalischem Wege bequem erfaßbar sind. Bei der praktischen Durchführung zeigten sich erhebliche Schwierigkeiten, deren Überwindung in den folgenden Zeilen geschildert werden soll.

2. Das Grundprinzip des Verfahrens.

Der Protonen- oder Deuteronenstrahl trifft direkt auf die zu untersuchende Eisenprobe. Die Geschosse werden entsprechend ihrer Reich-

[1]) H. R. Crane u. C. C. Lauritsen, Phys. Rev. 45, 407, 430, 1934; L. R. Hafstad u. M. A. Tuve, ebenda 48, 306, 1935. — [2]) D. R. P. 732312. Erfinder Dr. Fahlenbrach und Dr. Schlechtweg. Angemeldet 13. Juli 1938.

weite im Eisen nach einigen 10^{-3} mm abgebremst. Hierbei treffen sie entsprechend der Größe der Beimengung auf Kohlenstoffatome, von denen sie einen geringen Bruchteil umwandeln. Die Intensität der von den so erzeugten Stickstoffatomen ausgesandten Positronen klingt exponentiell mit einer sehr bequemen Halbwertszeit ab. Entsprechend der geringen Reichweite der Korpuskularstrahlen liegt auch der Ort der radioaktiven Stickstoffatome höchstens gleich tief in der Eisenschicht. Diese Dicke ist für die entsprechenden β-Strahlen als dünn zu bezeichnen. Daher kann damit gerechnet werden, daß nahezu die Hälfte der β-Teilchen aller radioaktiven Stickstoffatome aus der Eisenschicht austritt und dadurch gezählt werden kann. Die gesamte Kohlenstoffbestimmung erfolgt also in einem äußerst *kleinen Volumen*, wobei die Ausdehnung senkrecht zum Strahl durch die naturgemäß vorhandene Inhomogenität des Strahles begrenzt wird und in Strahlrichtung durch die Reichweite der Strahlen im Eisen. Die erforderliche kleine Materialmenge ist überdies oft verwendbar, so daß Änderungen des Kohlenstoffgehalts durch thermische Nachbehandlung laufend verfolgt werden können. Man kann also eine absolute Bestimmung des Kohlenstoffgehalts vornehmen, wenn man den Wirkungsquerschnitt für den Umwandlungsprozeß und seine Abhängigkeit von der Energie der Teilchen kennt. Für die Praxis ist dieser Weg zu umständlich. Hier hat sich folgendes einfache *Verfahren* gut bewährt.

Auf der zu bestrahlenden Probe wird ein kleines Stückchen einer Substanz mit bekanntem Kohlenstoffgehalt radial befestigt und mitbestrahlt. Die Bestimmung der Anfangsaktivitäten, sowohl der bestrahlten Probe als auch der Eichsubstanz, erfolgt unter gleichen geometrischen Bedingungen in einer üblichen Zählrohrapparatur. Die so erhaltenen Aktivitäten müssen nun noch normiert werden. Zu diesem Zweck wird die jeweilige Anfangsaktivität durch die bestrahlte Fläche der Substanz dividiert. Das Verhältnis der so normierten Aktivitäten ist das Verhältnis der Kohlenstoffgehalte in den beiden Substanzen, wenn man die jeweilige Eindringtiefe in der entsprechenden Substanz in Rechnung stellt.

Damit ergibt sich die Umrechnungsformel:

$$C_x = C_{\text{Eich}} \frac{E_{\text{Fe}} \cdot F_{\text{Eich}}}{E_{\text{Eich}} \cdot F_{\text{Fe}}} \cdot G.$$

C = Kohlenstoffgehalt, E = Anfangseffekt, F = bestrahlte Fläche, G = Geometriefaktor am Zählrohr und Reichweitefaktor. Diese Methode des Vergleichs ist einfach und gestaltet gleichzeitig die Be-

stimmung unabhängig von Schwankungen der Strahlintensität. Die Anfangseffekte werden in der üblichen Weise aus den 1-Minuten-Messungen der abklingenden Aktivität berechnet. In Abständen von 10 Minuten wurden 1-Minuten-Messungen der Aktivität der Eichsubstanz eingeschaltet. Erst nach Abklingen der Aktivität aus der Eisenprobe wurde das Vergleichsnormal laufend gemessen, da seine Anfangsaktivität um mindestens eine Größenordnung über der der Eisenproben lag. Vor und nach der Messung wurde der Nulleffekt sowie die Empfindlichkeit des Zählrohres mittels eines Uranglasstandards gemessen.

3. Auswahl einer geeigneten Eichsubstanz.

Die Größe des Ionenstromes im Auffänger eines Hochspannungsgenerators ist im allgemeinen ungeeignet als Maß für die Größe der Strahlintensität. Der Grund liegt an den immer vorhandenen geringen Schwankungen der Stromstärke bzw. der Spannung und auch in dem nicht konstanten Verhältnis von Atom-, Molekül- und Restgasionen. Daher geht man zur Festlegung der Strahlungsintensität hier im allgemeinen den Weg der Kontrollbestrahlung einer Eichsubstanz. Die Eichsubstanz soll natürlich einen sehr geringen Prozentsatz des Strahles benötigen und weiterhin soll hierbei möglichst die gleiche Kernreaktion zur Anwendung kommen, damit alle zeitlichen Schwankungen synchron in beiden Substanzen zur Wirkung kommen. Am geeignetsten sind als Eichsubstanz wegen ihres geringen Flächenbedarfs Substanzen mit sehr großem Kohlenstoffgehalt. Wir benutzten daher zunächst kleine Stücke Lichtbogenkohle. Die damit durchgeführten Kohlenstoffbestimmungen wiesen eine außerordentlich große Streuung auf, und zwar immer in Richtung nach einem zu großen Kohlenstoffgehalt. Die Kontrollmessungen an Kohlenplatten ergaben, daß der Strahl die Kohle erhitzt und der Radiostickstoff in unkontrollierbarer Weise je nach dem Grad der Erhitzung aus der Kohle in das Hochvakuum geht und infolgedessen das Kohlennormal eine zu geringe Bestrahlung vortäuscht. Selbst bei kurzem Glühen von aktivierten Kohlenplättchen an Luft trat 60 bis 80 % des Radiostickstoffs aus der Kohle aus, obwohl hier die fördernde Wirkung des Vakuums fortfällt. Die Lichtbogenkohle ist also dann als Vergleichssubstanz ungeeignet, wenn der zu messende Strahl eine Erhitzung der Kohle verursacht. Andererseits aber bieten diese Eigenschaften der Lichtbogenkohle eine Möglichkeit der bequemen Erzeugung von Radiostickstoff im Dauerbetrieb, denn der Radiostick-

stoff wird dauernd durch die Pumpe aus der Apparatur herausbefördert und kann hier nachgewiesen oder aufgefangen werden.

In der Folgezeit benutzten wir als *Eichsubstanz* stets große *Kristalle aus Siliciumcarbid*. Auch mehrfaches längeres Glühen schwächte die Aktivitäten nicht. Andererseits ist der Kohlenstoffgehalt mit 30 % noch recht gut. Die mit SiC erzielte Genauigkeit ist recht befriedigend, wenn man die in den folgenden Abschnitten erläuterten Vorsichtsmaßnahmen berücksichtigt.

4. Ausschaltung von Strahl-Inhomogenitäten.

Die Voraussetzung für diese Art der Messung der Bestrahlungsintensität ist die Garantie der vollkommen gleichstarken Bestrahlung von Probe und Eichsubstanz. Da der Ionenstrahl stets kleine Wanderungen auf dem Auffänger ausführt und auch die Größe des Brennfleckes wechselt, sind kleine Intensitätsschwankungen senkrecht zum Strahl nicht zu vermeiden. Um diesen Unsicherheitsfaktor möglichst klein zu halten, wurde der Brennfleck durch Verstellung der Spannung an der ersten Beschleunigungsstufe auf die Größe der Eisenprobe gebracht. Dann wurde, wie aus der Zeichnung Fig. 1 der Bestrahlungsanordnung hervorgeht, der Auffänger 8 mm aus der Achse des Strahles herausgeschwenkt und der gesamte Auffänger mit Hilfe einer durch einen Simmerring abgedichteten Drehvorrichtung in dauernde Rotation versetzt. Durch diese Maßnahme wird erreicht, daß das Strahlzentrum auf der Bestrahlungsprobe kreist. Sorgt man dafür, daß die Um-

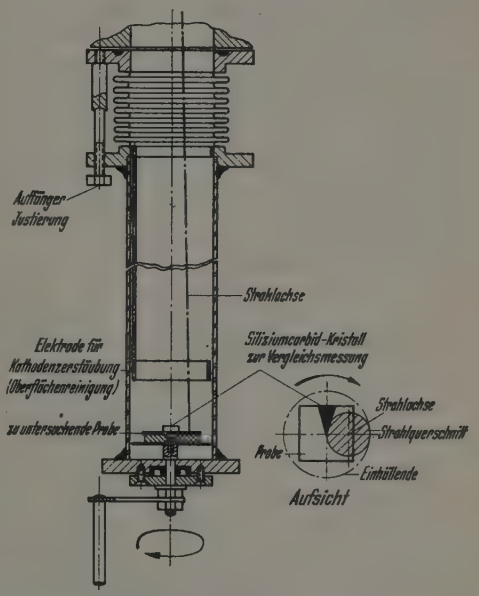


Fig. 1. Bestrahlungsanordnung bei der Bestimmung des Kohlenstoffgehaltes.

drehungszeit klein ist, verglichen mit der Bestrahlungszeit, so ist die nachher gemessene Anfangsaktivität einer bestimmten Probenstelle proportional der im Mittel auf sie fallenden Strahlung. Die Wirkung des *rotierenden Auffängers* liegt also vor allem in einer scheinbaren Verbreiterung des Strahles und in der Kompensierung eventueller Unsymmetrien des Strahlquerschnittes. Die Folge davon ist eine recht gleichmäßige Aktivierung des Kohlenstoffs über die ganze Fläche des Eisens bei guter Ausnutzung der Strahlintensität. Eine Kontrollbestrahlung mehrerer Kohlescheibchen gleichzeitig, die zur Verhinderung der kritischen Erwärmung mit gedrosselter Intensität vorgenommen wurde, ergab Aktivitätsunterschiede, die innerhalb der statistischen Schwankungen liegen.

5. Kohlenstoffhaltige Oberflächenverunreinigungen als Störungsquelle.

Da die Reichweite von Protonen bzw. Deuteronen von 800 kV in Eisen die Größenordnung 1,5 bis 2 μ hat, ist das Verfahren sehr empfindlich gegen Oberflächenverunreinigungen durch kohlenstoffhaltige Substanzen. *Beispielsweise würde unter den von uns benutzten Bedingungen schon eine monomolekulare Fettschicht (etwa* 10 Å *Dicke entsprechend einer Belegung von* 10^{-7} g/cm^2) *Kohlenstoffgehalte von* 10^{-4} *bis* 10^{-3} *vortäuschen.* So geringfügige Oberflächenverunreinigungen können auf verschiedene Weise verursacht sein:

1. Durch Restsubstanz des Schleifmittels (z. B. Carborund) zur Oberflächenbehandlung der Proben.
2. Durch Fettschichten infolge von unsauberem Hantieren.
3. Durch Kohlenstoffabscheidung aus dem Strahl.

Die Verunreinigung gemäß 1 und 2 läßt sich in der benutzten Anlage bequem ausschalten mit Hilfe von *Kathodenzerstäubung.* Hierfür dient die in Fig. 1 mitgezeichnete Hilfselektrode. Die Reinigung der Probe erfolgt vor der Bestrahlung bei herausgenommener Eichsubstanz (sonst gegenseitige Bedampfung!) unter Abtrennung des Auffängersystems vom Entladungsrohr mit Hilfe der unteren Schleusenplatte nach Herstellung des erforderlichen Wasserstoffdruckes.

Die Mitabscheidung von Kohlenstoff aus dem Strahl auf dem Auffänger ist eine bekannte Erscheinung bei Hochspannungs-Atomumwandlungsanlagen. Der niedergeschlagene Kohlenstoff wird durch den Beschuß mit Protonenstrahlen bzw. Deuteronenstrahlen ebenfalls

umgewandelt und kann daher einen zu großen Kohlenstoffgehalt der Probe vortäuschen. Zur Abschätzung dieses Effektes wurde ein vorher geglühtes Goldblech (30 × 20 mm) 30 Min. lang in den Ionenstrahl gebracht und die dann herrschende Aktivität gemessen. Es ergab sich bei Bestrahlung mit Protonen eine Anfangsaktivität von 100 Teilchen pro Minute. Da die Bestrahlungsdauer aber 10 Min. war, kann also der durch die Kohlenstoffabscheidung hervorgerufene Störeffekt nur etwa 30 Teilchen betragen. Bei Bestrahlung mit Deuteronen zeigte sich ein etwa vier- bis fünfmal stärkerer Störeffekt. Hierauf sind die Abweichungen für die Messungen mit dem kleinsten C-Gehalt in der Tabelle I linke Spalte zurückzuführen. Wir haben das Verfahren, durch Zwischenschaltung eines Ablenkmagneten die Protonen- bzw. Deuteronenstrahlen von den anderen Strahlen zu trennen, bei einem Teil unserer Messungen benutzt. Ein systematischer Einfluß auf die Meßergebnisse zeigte sich hierbei nicht. Das gleiche gilt auch für ein weiteres von uns versuchtes Verfahren, bei dem die Abtrennung der unerwünschten Kohlenstoffstrahlung durch Abdecken der Eisenprobe mit einer Aluminiumfolie von ungefähr 1 μ erfolgte. Diese Folie bewirkt für Protonen- bzw. Deuteronenstrahlen der vorhandenen Energie einen Energieverlust von etwa 10 %, hält dagegen 80 bis 90 % der schädlichen Ionen ab.

6. Störmöglichkeiten durch Konkurrenzprozesse.

Es liegt nahe, daß ein Verfahren, welches wie das vorliegende Substanzen bis zu einer Verdünnung von $1 : 10^{-4}$ und weniger nachzuweisen gestattet, auch empfindlich ist gegen andere Beimengungen[1]). Im Falle des Eisens kommen als Beimengungen die üblichen Verunreinigungen des Eisens, nämlich Si, Mn, P und S und bei Spezialstählen vor allem noch Co, Cr, Cu, Ni, in wechselnden Anteilen hinzu. Davon geben Si, Mn und Co gar keine hier in Frage kommenden radioaktiven Körper. Die anderen geben zwar mit Protonen- und Deuteronenstrahlen Reaktionen, die zu radioaktiven Kernen führen, aber bei Bestrahlungsdauern von 1 bis 10 Min. werden die langlebigen Kerne nicht ausreichend angeregt und die kurzlebigen lassen sich durch ihre abweichende Halbwertszeit leicht feststellen. Schwieriger liegen die Verhältnisse bei Cu und Ni. Bei dem $^{63}_{29}$Cu führt ein $(d, {}^3H)$-Prozeß zu einem 9,92-Min.-Kupfer, während ein (p, γ)-Prozeß von $^{61}_{26}$Ni ebenfalls zum 9,92-Min.-

[1]) R. u. K. Döpel, Phys. ZS. 44, 261, 1943.

Kupfer führt. Diese Halbwertszeit ist experimentell nicht von der des radioaktiven Stickstoffs ($T = 9{,}93$ Min.) zu trennen. Zur Kontrolle unserer Messung haben wir daher ein Nickelblech einmal 1 Min. und dann 1 Std. mit Deuteronen bestrahlt. Im Falle der 1-Std.-Bestrahlung müßte dann das 3, 4-Std.-Kupfer aus der Reaktion

$$^{60}_{28}\mathrm{Ni} \overset{(p,\gamma)}{(d,n)} {}^{61}_{29}\mathrm{Cu}$$

auftreten. Die Versuche ergaben aber keinen derartigen Körper, sondern nur eine 9,9-Min.-Aktivität. Dieser 9,9-Min.-Körper scheint aus dem durch die sehr lange Bestrahlung niedergeschlagenen Kohlenstoff zu stammen. Damit glauben wir annehmen zu können, daß die Störmöglichkeiten, die aus den Beimengungen von Kupfer und Nickel sich ergeben könnten, wenigstens bis zu Beschleunigungsspannungen von 1 MV nicht auftreten.

7. *Meßergebnisse.*

Die Bestrahlung erfolgte mit dem Bandgenerator des Lichterfelder Laboratoriums[1]). Die Bestrahlungsdauer betrug bei Aktivierung mit Protonen 10 Min. bzw. mit Deuteronen 1 Min. und bei 20 μA Strahlstrom und einer Beschleunigungsspannung von 800 kV. Im Interesse eines kleinen Nulleffektes des Zählrohres ist bekanntlich bei stärkeren Strahlquellen ein größerer Abstand zwischen diesen und den Zählrohrapparaturen wünschenswert. Um trotzdem Körper mit kurzer Halbwertszeit unter möglichst geringem Aktivitätsverlust messen zu können, sind die Bestrahlungsanlagen der beiden hiesigen Institute durch *Rohrpost* mit den Zähllaboratorien verbunden worden. Hierdurch war es möglich, mit den Messungen 1 Min. nach Bestrahlungsende zu beginnen, wobei durch den Ausschleusevorgang, die Kühlung und Abtrocknung der Probe bereits 40 sec gegenüber 8 sec für den Transport (etwa 50 m) benötigt werden.

Als Eisenproben benutzten wir Bleche $30 \times 30 \times 0{,}2$ mm, deren Oberflächen sorgfältig poliert waren und uns in diesem Zustande von der Firma Friedr. Krupp geliefert wurden. Die Vergleichssubstanz war ein 1,12 cm² großer Kristall aus Siliciumcarbid, dessen Kohlenstoffgehalt 30 % betrug. Der Geometrie-Reichweitefaktor ist bei Protonen $G_p = 3{,}85$ bzw. bei Deuteronen $G_d = 2{,}78$. Der Unterschied ist einerseits bedingt durch den Resonanzcharakter des (p, γ)-Prozesses gegen-

[1]) M. von Ardenne u. F. Bernhard, ZS. f. Phys. **121**, 236, 1943.

über dem exponentiellen Anstieg des (d, n)-Prozesses und andererseits durch die verschiedene Reichweite der Teilchen.

Tabelle 1. Gegenüberstellung der kernphysikalisch ermittelten Kohlenstoffgehalte mit denen der chemischen Analyse.

$^{13}_{6}C\,(d\,n)\,^{13}_{7}N^*$				Chemisch	$^{13}_{6}C\,(p\,\gamma)\,^{13}_{7}N^*$			
Ia	IIa	IIIa	IVa	V	IVb	IIIb	IIb	Ib
E_{Fe}	E_{SiC}	E_{Fe}/E_{SiC}	C_x %	C_x %	C_x %	E_{Fe}/E_{SiC}	E_{SiC}	E_{Fe}
510	21000	0,024	$0{,}06 \pm 0{,}02$	0,03	—	—	—	—
490	22000	0,022	$0{,}06 \pm 0{,}02$					
700	20500	0,022	$0{,}06 \pm 0{,}01$	0,05	$0{,}04 \pm 0{,}04$	0,016	2670	42
500	26500	0,019	$0{,}05 \pm 0{,}01$					
1000	21500	0,047	$0{,}13 \pm 0{,}01$	0,12	$0{,}11 \pm 0{,}02$	0,028	4500	125
545	11800	0,046	$0{,}13 \pm 0{,}01$		$0{,}12 \pm 0{,}02$	0,031	6000	188
850	12500	0,068	$0{,}19 \pm 0{,}02$	0,14	$0{,}13 \pm 0{,}02$	0,033	8200	273
960	14600	0,066	$0{,}18 \pm 0{,}02$		$0{,}14 \pm 0{,}02$	0,036	5600	200
11000	32200	0,344	$0{,}95 \pm 0{,}01$	1,00	$0{,}99 \pm 0{,}03$	0,256	5700	1460
890	2650	0,336	$0{,}94 \pm 0{,}02$		$1{,}00 \pm 0{,}04$	0,261	2300	600

Aus der vorstehenden Tabelle ersieht man die Ergebnisse von fünf Proben, die jeweils zweimal bestrahlt wurden zur Kontrolle der Meßgenauigkeit. Die linke Seite enthält die Meßresultate bei Bestrahlung mit Deuteronen, die rechte diejenigen bei Benutzung der p, γ-Reaktion. Die Spalten Ia, b enthalten die Anfangseffekte der bestrahlten Proben, die Spalten IIa, b diejenigen des SiC-Kristalls, die Spalten IIIa, b das Verhältnis beider Effekte. In den Spalten IVa, b sind die kernphysikalisch bestimmten Kohlenstoffgehalte den in Spalte V von der Forschungsanstalt der Friedrich Krupp chemisch gemessenen gegenübergestellt. Die Übereinstimmung mit den chemisch ermittelten Kohlenstoffgehalten ist recht befriedigend und zeigt die Brauchbarkeit der Methode. Das Verfahren gestattet zur Zeit unter der Voraussetzung höchster Oberflächensauberkeit der Probe den Nachweis eines Kohlenstoffgehalts bis zu $5 \cdot 10^{-4}$. Jedoch glauben wir damit noch nicht die Grenze erreicht zu haben. Arbeiten zur Steigerung der Nachweisempfindlichkeit sind im Gange.

Die Verfasser danken der Firma Friedr. Krupp, Essen, für die Anregung zu dieser Arbeit sowie im besonderen Herrn Dr. Rüdiger, Essen, für Diskussionen und die Anfertigung und chemische Analyse der Eisenproben. Für die Durchführung der Aktivitätsmessungen sind wir Herrn K. Martin verpflichtet.

8. Zusammenfassung.

Im vorangehenden wurde ein Verfahren beschrieben, welches den Nachweis von Kohlenstoff im Eisen mit Hilfe des Radiostickstoffs aus den Kernreaktionen

$$^{12}_{6}\mathrm{C}\ \begin{matrix}(p,\gamma)\\(d,n)\end{matrix}\ ^{13}_{7}\mathrm{N}^{*}$$

gestattet. Es werden die Schwierigkeiten und Störmöglichkeiten untersucht und Wege zu ihrer Überwindung gezeigt. Die augenblickliche Grenze des Nachweises liegt unter der Voraussetzung höchster Oberflächensauberkeit der Probe bei einem Kohlenstoffgehalt von $5 \cdot 10^{-4}$.

Die Absorption thermischer Neutronen in Kohlenstoff[1]).

Von **W. Bothe** und **P. Jensen** in Heidelberg.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 21. Januar 1944.)

Es wurde die Diffusionslänge thermischer Neutronen in Elektrographit gemessen und daraus der Absorptionsquerschnitt berechnet. Die Ergebnisse wurden auf reine Kohle korrigiert, indem die Absorption der Asche gesondert bestimmt wurde.

1. Ziel der Untersuchung. Das Verhalten von Neutronen beim Durchgang durch leichtatomige Stoffe interessiert in mancherlei Hinsicht besonders. Es sei nur auf eine praktische Frage hingewiesen. Zur Herstellung thermischer Neutronen bedient man sich fast ausschließlich des ursprünglichen Fermischen Verfahrens der Abbremsung schneller Neutronen in stark wasserstoffhaltigen Stoffen, wie Wasser und Paraffin. Damit nutzt man nicht nur das starke Bremsvermögen, sondern auch den großen Streuquerschnitt des Protons für mittelschnelle Neutronen aus. Beides zusammen bewirkt, daß schon nach Durchgang durch wenige Zentimeter Paraffin die Neutronen zu einem erheblichen Bruchteil thermische Energie angenommen haben. Andererseits gelingt es nach diesem Verfahren nicht, thermische Neutronen frei von schnellen herzustellen, denn mit zunehmender bremsender Schicht nähert sich der prozentuale Anteil schneller Neutronen einem endlichen Grenzwert. Dies kommt daher, daß in Paraffin und ähnlichen Stoffen die Streuweglänge der gewöhnlich benutzten Primärneutronen größer ist als die Diffusionslänge der thermischen Neutronen, so daß sich mit zunehmender Schichtdicke ein laufendes Gleichgewicht zwischen beiden einstellt[2]). Dies ist oft lästig bei der Untersuchung von Kernumwandlungen. Aus diesem Gesichtspunkte würde ein Bremsmittel mit größerer Diffusionslänge Vorteile bieten. Hierfür kommen Kohle, Beryllium und schweres Wasser in Betracht, die sämtlich kleine thermische Einfangquerschnitte und daher große Diffusionslängen haben.

Im folgenden werden Versuche zur Bestimmung der Diffusionslänge und des thermischen Absorptionsquerschnittes von reiner Kohle beschrieben. Über den Bremsvorgang in Kohle und anderen leichten

[1]) Diese Untersuchung wurde im Januar 1941 abgeschlossen. Die Veröffentlichung verzögerte sich aus äußeren Gründen. — [2]) Dies gilt nicht, wenn man die energiearmen Photoneutronen als primäre benutzt, doch sind die damit erreichbaren Intensitäten thermischer Neutronen klein. Vgl. M. Goldhaber u. R. D. O'Neal, Phys. Rev. **60**, 843, 1941.

Stoffen hat der eine von uns besondere Messungen angestellt. Über Untersuchungen an Beryllium wird in einer weiteren Arbeit von E. Fünfer und W. Bothe berichtet[1]).

2. Methode. Die Diffusionslänge l in einem Mittel ist nach Fermi[2]) dadurch definiert, daß die Dichte ϱ_0 der thermischen Neutronen in einem *quellenfreien* Bereich der Differentialgleichung gehorcht

$$l^2 \Delta \varrho_0 - \varrho_0 = 0. \qquad (1)$$

Bei schwacher Absorption gilt für l die Fermische Näherung

$$l = \sqrt{\tfrac{1}{3} \lambda_s \lambda_a}; \quad \lambda_s = 1/N \sigma_s; \quad \lambda_a = 1/N \sigma_a. \qquad (2)$$

Hierin ist N die Zahl der streuenden und absorbierenden Kerne, σ_s und σ_a ihr Streu- bzw. Absorptionsquerschnitt, λ_s und λ_a also die Streu- bzw. Absorptionsweglänge[3]).

Zur Messung der Diffusionslänge in Kohle wurde ein von Heisenberg stammendes Prinzip angewendet. Das zu untersuchende Mittel hat die Form einer Kugel, die allseitig von Wasser umgeben ist. In der Mitte befindet sich eine Quelle schneller Neutronen. Man mißt die Dichteverteilung ϱ der thermischen Neutronen im Innern der Kugel, wiederholt diese Messung, nachdem man allseitig eine Cadmiumschicht zwischen die Kugel und das umgebende Wasser gebracht hat (Dichte ϱ'), und bildet die Differenz. Das Cadmium absorbiert die thermischen Neutronen, die in dem Mittel und dem umgebenden Wasser entstehen und die Kugeloberfläche durchsetzen, es wirkt also als kugelförmige Neutronensenke. Daher muß für die genannte Differenz $\varrho - \varrho' = \varrho_0$ im Innern die Gleichung (1) gelten. Die kugelsymmetrische Lösung dieser Gleichung, die im Zentrum endlich bleibt, lautet

$$\varrho_0 = \text{const} \cdot \frac{l}{r} \operatorname{Sin} \frac{r}{l}. \qquad (3)$$

Hieraus bestimmt sich l. Nach (2) kann man dann den Absorptionsquerschnitt σ_a bestimmen, sofern der Streuquerschnitt σ_s bekannt ist.

3. Versuchsanordnung. Die Messungen wurden an reinstem Elektrographit der Dichte 1,7 ausgeführt. Der Aschengehalt wurde zu 0,09 % bestimmt. Die Asche wurde noch besonders auf Neutronenabsorption untersucht (Ziff. 5). Das Material stand in sauber bearbeiteten, ziemlich

---

[1]) Siehe die beiden folgenden Arbeiten. — [2]) Vgl. E. Amaldi, Phys. ZS. **38**, 692, 1937. — [3]) Wegen des exakten Ausdruckes für die Diffusionslänge vgl. W. Bothe, ZS. f. Phys. **118**, 401, 1941.

homogenen Blöcken zur Verfügung. Aus den passend zugesägten Blöcken wurde eine Kugel von 110 cm Durchmesser freitragend aufgebaut (Fig. 1). Nur die untersten Schichten wurden durch einen leichten Pilz aus Aluminium etwas zusammengehalten. Die Kugel stand auf einem 10 cm hohen Zylinder aus paraffiniertem Holz; dazwischen blieb ein Schlitz frei zum Einschieben von Cadmium. Das ganze war mit einer gut passenden, wasserdichten Gummihülle umgeben, die oben durch vier Falten geöffnet werden konnte, und stand auf einer starken Eisenplatte. An dieser konnte die Hebevorrichtung angebracht werden, um die Kugel in einen Wasserbehälter von 135 cm Durchmesser zu versenken. Die Wasserdicke betrug also auf allen Seiten mindestens 10 cm; dies ist die Sättigungsdicke für thermische Neutronen. Zwischen die Kohle und die Gummihülle konnte eine Cadmiumschicht gebracht werden. Diese bestand aus passend zugeschnittenen Streifen aus 0,5 mm dickem Cd-Blech, die sich etwas überlappten und mit Leukoplast zusammengehalten wurden.

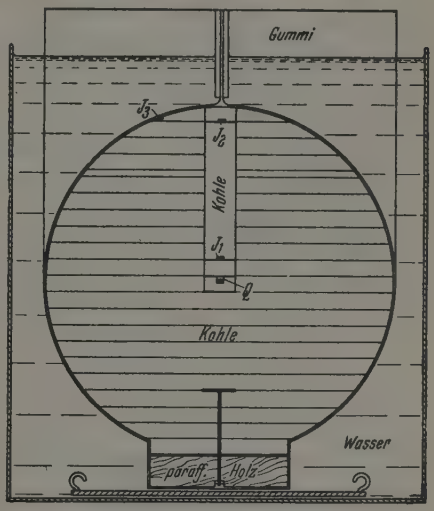


Fig. 1. Versuchsanordnung.

Zum Einbringen der Strahlenquelle und der Neutronensonden war in der Graphitkugel ein senkrechter quadratischer Kanal ausgespart, der durch gut passende Graphitblöcke wieder aufgefüllt werden konnte. In der Mitte der Kugel lag die Neutronenquelle Q. Als Quellen dienten Rn + Be-Präparate von rund 70 mC Anfangsaktivität. Solche Quellen zeigen erfahrungsgemäß häufig Schwankungen der Neutronenintensität, die offenbar mit Änderungen in der Lage des aktiven Niederschlages und des Berylliums zusammenhängen. Völlig konstante Quellen konnten auf folgende Weise erhalten werden. Aus dem Berylliumpulver wurden zylindrische, auf einer Seite zugespitzte, poröse Körper gepreßt

(Fig. 2). Diese wurden allseitig mit Glas umschmolzen, bis auf eine Füllkapillare an der Spitze.

Die Neutronendichte wurde an zwei Stellen gemessen, nämlich bei den Radien $r = 6$ und 50 cm. Hierzu dienten die Dysprosiumsonden J_1 und J_2. Bei einigen Messungen wurde eine dritte Sonde J_3 seitlich unmittelbar auf die Kohle gelegt. Die Sonden enthielten rund 24 mg Dy_2O_3 auf einer Kreisfläche von 2 cm Durchmesser. Ihr Empfindlichkeitsverhältnis wurde besonders bestimmt und ergab sich gleich dem Verhältnis der Dy-Mengen. Das Dy_2O_3 war auf dünne Aluminiumbleche aufsedimentiert. Kontrollversuche zeigten, daß die Aktivität des Aluminiums nicht störte.

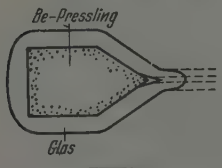


Fig. 2.
Konstante Rn + Be-Quelle.

4. Messungen. Die Sonden wurden über Nacht in der Kohlekugel gelassen und am nächsten Tage je 160 min lang gemessen. Hierzu wurden sie in gut definierter Lage vor ein dünnwandiges Al-Zählrohr gebracht. Die Empfindlichkeit des Zählrohres wurde ständig mit einem Eichpräparat von U + UX kontrolliert. Die Anfangsaktivität betrug maximal 200 Ausschläge/min bei einem Nulleffekt von rund 8/min. Kleine Korrektionen waren anzubringen für ausgelassene Zählerausschläge ($< 2\,\%$), Sättigungsmangel der Aktivierung, eventuell Restaktivität von einer früheren Bestrahlung und kleine Unterschiede in der Empfindlichkeit der Sonden. Alle Messungen einer Reihe wurden auf die Anfangsstärke der Quelle umgerechnet. Die so korrigierten Ausschläge stellen ein Maß für die lokale Dichte der thermischen Neutronen dar, da die Sonden alle Bedingungen für eine saubere Dichtemessung erfüllen[1]). Auch störende Randeffekte, die von der Grenzfläche Kohle-Wasser ausgehen könnten[2]), sollten mindestens für die Sonden J_1 und J_2 nicht auftreten, da die Abstände von der Grenzfläche wesentlich größer als die Streuweglänge von knapp 3 cm sind. Die Sonde J_3 diente lediglich der Feststellung, ob in der Grenzfläche selbst solche Störungen nachweisbar sind. Auf der anderen Seite könnte im Mittelpunkt eine Störung dadurch eintreten, daß das Glas der Neutronenquelle einige thermische Neutronen absorbiert und dadurch die Dichte ϱ_0 senkt. Nach früheren Überlegungen[1]) kann sich jedoch eine solche Störung bei den gewählten Abständen r praktisch nicht mehr auswirken.

[1]) W. Bothe, ZS. f. Phys. **120**, 437, 1943. — [2]) W. Bothe, ZS. f. Phys. **118**, 401, 1941.

Tabelle 1. Beispiel einer Meßreihe.

	$r_1 = 6$ cm	$r_2 = 50$ cm	$r_3 = 55$ cm
Ohne Cd	$\varrho_1 = 31850$	$\varrho_2 = 9780$	$\varrho_3 = 7320$
Mit Cd	$\varrho_1' = 26820$	$\varrho_2' = 3112$	$\varrho_3' = 244$
Differenz	$\varrho_{01} = 5030$	$\varrho_{02} = 6668$	$\varrho_{03} = 7076$

$$\frac{\varrho_{02}}{\varrho_{01}} = 1{,}32 \pm 0{,}09; \qquad \frac{\varrho_{03}}{\varrho_{02}} = 1{,}06 \pm 0{,}04.$$

Tabelle 1 gibt eine Meßreihe wieder. Diese Zahlen lassen folgendes erkennen. Ohne Cd fällt die Neutronendichte in der Kohle nach außen hin stark ab. Ein sehr großer Teil dieser Neutronendichte bleibt aber auch bestehen, wenn man die Kohle mit Cd umgibt. Dieser Teil rührt von Neutronen her, die in der Kohle selbst auf thermische Geschwindigkeit abgebremst werden. Hierin kommt die beträchtliche Bremswirkung der Kohle zum Ausdruck. Die Differenz mit und ohne Cd zeigt dagegen einen deutlichen Anstieg nach außen hin. Diese Differenz rührt von Neutronen her, die aus dem umgebenden Wasser in das Innere der Kugel diffundieren. Hierbei tritt eine deutliche Absorption ein.

Mehrere derartige Meßreihen ergaben das Gesamtresultat

$$\frac{\varrho_{02}}{\varrho_{01}} = 1{,}36 \pm 0{,}05; \qquad \frac{\varrho_{03}}{\varrho_{02}} = 1{,}12 \pm 0{,}03 \text{ (m.F.)}.$$

Aus der ersten dieser beiden Zahlen berechnet man nach Gleichung (3) die Diffusionslänge

$$l = 36 \pm 2 \text{ cm}$$

Mit diesem Wert ergibt sich für die zweite Zahl der theoretische Wert 1,06, in naher Übereinstimmung mit dem gemessenen. Wenn somit der Dichteverlauf in der Nähe der Oberfläche überhaupt von dem theoretischen abweicht, so sind diese Randeffekte so schwach, daß der obige Wert der Diffusionslänge dadurch nicht merklich gefälscht sein kann, zumal die äußere Sonde J_2 um fast die doppelte Streuweglänge von der Oberfläche entfernt war.

5. Untersuchung der Asche. Es war noch festzustellen, wie weit die beobachtete Absorption dem Kohlenstoff selbst oder den Verunreinigungen zukommt. Hierzu wurde die Asche geprüft. Eine Durchschnittsprobe von 3,6 kg der Kohle wurde im Platinofen vorsichtig verascht und hinterließ dabei 3,3 g Asche. Diese wurde zu einer Scheibe von 2,3 cm Durchmesser und 0,6 cm Dicke gepreßt. Das Absorptionsvermögen dieser Scheibe für thermische Neutronen wurde gemessen. Die hierbei

benutzten Sonden enthielten 250 mg Dy_2O_3 je cm². Das Aschescheibchen lag unmittelbar auf der Sonde, so daß etwa ein Viertel der Streustrahlung mitgemessen wurde. Die Neutronenquelle war ein Rn + Be-Präparat in einem 10 cm-Paraffinwürfel in 10 cm Abstand von der Sonde. Die gemessene Absorption, korrigiert für schrägen Strahlengang, betrug $12{,}5 \pm 1{,}5\,\%$. Hiervon geht noch der mitgemessene Anteil der Streuabsorption ab, der nach der Aschenanalyse der Lieferfirma zu 5,5 % veranschlagt werden kann. Als echte Absorption bleiben somit 7 %. Dieser Betrag kann durch die analytisch nachgewiesenen Elemente erklärt werden.

6. Auswertung und Ergebnis. Für den Streuquerschnitt σ_s des C-Kernes für thermische Neutronen sind Werte zwischen 4,1 und $4{,}8 \cdot 10^{-24}$ cm² gemessen worden[1]). Wir rechnen mit $\sigma_s = 4{,}5 \cdot 10^{-24}$ cm². Bei einer Packdichte von 1,68 ergibt dies $\lambda_s = 2{,}6$ cm. Mit der hier gefundenen Diffusionslänge $l = 36$ cm würde sich daher nach Gleichung (2) die Absorptionsweglänge $\lambda_a = 1480$ cm und der Absorptionsquerschnitt $\sigma_a = 8 \cdot 10^{-27}$ cm² berechnen. Hiervon entfällt jedoch ein Teil auf die Verunreinigungen. Die untersuchte Aschenschicht hatte eine Fläche von 4,15 cm² und absorbierte 7 %, die absorbierende Querschnittsumme der Aschenmenge war also $4{,}15 \cdot 0{,}07 = 0{,}29$ cm². Dieser Wert gehört zu einer veraschten Kohlemenge von 3,6 kg. Auf ein Kohlenstoffatom kommen daher $1{,}6 \cdot 10^{-27}$ cm². Dies von dem obigen Wert σ_a abgezogen, ergibt den Absorptionsquerschnitt des reinen mittleren C-Atoms[2])

$$\sigma_a = (6{,}4 \pm 1) \cdot 10^{-27}\ \text{cm}^2.$$

Ob diese Absorption dem C^{12}- oder C^{13}-Kern zugehört, ist vorläufig nicht zu entscheiden. Im zweiten Falle würde der Absorptionsquerschnitt des C^{13}-Kernes $0{,}6 \cdot 10^{-24}$ cm² betragen.

Die Diffusionslänge für die reine Kohle berechnet man mit dem korrigierten σ_a nach (2) zu $l = 40$ cm oder

$$l = (67 \pm 4)\ \text{g/cm}^2.$$

Es besteht noch eine schwache Möglichkeit, daß mit der Asche nicht alle Verunreinigungen, wie z. B. winzige Mengen von Bor, erfaßt

[1]) I. R. Dunning u. Mitarb., Phys. Rev. **48**, 265, 1935; M. Goldhaber u. G. H. Briggs, Proc. Roy. Soc. London (A) **162**, 127, 1937; M. D. Whitaker u. W. C. Bright, Phys. Rev. **60**, 155, 1941. — [2]) Wie uns Herr K. Diebner mitteilt, ist das abweichende Zitat dieses Ergebnisses in Phys. ZS. **43**, 440, 1942 vermutlich durch einen Druckfehler entstanden.

wurden, obwohl beim Veraschen nicht annähernd die hohe Temperatur erreicht wurde, der das Material schon beim Herstellungsprozeß ausgesetzt war. Der angegebene Absorptionsquerschnitt könnte daher eher zu hoch, die Diffusionslänge eher zu klein sein.

Frisch, Halban und Koch[1]) haben nach einer grundsätzlich anderen Methode eine obere Grenze von 10^{-26} cm^2 für den Absorptionsquerschnitt des C-Kernes gefunden. Dies ist mit unserem Ergebnis im Einklang.

Zusammenfassung. Für den Absorptionsquerschnitt σ_a und die Diffusionslänge l thermischer Neutronen in reiner Kohle wurden folgende Werte gemessen:

$$\sigma_a = (6{,}4 \pm 1) \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2; \quad l = (67 \pm 4) \text{ g/cm}^2.$$

Heidelberg, Institut für Physik am Kaiser Wilhelm-Institut für medizinische Forschung, 14. Januar 1944.

[1]) O. R. Frisch, H. v. Halban u. J. Koch, Dansk. Vidensk. Selskab. XV, Nr. 10, 1937.

Die Bremsung von Neutronen in Kohlenstoff, Wasser und schwerem Wasser[1]).

Von Peter Jensen in Heidelberg.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 21. Januar 1944.)

Es werden die mittleren Bremslängen für Neutronen in Kohle und schwerem Wasser mit verschiedenen Neutronenquellen gemessen. Aus diesen Bremslängen und der von H_2O werden mittlere effektive Streuquerschnitte abgeleitet, mit deren Hilfe die Bremslängen aller aus H, D, C und O zusammengesetzten Stoffe berechnet werden können.

1. Einleitung. Um das Bremsvermögen eines Stoffes für Neutronen zu kennzeichnen, ist es zweckmäßig, seine mittlere „Bremslänge" anzugeben. Diese sei folgendermaßen definiert: Es sei eine punktförmige Quelle schneller Neutronen in dem streuenden, homogenen, unendlich ausgedehnten Mittel gegeben. Die Neutronen, die die Anfangsenergie E_0 haben sollen, diffundieren, Energie verlierend, auseinander. Die Bremslänge $B(E_0, E)$ sei dann die Wurzel aus dem mittleren Quadrat des Abstandes r, den die Neutronen von der Quelle haben, wenn sie von der Primärenergie E_0 auf die gegebene Energie E abgebremst sind:

$$B^2 = \overline{r^2} = \int_0^\infty \varrho\, r^4\, \mathrm{d}r \Big/ \int_0^\infty \varrho\, r^2\, \mathrm{d}r. \tag{1}$$

Dabei ist $\varrho\, \mathrm{d}E$ die Dichte derjenigen Neutronen, die in das Energieintervall $\mathrm{d}E$ bei E *eintreten*. Außer von E_0 und E hängt die Bremslänge offenbar von den Eigenschaften der Bremssubstanz ab, nämlich von den Massen, Konzentrationen und Streuquerschnitten der Atomkerne.

Wegen der großen Bedeutung der thermischen Neutronen ist die „totale" Bremslänge besonders wichtig (E = thermische Energie). Bei Messungen der totalen Bremslänge ist zu beachten, daß die bei r entstehenden thermischen Neutronen nicht von den aus anderen Bereichen herzudiffundierenden zu unterscheiden sind. Da nun die thermische Diffusionslänge sehr wohl von derselben Größenordnung wie die Bremslänge sein kann, würde man letztere zu groß finden, wenn man einfach die Dichteverteilung der thermischen Neutronen messen wollte. Man kann aber so vorgehen, daß man zunächst eine „partielle" Bremslänge bestimmt, indem man die Dichte von fast thermischen Resonanz-

[1]) Die hier beschriebenen Versuche waren im Juli 1942 abgeschlossen. Die Veröffentlichung verzögerte sich aus äußeren Gründen.

neutronen mißt, z. B. mit Rhodium- oder Indiumsonden, und für die weitere Abbremsung auf thermische Energie rechnerisch korrigiert. Für die Resonanzneutronen spielt nämlich im wesentlichen die Streuweglänge die Rolle der Diffusionslänge, und diese ist zu vernachlässigen. Auf diese Weise sind im folgenden alle Bremslängen bestimmt.

Aus der Definition (1) der Bremslänge geht hervor, daß man im allgemeinen zu ihrer Messung so viel Material braucht, daß die weitaus meisten der von der Quelle gelieferten Neutronen auf die Energie E abgebremst werden, ehe sie aus dem Bremskörper hinausdiffundieren. Hieran liegt es zum Teil, daß bisher fast nur Bremslängen in stark wasserstoffhaltigen Stoffen gemessen worden sind. In manchen Fällen ist es aber angebracht, andere Bremsmittel zu verwenden[1]). Da man über deren Bremsvermögen noch nichts Sicheres weiß, wurden die im folgenden beschriebenen Messungen der Bremslänge in zwei weiteren leichtatomigen Stoffen, Kohle und schwerem Wasser, gemacht. Neben der Abhängigkeit der Bremslänge vom Material wurde ferner noch die Abhängigkeit von der Primärenergie E_0 untersucht. Dazu wurden Neutronen von Ra + Be und von den Reaktionen C + D und D + D verwendet.

Diese Messungen und die bereits vorliegenden an H_2O ermöglichen es, die Bremslängen aller aus H, D, C und O zusammengesetzten Stoffe annähernd zu berechnen. Hierzu muß auf die Theorie der Bremsung etwas näher eingegangen werden. Es seien die vereinfachenden Annahmen gemacht, daß der einzelne Streuprozeß isotrop verläuft, und daß bei jedem Streuprozeß das Neutron auf denselben Bruchteil $1/q$ seiner Energie abgebremst wird, wo

$$q = \frac{(M+1)^2}{M^2+1}, \tag{2}$$

M = Massenzahl des streuenden Kerns. Die Zahl n der Stöße, die zur Abbremsung nötig sind, ist dann

$$n = \frac{\log (E_0/E)}{\log q}. \tag{3}$$

In Anlehnung an bekannte Formeln der Diffusionstheorie kann man nun schreiben

$$B^2 = \overline{r^2} = 6 \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu t_\nu,$$

wo t_ν die Zeit zwischen dem $(\nu-1)$-ten und dem ν-ten Stoß ist, und D_ν der Diffusionskoeffizient, der durch die Geschwindigkeit v_ν und die

[1]) Vgl. z. B. Ziff. 1 der vorstehenden Arbeit.

Streuweglänge λ_ν bestimmt ist. λ_ν hängt im allgemeinen wieder von der Geschwindigkeit ab. Es gilt

$$D_\nu = \frac{1}{3}\lambda_\nu v_\nu; \quad t_\nu = \frac{\lambda_\nu}{v_\nu},$$

also schließlich

$$B^2 = 2\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^2. \tag{4}$$

Hierfür kann man auch schreiben

$$B^2 = 2n\lambda^2 = \frac{2n}{(N\sigma)^2} = \frac{2\log(E_0/E)}{(N\sigma)^2 \log q}, \tag{5}$$

wo λ eine gewisse mittlere Streuweglänge, σ einen mittleren Streuquerschnitt und N die Zahl der streuenden Kerne im cm³ bezeichnet. σ kann man daher aus der in den elementaren Stoffen gemessenen Bremslänge berechnen und erhält durch eine einfache Verallgemeinerung der Gleichungen (3) und (5) für eine Mischung verschiedener Atomarten (Index i) die schon von Bothe angegebene Formel[1])

$$B^2 = \frac{2\log(E_0/E)}{\sum N_i\sigma_i \sum N_i\sigma_i \log q_i}. \tag{6}$$

Diese Formel läßt sich auch als „Mischungsregel" schreiben. Es ist nach (5)

$$B_i^2 = \frac{2\log(E_0/E)}{(N_i\sigma_i)^2 \log q_i},$$

wo B_i die Bremslänge für den Fall ist, daß allein die i-Atome vorhanden wären. Dann wird

$$\frac{1}{B^2} = \sum \frac{1}{B_i\sqrt{\log q_i}} \sum \frac{\sqrt{\log q_i}}{B_i} \tag{7}$$

oder auch

$$\frac{1}{B^2 \sum N_i\sigma_i} = \sum \frac{1}{B_i^2 N_i\sigma_i}. \tag{8}$$

Die Gleichungen (6), (7) und (8) gelten exakt nur dann, wenn alle σ_i in gleicher Weise von der Geschwindigkeit abhängen. Weiter ist hier vorausgesetzt, daß die Streuquerschnitte nicht von der chemischen Bindung abhängen. Dies wird für den Energiebereich zwischen E_0 und 0,9 e-Volt (Resonanzenergie des Rh und In) zutreffen, aber nicht notwendig für kleinere Energien. Die in Ziff. 4 und 5 berechneten mittleren Querschnitte sind deshalb auf den genannten Bereich bezogen.

2. Methode der Kohlenstoffmessungen. Wollte man die Bremslänge in Kohlenstoff auf dem in Ziff. 1 erwähnten, direkten Wege bestimmen,

[1]) W. Bothe, ZS. f. Phys., im Druck.

so müßte man sicher einen Bremskörper von einigen Kubikmetern Graphit verwenden. Ein so großer Materialaufwand läßt sich vermeiden, wenn man nach der folgenden Überlegung vorgeht[1]):

Wir gehen von einem unendlich ausgedehnten Körper aus, in dem sich die Quelle der schnellen Neutronen befindet. Die Dichte der fastthermischen Neutronen in ihm sei $\varrho\,(r)$. Wir denken uns zu der Quelle eine gleich starke negative Quelle in einem kleinen Abstand parallel zur x-Richtung hinzugefügt; dann ist die Dichte jetzt proportional zu $\partial\,\varrho/\partial\,x$, und sie verschwindet in der Symmetrieebene des Dipols (yz-Ebene). Nimmt man daher die auf der negativen Seite der Ebene gelegene Körperhälfte und die negative Quelle weg, so bleibt die Dichte in der anderen Hälfte unverändert, denn die Quellenverteilung in diesem Halbraum ist unverändert geblieben und die Randbedingung „Dichte = 0 in der Grenzfläche" ist nach wie vor erfüllt. Auf diese Weise spart man bereits die Hälfte des ursprünglich erforderlichen Materials und gewinnt die gesuchte Dichte ϱ einfach durch Integration der im Halbraum gemessenen. Dies gilt unabhängig von der Beschaffenheit der Funktion ϱ.

Ist die Bremssubstanz aber hinreichend schweratomig, so kann man noch einen Schritt weitergehen. In diesem Fall ist nämlich, wie Bothe[2]) und H. Jensen[3]) gezeigt haben, für ϱ annähernd eine Gauß-Verteilung zu erwarten:

$$\varrho = \text{const}\, e^{-(r/r_0)^2}.$$

Für den Halbraum mit der Grenzfläche $x = 0$ wird daher die Dichteverteilung proportional zu

$$\frac{\partial\,\varrho}{\partial\,x} = \text{const}\, x\, e^{-(r/r_0)^2}.$$

Wir betrachten nun in dem mit Substanz erfüllten Halbraum ein quadratisches Prisma, dessen Grundfläche in der Grenzebene liegt und im Zentrum die Quelle enthält. Die Achse des Prismas soll mit der x-Achse zusammenfallen. Mittels unendlich vieler positiver und negativer Quellen von gleicher Stärke, die spiegelbildlich zu der ursprünglichen in der Grenzebene angeordnet zu denken sind, wie Fig. 1 zeigt, kann die Dichte auf den Seitenflächen des Prismas zum Verschwinden gebracht werden. Nimmt man daher die umhüllende Substanz und die

[1]) Dieses Verfahren wurde von Herrn Prof. Bothe vorgeschlagen. — [2]) W. Bothe, a. a. O. — [3]) H. Jensen, unveröffentlicht.

fiktiven Quellen weg, so bleibt die Dichte im Prisma unverändert, sie ist also nach dem obigen proportional zu

$$\sum_k \frac{\partial \varrho_k}{\partial x} = \text{const}\, x \sum_k e^{-\frac{x^2+(y-y_k)^2+(z-z_k)^2}{r_0^2}}$$

wobei y_k, z_k die Koordinaten der k-ten Quelle sind. Wenn man nun in der x-Richtung mißt und y, z konstant hält, so erhält man eine Dichteverteilung

$$N(x) = \text{const}\, x\, e^{-(x/r_0)^2},$$

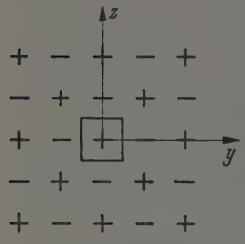


Fig. 1. Positive und negative Quellen in der Grenzebene des Halbraumes.

und das ist genau dieselbe Verteilung wie im vollständigen Halbraum. Die Prismenflächen beeinflussen also nur die absolute Dichte, nicht die Form der Verteilung in der x-Richtung. Auf diese Weise ist es möglich, die Bremslänge mit einem Prisma zu messen, von dem nur die Höhe groß gegen B zu sein braucht; $2B$ wird im allgemeinen als Höhe genügen. Aus Intensitätsgründen wird man natürlich den Querschnitt möglichst groß wählen.

3. Messungen in Kohlenstoff. Nach diesem Verfahren wurden nun einige (totale) Bremslängen in Graphit bestimmt. Auf Grund einer vorläufigen Schätzung wurde ein Kohleprisma von 120 cm Höhe als ausreichend erachtet, der Querschnitt war 60×60 cm². Das Prisma wurde aus Blöcken von reinstem Elektrographit aufgebaut, dessen Dichte 1,7 g/cm³ betrug, und der bereits zur Bestimmung des Einfangquerschnitts von Kohlenstoff gedient hatte (vgl. die vorstehende Arbeit).

Die Neutronenquellen befanden sich auf oder dicht über der oberen Prismenfläche. Als Primärneutronen wurden verwendet: 1. Die inhomogenen Neutronen einer Quelle von 500 mg Ra + Be; 2. die ziemlich homogenen Neutronen der C + D-Reaktion; mit einer Deuteronenenergie von 0,85 e-MV war ihre Energie 0,5 bis 0,6 e-MV; durch elektrisches Glühen der bestrahlten C-Schicht wurde die Bildung von störenden D + D-Neutronen verhindert; 3. die ziemlich homogenen Neutronen der D + D-Reaktion; mit $E_D = 0{,}85$ e-MV war ihre mittlere Energie rund 3,7 e-MV. Im letzten Falle wurde D_2O-Eis bestrahlt. In Fig. 2 ist die Neutronenquelle schematisch skizziert. Der 1,2 cm dicke Kupferstab Cu war in den inneren Teil des metallenen Vakuummantelgefäßes für die flüssige Luft eingelötet und dort kreis-

förmig umgebogen; links trug er eine Kupferplatte, die mit D_2O bedampft wurde. Das Dampfzuführungsrohr mit dem außen befindlichen Vorratsgefäß konnte geschwenkt werden, so daß es nicht vom Ionenstrahl getroffen wurde. Das Vakuummantelgefäß war seitlich angebracht, damit dieselben geometrischen Verhältnisse wie bei den anderen Neutronenquellen vorlagen.

Auf der Achse des Prismas wurde die Dichte der fast-thermischen Neutronen zum Teil mit Rhodium-Sonden (2×3 cm, 176 mg/cm²), zum Teil mit Indium-Sonden (1×2 cm, 76 mg/cm²) gemessen, die in Cadmium eingeschlossen waren. Die Resonanzenergien von Rh (44 sec) und In (54 min) sind beide 0,9 e-Volt; Vergleichsmessungen lieferten in der Tat übereinstimmende Ergebnisse. Bei den kleinsten Abständen zwischen Quelle und Sonde traten auch ohne Bremssubstanz im Rh und In und in den Al-Scheibchen, die die 0,1 mm starken In-Folien trugen, merkliche Aktivitäten auf, die von schnellen Neutronen herrührten und bei der Auswertung der Messungen berücksichtigt wurden. Die Sonden standen immer senkrecht zur Prismengrundfläche. Es trafen also von beiden Seiten gleich viele Neutronen auf, so daß nur eine Seite gemessen zu werden brauchte. An Stellen starken Gefälles wurden allein die In-Sonden verwendet, die nur über 1 cm mittelten. Um bei den Messungen mit den C + D- und D + D-Neutronen trotz der schwankenden Deuteronenstromstärke, die 20 bis 30 μA betrug, vergleichbare Aktivitäten zu bekommen, wurde jeweils außer der Meßsonde noch eine zweite Sonde an einem festen Punkt mitbestrahlt und ebenfalls gemessen, so daß alle Werte auf gleiche Exposition bezogen werden konnten. Die Aktivität der Sonden wurde mit dem Zählrohr in der üblichen Weise gemessen.

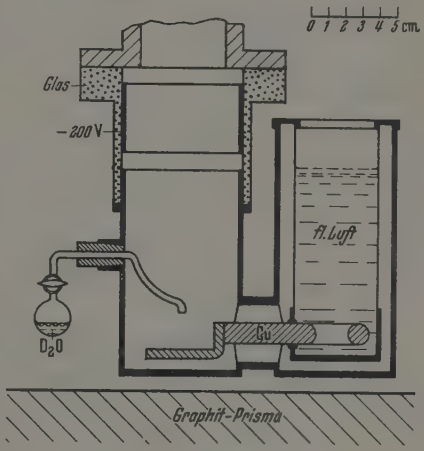


Fig. 2. D + D-Neutronenquelle.

4. Ergebnisse für Kohlenstoff. Fig. 3 zeigt den Verlauf der gemessenen relativen Dichte $N(x)$ der 0,9 e-Volt-Neutronen auf der

Achse des Graphitprismas als Funktion des Abstandes x von der Prismenendfläche. Die drei mit den verschiedenen Neutronenquellen gemessenen Kurven sind auf dieselbe Höhe des Maximums gebracht. Die Meßpunkte und mittleren Fehler sind bei der C + D- und der D + D-Kurve nicht eingezeichnet, sie haben dieselbe Genauigkeit wie die Ra + Be-Kurve.

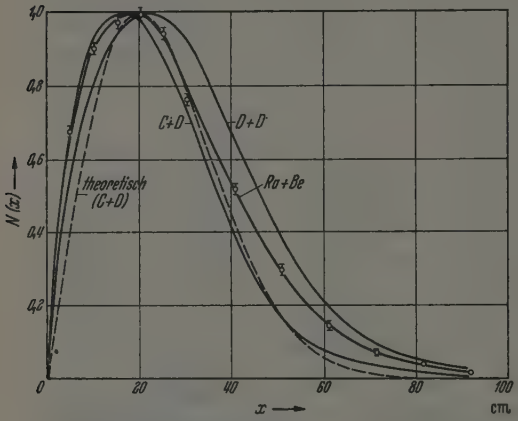


Fig. 3. Relative Dichte der Rh- und In-Resonanzneutronen auf der Achse des Graphitprismas für drei Primärneutronenspektren. Theoretische Kurve $N(x) = 0{,}082\, x\, e^{-(x/28{,}5)^2}$.

Da die gemessene Dichte am Rande nicht streng Null ist, wurde für den Anfang der Kurven eine Fermi-Korrektion angebracht, und zwar wurde auf Grund der Ergebnisse von Amaldi und Fermi[1]) und eigener Messungen angenommen, daß die extrapolierte Dichtekurve im Abstand einer Weglänge der Resonanzneutronen von der Oberfläche auf Null geht; von hier aus wurde dann x gerechnet. (Für thermische Neutronen ist dieser Abstand bekanntlich gleich $\lambda_{\text{therm}}/\sqrt{3}$.)

Zum Vergleich mit der in Ziff. 2 dargelegten Theorie ist in Fig. 3 ferner eine theoretische Kurve $c\, x\, e^{-(x/r_0)^2}$ gestrichelt eingezeichnet. Die verfügbaren Konstanten c und r_0 wurden so bestimmt, daß das Maximum und der Verlauf in dem Gebiet $20 \leqq x \leqq 60$ cm dem der C + D-Kurve möglichst nahekommt. Bei den kleineren und besonders den größeren x-Werten liegt die gemessene Kurve deutlich über der theoretischen, d. h. die in Ziff. 2 eingeführte Dichte ϱ weicht von der Gauß-Verteilung ab, was nach der Theorie von Bothe (a. a. O.) auch für Kohlenstoff zu erwarten ist. Das in Ziff. 2 dargelegte Meßprinzip wird also im Falle des Kohlenstoffs nicht genau die richtige Bremslänge liefern, da es ja die Gauß-Verteilung voraussetzt. Der Fehler kann aber nicht sehr groß sein, denn nach demselben Prinzip versuchsweise

[1]) E. Amaldi u. E. Fermi, Ric. Scient. II, 1, 494, 1936.

durchgeführte Messungen an H_2O, bei dem die Abweichungen von der Gauß-Verteilung sehr viel stärker sind, führten zu einer nur um 40 % zu großen Bremslänge für H_2O (vgl. Ziff. 5).

Die Maxima der drei experimentellen Kurven von Fig. 3 liegen bei 16,5, 19 und 22,5 cm. Die Halbwertbreiten betragen 34,5, 38,5 und 42,5 cm. Die Breite der D + D-Kurve ist also trotz der weitgehenden Homogenität der Primärneutronen deutlich größer als die der Ra + Be-Kurve. Man erkennt gut, wie die Ra + Be-Kurve bei kleineren x-Werten mehr der C + D-Kurve, bei großen x-Werten mehr der D + D-Kurve nahekommt, was auf Grund des komplexen Ra + Be-Spektrums verständlich ist.

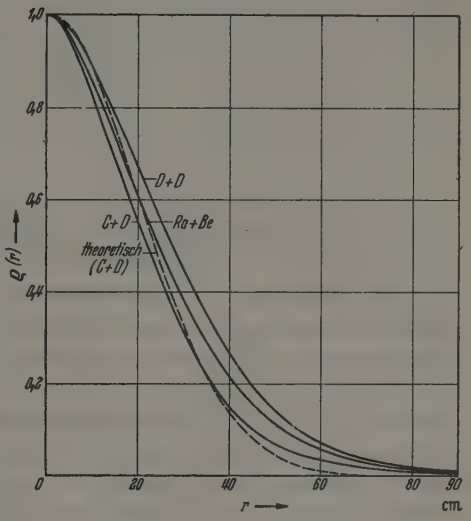


Fig. 4.
Relative Dichte der Resonanzneutronen im unendlich ausgedehnten Graphitkörper für drei Primärneutronenspektren. Theoretische Kurve $\varrho(r) = e^{-(r/28{,}5)^2}$.

Zur Auswertung der Messungen wurden nun zunächst die $\overline{r^2}$-Werte für die 0,9 e-Volt-Neutronen berechnet, d. h. die gemessenen Kurven $N(x)$ wurden zur Gewinnung von ϱ graphisch integriert, und dann wurde gemäß der Definition (1) von $\overline{r^2}$ verfahren. Dazu war es nötig, die gemessenen Kurven über $x = 90$ cm hinaus zu extrapolieren; am besten eigneten sich hierzu wieder Funktionen vom Typus $c\,x\,e^{-(x/r_0)^2}$, jedoch mit anderen Konstanten als bei der eingezeichneten theoretischen Kurve. Da diese Extrapolation etwas willkürlich ist, sind die Absolutwerte der Bremslängen nicht so sicher wie die relativen Unterschiede der Bremslängen für die drei Primärneutronenspektren. Die aus den Kurven von Fig. 3 durch Integration gewonnenen Funktionen $\varrho(r)$ für den unbegrenzten Körper sind in Fig. 4 dargestellt.

Die Korrektion für die restliche Verlangsamung von 0,9 auf 0,025 e-Volt wurde nach Gleichung (5) berechnet. Das Zusatzglied

$\Delta (B^2) = 2 \lambda^2 \Delta n$ ergibt sich für Kohlenstoff der Dichte 1,7 g/cm³ mit einem mittleren Streuquerschnitt von $4{,}5 \cdot 10^{-24}$ cm² und $\Delta n = 23$ zu 310 cm².

Endlich ist noch zu berücksichtigen, daß die Messungen im Hochspannungsraum des Institutes gemacht wurden, wo es aus räumlichen Gründen unvermeidlich war, daß einige Neutronen seitlich in das Kohleprisma hineingestreut wurden. Der hierfür anzubringende Korrektionsfaktor wurde dadurch bestimmt, daß die Bremslänge für die Ra + Be-Neutronen auch in einem anderen Raum mit freistehendem Prisma gemessen wurde. Die endgültigen (totalen) Bremslängen ergeben sich damit zu

59,2 cm = 101 g/cm² für die C + D-Neutronen,
62,6 cm = 106 g/cm² für die Ra + Be-Neutronen,
63,7 cm = 108 g/cm² für die D + D-Neutronen.

Vergleicht man diese Bremslänge von rund 60 cm mit der von Wasser (17 cm) so erkennt man die große Überlegenheit der wasserstoffhaltigen Bremsmittel. Denn das bremsende Volumen, das man braucht, um einen gewissen Bruchteil der primären Neutronen zu verlangsamen, wird ja stark mit der Bremslänge wachsen. Das bedeutet bei den wasserstofffreien Bremsmitteln nicht nur einen großen Platz- und Materialaufwand, sondern auch eine geringe Dichte der verlangsamten Neutronen.

Der geringe Unterschied von 7 % zwischen den Bremslängen der C + D- und der D + D-Neutronen ist angesichts der sehr verschiedenen Primärenergien (0,55 bzw. 3,7 e-MV) bemerkenswert, aber nach Gleichung (5) zu erwarten, denn die Wurzeln aus den Stoßzahlen für totale Abbremsung ($n = 110$ für die C + D-, $n = 123$ für die D + D-Neutronen) unterscheiden sich nur um $5^1/_2{}^0/_0$, und der mittlere Streuquerschnitt wird hier nur sehr wenig mit der Primärenergie variieren.

Für den in Ziff. 1 eingeführten mittleren effektiven Streuquerschnitt des C-Kerns erhält man nach Gleichung (5) für die C + D-Neutronen $\sigma = 2{,}73 \cdot 10^{-24}$ cm² und für die D + D-Neutronen $\sigma = 2{,}70 \cdot 10^{-24}$ cm². [Diese Werte beziehen sich auf den Energiebereich von 0,9 e-Volt bis zur Primärenergie; es ist also vom Quadrat der obigen B-Werte die Korrektion $\Delta (B^2) = 310$ cm² wieder abgezogen.]

Die nahe Übereinstimmung der beiden σ-Werte läßt es berechtigt erscheinen, denselben Streuquerschnitt $2{,}72 \cdot 10^{-24}$ auch für die stark

inhomogenen Ra + Be-Neutronen anzunehmen und damit deren mittlere Energie auszurechnen. Man erhält $\overline{E_0} = 2{,}7$ e-MV statt des sonst im allgemeinen angenommenen Wertes von 4 e-MV. Der energiearme Anteil des Ra + Be-Spektrums ist also für die Bremslänge stark bestimmend.

5. Messungen und Ergebnisse mit H_2O *und* D_2O. Für die Messung mit schwerem Wasser standen 40 kg D_2O zur Verfügung, so daß ein quadratisches Prisma von 26 cm Seitenlänge und 52 cm Höhe hergestellt werden konnte. Als Gefäß diente ein innen verzinnter Messingkanister, in den axial eine flache Scheide zum Einführen der Rh- oder In-Sonden eingelötet war.

Es war nun zuerst zu prüfen, ob die Prismenmethode von Ziff. 2 auch für die sehr leichtatomigen Stoffe geeignet ist. Daher wurde zunächst H_2O nach dieser Methode untersucht. Dabei zeigten sich so starke Abweichungen von der theoretischen Kurvenform, daß mit einem Versagen der Theorie zu rechnen war. In der Tat ergab sich für Ra + Be-Neutronen eine Bremslänge von 24 cm, während der in kugelsymmetrischer Anordnung von Amaldi und Fermi[1]) gemessene Wert 17 cm beträgt. Die Prismenmethode führt hier also zu falschen Ergebnissen, offenbar weil die Dichte ϱ zu stark von der Gauß-Verteilung abweicht. Dies liegt wiederum daran, daß für H_2O die Voraussetzungen: isotrope Streuung, einheitliche Bremsverluste und große Stoßzahl besonders schlecht erfüllt sind.

Eine Möglichkeit, trotzdem mit der vorhandenen D_2O-Menge eine Bremslängenmessung auszuführen, ergab sich jedoch daraus, daß die Dichtekurven $N(x)$ im H_2O- und im D_2O-Prisma sich als weitgehend ähnlich erwiesen. Ein vorläufiger Versuch zeigte, daß die H_2O-Kurve bei passender Wahl des Ordinatenmaßstabes in die D_2O-Kurve zu überführen war, wenn man erstere um einen Faktor von ungefähr 2,6 in der x-Richtung dehnte; die Bremslängen in den beiden Stoffen werden dann etwa in demselben Verhältnis stehen.

Zu den endgültigen Messungen wurden das obige D_2O-Prisma und ein H_2O-Prisma von 10×10 cm² Querschnitt und 20 cm Höhe benutzt, um entsprechende geometrische Verhältnisse zu haben. Die Messungen wurden genau wie beim Kohlenstoff ausgeführt. Fig. 5 zeigt

[1]) E. Amaldi u. E. Fermi, Ric. Scient. II, 1, 485, 1936; E. Amaldi, Phys. ZS. 38, 706, 1937.

die Ergebnisse. Die D_2O-Kurve ist im Originalmaßstab dargestellt. Die H_2O-Kurve dagegen ist aus der gemessenen dadurch entstanden, daß die Abszissenwerte 2,7mal vergrößert wurden. Wie man sieht, sind die beiden Wasserkurven auf diese Weise weitgehend zur Deckung gebracht. Der Abszissenfaktor 2,7 wurde so gewählt, daß die Übereinstimmung besonders bei den größeren x-Werten gut ist, weil diese bei der Ableitung der Bremslänge einen großen Beitrag liefern. Dieser Faktor gibt nach dem obigen das Verhältnis der Bremslängen in D_2O

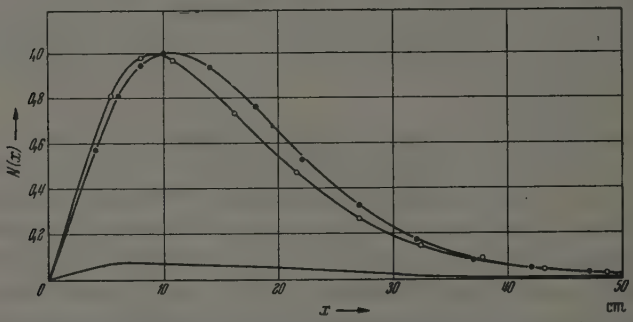


Fig. 5. Relative Dichte der Rh- und In-Resonanzneutronen: —●——●— im D_2O-Prisma 26 × 26 × 52 cm, Primärneutronen Ra + Be; —o——o— im H_2O-Prisma 10 × 10 × 20 cm, Primärneutronen Ra + Be, Ordinaten relativ zur D_2O-Kurve 2,8 mal verkleinert, Abszissen 2,7 mal vergrößert; ——— im D_2O-Prisma gebildete und abgebremste Photoneutronen von Ra γ, Maßstäbe wie bei der D_2O-Kurve.

und H_2O. Legt man den Fermischen Wert $B^2 = 277$ cm^2 für Rh-Resonanzneutronen in H_2O zugrunde, so erhält man für D_2O:

$$B = 45 \text{ cm}.$$

Dieser Wert erhöht sich durch Korrektion für vollständige Abbremsung auf thermische Energie nicht merklich.

Da die Messungen im D_2O mit der Ra + Be-Quelle gemacht wurden, entstanden auch Photoneutronen von D + Ra γ. Der von ihnen herrührende kleine Dichteanteil wurde mit einer Ra γ-Quelle bestimmt; er ist ebenfalls in Fig. 5 im Maßstab der D_2O-Kurve eingezeichnet und von dieser bereits abgezogen.

Der große Unterschied der Bremslängen in D_2O und H_2O ist insofern überraschend, als die Energieabgabe am Deuteron und Proton fast gleich groß ist und die anderweitig gemessenen Streuquerschnitte der beiden Kerne für schnelle Neutronen von einigen e-MV nicht sehr verschieden sind. Andererseits ist zu bedenken, daß die meisten Stöße in dem Energiegebiet unterhalb einiger 10^5 e-Volt stattfinden, wo der

Streuquerschnitt des Deuterons neben dem des Protons stark zurückbleibt. In Anbetracht seiner großen Bremslänge und seiner Kostspieligkeit scheidet schweres Wasser als Bremsmittel praktisch aus, obgleich es wegen seiner verschwindend geringen Neutronenabsorption für manche Zwecke sehr geeignet wäre.

Zur Ableitung mittlerer effektiver Streuquerschnitte aus den Wassermessungen bedient man sich der allgemeinen Formel (6) für B^2. Die Querschnitte werden auf den Energiebereich zwischen 0,9 e-Volt und der mittleren Energie der Ra + Be-Neutronen bezogen, die nach Ziff. 4 zu 2,7 e-MV angenommen wird. Die einzelnen Querschnitte von H und O können aus den Wassermessungen allein nicht abgeleitet werden. Man kommt aber folgendermaßen zu einem plausiblen σ-Wert für O: Aus der Literatur[1]) entnimmt man, daß das Verhältnis der Streuquerschnitte von O und C ziemlich energieunabhängig ist und rund 0,8 beträgt. Die hier betrachteten mittleren Querschnitte werden in demselben Verhältnis stehen. Mit dem obigen $\sigma_C = 2{,}72 \cdot 10^{-24}$ erhält man so $\sigma_O = 2{,}2 \cdot 10^{-24}$. Damit folgt für Wasserstoff $\sigma_H = 5{,}27 \cdot 10^{-24}$.

Beim D_2O ergibt sich, entsprechend wie beim H_2O, aus der hier gemessenen Bremslänge $\sigma_D = 1{,}77 \cdot 10^{-24}$, wobei wieder $\sigma_O = 2{,}2 \cdot 10^{-24}$ angenommen ist.

Die so erhaltenen Streuquerschnitte von H, C und O liegen befriedigend zwischen den aus der Literatur bekannten, direkt gemessenen Streuquerschnitten für schnelle und langsame Neutronen. Bei H und D ist dabei noch zu beachten, daß die einzelne Streuung praktisch nur unter Winkeln $< \pi/2$ erfolgt, während die Berechnung isotrope Streuung voraussetzt. Daher werden die berechneten Streuquerschnitte zu klein erscheinen, sie sind also nur in diesem Zusammenhange sinnvoll.

Zusammenfassung. Es wurden Bremslängen für Neutronen in Kohle und schwerem Wasser gemessen.

Die Kohlemessungen wurden nach einem von Bothe angegebenen, materialsparenden Verfahren ausgeführt und ergaben für Graphit die Bremslängenwerte: 101 g/cm² für C + D-Neutronen (Neutronenenergie rund 0,55 e-MV), 106 g/cm² für Ra + Be-Neutronen, 108 g/cm² für D + D-Neutronen (Neutronenenergie rund 3,7 e-MV).

Die für die Bremsung maßgebende effektive Energie der Ra + Be-Neutronen ergibt sich hieraus zu 2,7 e-MV.

---

[1]) K. Diebner, W. Herrmann u. E. Grassmann, Phys. ZS. 43, 440, 1942.

Die Bremslänge von D_2O wurde durch Vergleich mit H_2O zu 45 cm für Ra + Be-Neutronen bestimmt; dabei ist der Fermische Wert $B^2 = 277\ cm^2$ für H_2O zugrunde gelegt.

Aus den experimentellen Bremslängen werden die folgenden mittleren Streuquerschnitte für Neutronen im Energiebereich von etwa 2,7 e-MV bis 0,9 e-Volt abgeleitet (Einheit $10^{-24}\ cm^2$): 5,27 für H; 1,77 für D; 2,72 für C; 2,2 für O. Mit diesen effektiven Querschnitten können die Bremslängen aller aus H, D, C und O zusammengesetzten Stoffe angenähert berechnet werden (Ziff. 1).

Herrn Prof. Bothe, auf dessen Veranlassung hin diese Arbeit entstand, danke ich für zahlreiche Diskussionen.

Heidelberg, Institut für Physik am Kaiser Wilhelm-Institut für medizinische Forschung, Januar 1944.

Die Wechselwirkung von Neutronen und γ-Strahlen mit Beryllium[1]).

Von **E. Fünfer** und **W. Bothe** in Heidelberg.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 21. Januar 1944.)

In Berylliummetall wurden untersucht: Die Diffusionslänge thermischer Neutronen, die Neutronenvermehrung mit Ra α + Be- und Ra α + F-Neutronen und die Photoneutronen von der Ra γ-Strahlung. Hieraus werden Schlüsse auf die Wirkungsquerschnitte der in Frage kommenden Kernreaktionen gezogen.

1. Einleitung. Die nachstehende Untersuchung betrifft die Reaktionen

$$\mathrm{Be}^9(n,\gamma)\,\mathrm{Be}^{10};\quad Q = +6{,}8\ \text{e-MV}, \tag{1}$$

$$\mathrm{Be}^9(n,2n)\,\mathrm{Be}^8;\quad Q = -1{,}7\ \text{e-MV}, \tag{2}$$

$$\mathrm{Be}^9(n,\alpha)\,\mathrm{He}^6;\quad Q = -0{,}8\ \text{e-MV}, \tag{3}$$

$$\mathrm{Be}^9(\gamma,n)\,\mathrm{Be}^8;\quad Q = -1{,}7\ \text{e-MV}. \tag{4}$$

Über diese Reaktionen ist noch verhältnismäßig wenig bekannt. Es wurde versucht, über die Wirkungsquerschnitte dieser Prozesse Aufschlüsse zu erhalten. Die Reaktion (1) ist entscheidend für die Eignung des Berylliums als Bremsmittel zur Herstellung thermischer Neutronen[2]). Die Reaktion (2) interessiert deshalb besonders, weil Be^9 von allen Kernen die kleinste Neutronenbindungsenergie besitzt, nämlich nur 1,67 e-MV. Die Schwellenenergie für Reaktion (2) berechnet sich hieraus zu 1,86 e-MV. Die Reaktion (3) tritt mit (2) in Konkurrenz; ihre Schwellenenergie beträgt 0,9 e-MV[3]). Die Reaktion (4) spielt insofern mit hinein, als die hier verwendeten Neutronenquellen auch eine starke γ-Strahlung aussenden, deren Wirkung bei den Neutronenversuchen zu berücksichtigen ist.

2. Allgemeine Versuchsanordnung. Die Berylliumflitter befanden sich in einer Aluminiumhohlkugel von 45 cm Innendurchmesser und 0,4 cm Wandstärke. Um die zur Verfügung stehende Be-Menge von rund 26 kg möglichst auszunutzen, wurde das Material durch vorsichtiges Mahlen in einer Porzellan-Kugelmühle auf die Dichte 0,53 gebracht. Durch die Wand der Al-Kugel war radial ein flacher Aluminiumkanal von 3,2 × 0,35 cm lichter Weite geführt, der zur Aufnahme

[1]) Diese Untersuchung wurde im März 1942 abgeschlossen. Die Veröffentlichung verzögerte sich aus äußeren Gründen. — [2]) Vgl. W. Bothe u. P. Jensen, ZS. f. Phys. **122**, 749, 1944. — [3]) Die Energietönungen sind berechnet nach J. Mattauch u. S. Flügge, Kernphysikal. Tabellen. Berlin 1942.

von Dy-Sonden diente. Am unteren Ende des Kanals, in der Mitte der Kugel, war die Neutronenquelle von rund 500 mg Ra + Be befestigt. Die Quelle bestand aus einem Gemisch von $RaSO_4$ und Be-Pulver in einer dünnwandigen Nickelkugel. Das Sulfat wurde wegen seiner geringen Absorption für thermische Neutronen gewählt. Im übrigen wurde der Einfluß der Absorption in der Quelle besonders geprüft (Ziff. 3). Die große Al-Kugel konnte mit einem dicht anliegenden Mantel aus 0,5 mm Cadmiumblech umgeben werden. Das ganze war in einen Wassertank von 130 cm Durchmesser und 140 cm Höhe versenkt. Zur Messung der Dichte thermischer Neutronen dienten sorgfältig geeichte Dy-Sonden (rund 23 mg Dy_2O_3 auf einer Kreisfläche von 2 cm Durchmesser).

3. Die Diffusionslänge und der Einfangquerschnitt von Beryllium für thermische Neutronen. Der Wirkungsquerschnitt der Reaktion (1) mit thermischen Neutronen sollte aus der Diffusionslänge und dem bekannten Streuquerschnitt bestimmt werden. Die Diffusionslänge in Beryllium sollte, ebenso wie früher[1]) in Kohlenstoff, nach der Methode von Heisenberg gemessen werden. Um Störungen einerseits durch Randeffekte infolge anomaler Richtungsverteilung[2]), andererseits durch Neutronenabsorption in der Quelle zu vermeiden, wurden die Meßpunkte bei $r = 6{,}1$ cm und $r = 17{,}6$ cm gelegt. Die Entfernungen vom Rande und der Quelle betrugen also mehr als die Streuweglänge von 4,1 cm. Frühere (unveröffentlichte) Versuche mit Cadmium in Wasser hatten auch gezeigt, daß in der Nähe des Cd der Verlauf der Neutronendichte etwas vom theoretischen abweicht, möglicherweise (nach einer Bemerkung von Heisenberg) weil Cd auch die mittelschnellen Neutronen etwas absorbiert. Auch dieser Effekt dürfte hier ausgeschaltet sein. Diese Randeffekte sind schon bei Gelegenheit der oben erwähnten Kohlemessungen geprüft und ihre Unschädlichkeit unter den vorliegenden Bedingungen festgestellt worden. Zur Abschätzung der verbleibenden Störung durch die Quelle und ihre Halterung wurde außerdem noch bei $r = 4{,}1$ cm gemessen. Die Sonden wurden im allgemeinen 1 Stunde lang, bei kleinen Intensitäten auch bis zur Sättigung exponiert und 1 Stunde lang mit einem dünnwandigen Al-Zählrohr gemessen[3]). Dabei wurden auch Vertauschungen zwischen den Sonden

[1]) W. Bothe u. P. Jensen, a. a. O. — [2]) W. Bothe, ZS. f. Phys. 118, 401, 1941. — [3]) Bei den Umrechnungen wurde für die Halbwertzeit des Dy^{165} der Wert von 138 min benutzt (statt des Literaturwertes 2,5 h). Diesen Wert haben wir durch wiederholte, unabhängige Messungen gefunden.

vorgenommen, um auch die letzte Unsicherheit im Empfindlichkeitsverhältnis der Sonden auszuschalten. Die insgesamt in gleichen Zeiten gemessenen Teilchenzahlen sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1.

r cm	$r_1 = 17{,}6$	$r_2 = 6{,}1$	$(r_3 = 4{,}1)$
Ohne Cd	$\varrho_1 = 59360$	$\varrho_2 = 61880$	$(\varrho_3 = 59212)$
Mit Cd	$\varrho_1' = 2073$	$\varrho_2' = 5025$	$(\varrho_3' = 6052)$
Differenz	$\varrho_{01} = 57287$	$\varrho_{02} = 56855$	$(\varrho_{03} = 53160)$

Man sieht, daß zwischen $r = 17{,}6$ und 6,1 cm die Differenz ϱ_0 nur um $0{,}75 \pm 0{,}6\,\%$ abfällt. Dabei ist jedoch noch zu beachten, daß zwischen $r = 6{,}1$ und 4,1 cm schon ein viel steilerer Abfall um etwa 6 % auftritt. Dieser kann nicht auf Absorption im Be zurückgeführt werden (vgl. die untenstehende Formel); er wird offenbar hervorgerufen durch Absorption in den nicht unbeträchtlichen Aluminiummassen unterhalb des Sondenkanals, welche zur sicheren Halterung der Quelle nötig waren. Man kann annehmen, daß diese Störung sich auch bei $r = 6{,}1$ cm noch etwas bemerkbar macht. Daher erscheint es gerechtfertigt, als obere Grenze für den Unterschied $\varrho_{01} - \varrho_{02}$ das Dreifache des mittleren Fehlers, also 1,8 % anzunehmen. Dann berechnet sich eine untere Grenze für die Diffusionslänge l nach der Heisenbergschen Formel[1])

$$\varrho_0 = \text{const} \cdot \frac{l}{r} \operatorname{Sin} \frac{r}{l} \approx \text{const} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{r^2}{l^2}\right),$$

also

$$\frac{1 + \frac{1}{6}\frac{r_1^2}{l^2}}{1 + \frac{1}{6}\frac{r_2^2}{l^2}} \approx 1 + \frac{1}{6}\frac{r_1^2 - r_2^2}{l^2} \lesssim 1{,}018,$$

$$l \geqq 47 \text{ cm}; \quad l \cdot \text{Dichte} \geqq 25 \text{ g/cm}^2. \tag{5}$$

Für die Absorptionsweglänge λ_a erhält man daraus eine untere Grenze nach der Fermischen Näherungsgleichung $l = \sqrt{\frac{1}{3}\lambda_a \lambda_s}$. Die Streuweglänge λ_s berechnet sich aus dem Streuquerschnitt[2]) $\sigma_s = 6{,}9 \cdot 10^{-24}\,\text{cm}^2$ zu $\lambda_s = 4{,}06$ cm. Damit wird

$$\lambda_a \geqq 1640 \text{ cm}; \quad \sigma_a \lesssim 16 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2. \tag{6}$$

Volz[3]) hat später aus andersartigen Versuchen auf eine obere Grenze $\sigma_a \lesssim 30 \cdot 10^{-27}\,\text{cm}^2$ geschlossen.

[1]) Vgl. W. Bothe u. P. Jensen, a. a. O. — [2]) M. Goldhaber u. G. H. Briggs, Proc. Roy. Soc. London (A) **162**, 127, 1937. — [3]) H. Volz, ZS. f. Phys. **121**, 201, 1943.

4. Die Vermehrung der Ra + Be-*Neutronen in Beryllium.* Um die Reaktion (2) zu untersuchen, wurde die Gesamtzahl der entstehenden Neutronen gemessen, einmal mit leerer Kugel, dann mit Be-gefüllter Kugel. Hierzu wurde für die beiden Fälle die Dichteverteilung ϱ der thermischen Neutronen im Innern der Kugel sowie im umgebenden Wasser ohne Cd ausgemessen. Die Dy-Sonden wurden teils 1 Stunde lang, teils bis zur praktischen Sättigung bestrahlt und 1 Stunde lang

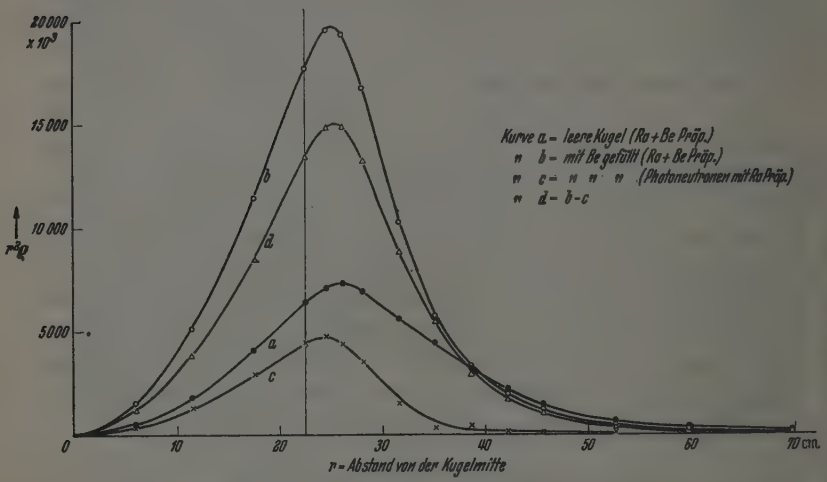


Fig. 1. Dichteverteilung der thermischen Neutronen mit Ra + Be-Quelle.

gemessen. Die Ergebnisse sind in den Kurven *a* und *b* der Fig. 1 wiedergegeben; es ist $\varrho\, r^2$ aufgetragen. Man erkennt eine sehr beträchtliche Neutronenvermehrung durch das Beryllium. Um den Vermehrungsfaktor zu erhalten, hat man beide Kurven zu integrieren und durch die örtliche Lebensdauer der thermischen Neutronen zu dividieren. Nach Ziff. 3 ist nun die Lebensdauer im Beryllium mindestens 30mal größer als im Wasser. Daher kann man die innerhalb der Kugel vorhandenen Neutronen vernachlässigen und erhält als Vermehrungsfaktor 1,84. Hierbei ist die Al-Wand dem Wasser zugerechnet, weil die Lebensdauern in beiden Stoffen nicht sehr verschieden sind.

Diese Zahl stellt jedoch noch nicht die Vermehrung durch Neutronenstöße allein dar, da auch die intensiven γ-Strahlen der Quelle Neutronen im Beryllium durch Photoeffekt erzeugen [Reaktion (4)]. Um diesen Anteil zu ermitteln, wurde die Quelle ersetzt durch ein neutronenfreies

Radiumpräparat von 71 mg. Mit Be-gefüllter Kugel ergab sich dann die durch Kurve *c* der Fig. 1 wiedergegebene Dichteverteilung der thermischen Neutronen. Diese Kurve ist schon umgerechnet auf den viel größeren Radiumgehalt der Neutronenquelle, sie ist dementsprechend weniger genau als die übrigen Kurven. Durch Subtraktion der Kurven *b* und *c* entsteht Kurve *d*, die nun die Neutronenvermehrung durch Neutronenstöße allein darstellt. Ausplanimetrieren der Kurven *d* und *a* ergibt den Vermehrungsfaktor

$$Y = 1{,}51. \quad (7)$$

Die Neutronenzahl wird also durch Neutronenstöße im Beryllium um die Hälfte vermehrt.

Interessant ist noch ein Vergleich der Formen der verschiedenen Verteilungskurven. Bei leerer Kugel zeigt die Kurve *a* einen exponentiellen Endabfall mit der auch schon früher beobachteten Halbwertdicke von rund 7 cm. Bei Kurve *d* dagegen beträgt diese Halbwertdicke streckenweise nur etwa 4,7 cm. Dies rührt daher, daß zu den Primärneutronen der Quelle noch die erheblich energieärmeren Neutronen aus $(n, 2n)$-Prozessen, sowie die elastisch gebremsten Neutronen kommen. Noch wesentlich steiler fällt die Kurve *c* ab, welche die sehr energiearmen Photoneutronen darstellt. Bei diesen ist es schon mehr die Diffusionslänge der thermisch gewordenen Neutronen im Wasser als die Streuweglänge der ursprünglichen Photoneutronen, die den Abfall nach außen bestimmt. Die letztere beträgt nämlich kaum mehr als 1 cm, ist also wesentlich kleiner als die thermische Diffusionslänge, die rund 2,5 cm ist.

Die Zahl der Photoneutronen erreicht den hohen Wert von 34 % der Zahl der Ra + Be-Neutronen. Dies stimmt gut mit den Messungen von Houtermans und Bartz zusammen[1]).

5. Diskussion des Vermehrungsfaktors für Ra + Be-*Neutronen.* Die gemessene Neutronenvermehrung um rund 50 % stellt noch nicht die reine Wirkung der $(n, 2n)$-Prozesse (2) dar. Vielmehr ist bekannt, daß durch die (n, α)-Reaktion (3) auch eine *Absorption* schneller Neutronen in Beryllium stattfindet. Die beiden Reaktionen arbeiten gegeneinander, wobei im Falle der Ra + Be-Neutronen die $(n, 2n)$-Reaktion überwiegt. Ihr Wirkungsquerschnitt ist also jedenfalls größer als der der (n, α)-Reaktion. Letzterer wird von Bjerge[2]) aus der Akti-

[1]) F. G. Houtermans u. I. Bartz, Phys. ZS. **44**, 167, 1943. — [2]) T. Bjerge, Diss. Kopenhagen 1938.

vität des entstehenden He^6 auf etwa $1{,}0 \cdot 10^{-24}$ cm² geschätzt, bezogen auf die Primärneutronen mit einer Energie $> 1{,}5$ e-MV. Dieser Wert des Wirkungsquerschnittes scheint uns jedoch etwas zu hoch gegriffen, weil die Zahl der Primärneutronen dabei offenbar unterschätzt wurde.

Etwas weitergehende Schlüsse lassen sich auf folgende Weise ziehen. Es seien σ_{2n} und σ_α die Wirkungsquerschnitte für den $(n, 2n)$- bzw. den (n, α)-Prozeß; $N = 3{,}6 \cdot 10^{22}$ die Zahl der Be-Kerne im cm³; $\mu_{2n} = N \sigma_{2n}$; $\mu_\alpha = N \sigma_\alpha$. Ferner sei angenommen, daß ein Primärneutron im Mittel eine Bahnlänge X bis zu seinem Austritt aus der Be-Kugel zurücklegen würde, wenn es nur elastische Streuungen erfahren würde; X ist also mindestens gleich dem Kugelradius von 22,5 cm. Dann kommt man folgendermaßen zu einem angenäherten Ausdruck für den Vermehrungsfaktor Y. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron die Strecke x ohne einen $(n, 2n)$- oder (n, α)-Prozeß zurücklegt und dann zwischen x und $x + \mathrm{d}x$ einen $(n, 2n)$-Prozeß hervorruft, ist

$$p_{2n}\,\mathrm{d}x = e^{-(\mu_{2n}+\mu_\alpha)x} \cdot \mu_{2n}\,\mathrm{d}x.$$

Die entsprechende Wahrscheinlichkeit für einen (n, α)-Prozeß in $\mathrm{d}x$ ist

$$p_\alpha\,\mathrm{d}x = e^{-(\mu_{2n}+\mu_\alpha)x} \cdot \mu_\alpha\,\mathrm{d}x.$$

Man kann nun annehmen, daß nach einem $(n, 2n)$-Prozeß beide Neutronen so langsam sind, daß die Wirkungsquerschnitte für beide Umwandlungsprozesse auf einen geringen Bruchteil gesunken sind. Dann liefert $\mathrm{d}x$ einen Beitrag $\mathrm{d}Y$ zu der Neutronenvermehrung: $\mathrm{d}Y = (p_{2n} - p_\alpha)\,\mathrm{d}x$. Durch Integration erhält man hieraus

$$Y - 1 = \frac{\sigma_{2n} - \sigma_\alpha}{\sigma_{2n} + \sigma_\alpha}\left(1 - e^{-(\mu_{2n}+\mu_\alpha)X}\right). \tag{8}$$

Ist nun σ_α wirklich so groß, wie Bjerge annimmt, so zeigt sich, daß wegen der Größe der Be-Kugel der Klammerfaktor in (8) weggelassen werden kann. Man erhält so mit dem gemessenen Wert $Y = 1{,}5$: $\sigma_{2n} = 3\,\sigma_\alpha = 3 \cdot 10^{-24}$ cm². Nun ist der geometrische Querschnitt des Be^9-Kernes nur $0{,}3 \cdot 10^{-24}$ cm². Da σ_{2n} kaum soviel größer sein kann als der geometrische Kernquerschnitt, muß man wiederum schließen, daß $\sigma_\alpha < 10^{-24}$ cm² ist. Rechnet man etwa probeweise mit $\sigma_\alpha = 0{,}1 \cdot 10^{-24}$ cm², so erhält man eine obere Grenze für σ_{2n}, indem man X gleich dem Radius der Be-Kugel = 22,5 cm setzt. Dann wird $\sigma_{2n} < 10\,\sigma_\alpha = 10^{-24}$ cm². Mit $X = \infty$ dagegen erhält man die untere Grenze $\sigma_{2n} > 3\,\sigma_\alpha = 0{,}3 \cdot 10^{-24}$ cm². Ein genauerer Wert für X ist schwer anzugeben, weil nämlich die Streuweglänge gerade von ähnlicher

Größe wie der Kugelradius ist; sie berechnet sich zu 17 cm, wenn man für den elastischen Streuquerschnitt den Wert $1{,}65 \cdot 10^{-24}$ cm² annimmt[1]). Eine weitere Komplikation bildet die Rückdiffusion schneller Neutronen aus dem Wasser in das Beryllium. Schließlich wäre noch zu beachten, daß die Neutronen durch elastische Stöße mit Be-Kernen gebremst werden.

Jedenfalls läßt sich sagen, daß für die Ra + Be-Neutronen, soweit ihre Energie überhaupt zu einem $(n, 2n)$-Prozeß in Be ausreicht, der mittlere Wirkungsquerschnitt für diesen Prozeß mindestens dreimal so groß wie für den (n, α)-Prozeß ist und dem geometrischen Kernquerschnitt von $0{,}3 \cdot 10^{-24}$ cm² mindestens nahekommt oder ihn sogar etwas übertrifft.

Rusinow[2]) hat bei Versuchen mit kleineren Be-Mengen eine schwache Vermehrung der Ra + Be-Neutronen festgestellt und daraus auf einen $(n, 2n)$-Wirkungsquerschnitt von der Größenordnung 10^{-25} cm² geschlossen. Dabei wurde aber die konkurrierende (n, α)-Reaktion nicht berücksichtigt.

6. Versuche mit Ra + F-*Neutronen.* Um über die Anregungskurven der $(n, 2n)$- und (n, α)-Reaktion etwas zu erfahren, wurden entsprechende Versuche, wie in Ziff. 4 beschrieben, auch mit einer anderen Quelle durchgeführt, die Neutronen von wesentlich geringerer Energie lieferte. Die Quelle enthielt 500 mg Ra als Sulfat, mit CaF_2-Pulver gemischt in eine dünnwandige Nickelkugel eingeschlossen. Bonner und Mott-Smith[3]) haben die Neutronenspektren von Po + Be und Po + F ausgemessen. Hiernach sind im ganzen die Neutronen aus dem Fluor um mehrere e-MV energieärmer als die aus Beryllium. Als Grenzenergie der Ra + F-Neutronen kann man hiernach unter Berücksichtigung der verschiedenen α-Energien etwa 3,4 e-MV annehmen. Die Ra + Be-Neutronen dagegen reichen bekanntlich bis etwa 14 e-MV, wenn auch die größten Energien nur schwach vertreten sind.

Die Ra + F-Quelle lieferte rund 10mal weniger Neutronen als die Ra + Be-Quelle, während die γ-Strahlung die gleiche war. Um daher die γ-Strahlung und damit die störenden Photoneutronen möglichst zu unterdrücken, wurde die Quelle mit einer Bleikugel von 9 cm Durchmesser und 3,2 cm Wandstärke umgeben. Auf die Neutronenenergie

[1]) I. R. Dunning u. Mitarb., Phys. Rev. **48**, 265, 1935. — [2]) L. I. Rusinow, Phys. ZS. d. Sowjet-Union **10**, 219, 1936. — [3]) T. W. Bonner u. L. M. Mott-Smith, Phys. Rev. **46**, 258, 1934.

dürfte dieser Bleimantel keinen sehr großen Einfluß haben, allenfalls entstehen durch unelastische Stöße einige energieärmere Neutronen. Im übrigen blieb die Anordnung ungeändert.

Die Messungen wurden ebenso wie in Ziff. 4 ausgeführt. Fig. 2 zeigt die Ergebnisse; die Ordinaten sind auf gleiche Bestrahlungs- und Meßdauer wie bei Fig. 1 umgerechnet. Die Photoneutronen wurden diesmal mit einer Ra-Menge von etwa 170 mg gemessen und auf die γ-Strahlung der Neutronenquelle umgerechnet. Sie waren um den Faktor 0,23 schwächer als ohne Bleifilter. Dies entspricht ungefähr der Erwartung, wenn man berücksichtigt, daß nur die härtesten Komponenten der Ra γ-Strahlung für den Photoeffekt in Betracht kommen. Im ganzen sind die Messungen mit der Ra + F-Quelle erheblich weniger genau als die mit der Ra + Be-Quelle, wegen der geringeren Neutronenintensität. Ausplanimetrieren der Kurven d und a ergibt den Vermehrungsfaktor

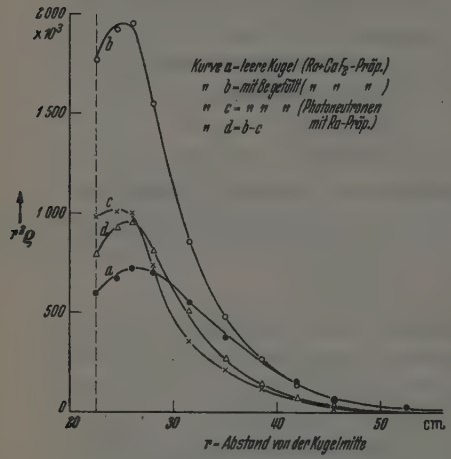


Fig. 2. Dichteverteilung der thermischen Neutronen mit Ra + F-Quelle.

$$Y = 0{,}95 \pm 0{,}08. \qquad (9)$$

Es tritt also weder eine Vermehrung noch eine deutliche Absorption der Ra + F-Neutronen durch das Be ein. Der neutronenerzeugende $(n, 2n)$-Prozeß und der neutronenabsorbierende (n, α)-Prozeß halten sich fast die Waage, die Wirkungsquerschnitte σ_{2n} und σ_α sind wenig verschieden, wobei eher σ_α der größere ist. Wahrscheinlich sind beide Querschnitte schon so klein, daß man (8) schreiben kann

$$Y - 1 = (\mu_{2n} - \mu_\alpha) X.$$

Mit X = Schichtdicke des Be = 18 cm und mit der in (9) angegebenen Fehlergrenze berechnet man daraus

$$-0{,}2 \cdot 10^{-24} < \sigma_{2n} - \sigma_\alpha < 0{,}05 \cdot 10^{-24}\ \text{cm}^2.$$

Vergleicht man dies mit dem Ergebnis der Ra + Be-Messungen, so folgt jedenfalls, daß σ_{2n} mit zunehmender Neutronenenergie E steiler ansteigt als σ_α.

Ein Grund hierfür ist, daß der (n, α)-Prozeß bei kleinerer Neutronenenergie einsetzt als der $(n, 2n)$-Prozeß; die Anregungsgrenzen liegen bei etwa $E_0 = 0{,}9$ bzw. 1,86 e-MV. Hinzu kommt aber noch, daß der (n, α)-Prozeß nach einer Gamow-Funktion ansteigt, der $(n, 2n)$-Prozeß dagegen nach der Weißkopfschen Funktion[1]), die in erster Näherung $(E - E_0)^2$ lautet.

Zusammenfassung. Für thermische Neutronen ist die Diffusionslänge in Be-Metall größer als 25 g/cm², der Einfangquerschnitt des Be^9-Kernes kleiner als $16 \cdot 10^{-27}$ cm² (Ziff. 3).

Mit den Ra α + Be-Neutronen ist der mittlere Wirkungsquerschnitt des Be^9 $(n, 2n)$-Prozesses, bezogen auf den oberhalb der Anregungsgrenze liegenden Anteil der Primärneutronen, mindestens dreimal so groß wie für den (n, α)-Prozeß. Er kommt dem geometrischen Kernquerschnitt von $0{,}3 \cdot 10^{-24}$ mindestens nahe und überschreitet ihn vielleicht sogar.

Der mittlere Wirkungsquerschnitt für den $Be^9(n, \alpha)$-Prozeß und den oberhalb der Anregungsgrenze liegenden Teil der Ra α + Be-Neutronen liegt eher bei 10^{-25} als bei 10^{-24} cm² (Ziff. 4 u. 5).

Mit den energieärmeren Ra α + F-Neutronen konnte kein deutlicher Unterschied mehr zwischen den Wirkungsquerschnitten des $(n, 2n)$- und des (n, α)-Prozesses gefunden werden. Eher ist der zweite der größere. Die $(n, 2n)$-Prozesse wachsen also mit steigender Neutronenenergie rascher an als die (n, α)-Prozesse. Dies erscheint verständlich (Ziff. 6).

Mit rund 26 kg Be-Flittern und einem Ra-Präparat wurden Photoneutronen erhalten, deren Zahl 34 % derjenigen Neutronen erreicht, die man durch die α-Strahlen derselben Radiummenge aus beigemischtem Be-Pulver erhält. Derselbe Effekt läßt sich auch schon mit etwa 2 kg geschmolzenem Be erreichen.

Heidelberg, Institut für Physik am Kaiser Wilhelm-Institut für medizinische Forschung, 18. Januar 1944.

[1]) V. F. Weißkopf u. D. H. Ewing, Phys. Rev. **57**, 472, 1940.

Über die Symmetrie des Spannungstensors in der Aerodynamik.

Von P. Kriesis in Athen.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 8. November 1943.)

Es wird gezeigt, daß in einem unstetigen Geschwindigkeitsfeld, in welchem nach der Theorie der zähen Flüssigkeiten unendliche Spannungen auftreten, die kinetische Gastheorie endliche, aber unstetige und unsymmetrische Spannungen ergibt.

1. In seinen Untersuchungen über das Turbulenzproblem hat Mohr[1]) die Vermutung ausgesprochen, daß in der Aerodynamik der Spannungstensor unsymmetrisch sein könnte. Gegen diese Auffassung hat Fues[2]) eingewendet, daß die bekannte gastheoretische Ableitung der aerodynamischen Spannungen einen symmetrischen Spannungstensor liefert. Diese letzte Behauptung gilt zweifellos, wenn die Verteilungsfunktion der molekularen Geschwindigkeiten eine stetige Funktion des Ortes ist, so daß die Vermutung von Mohr für stetige laminare Strömungen gewiß nicht zutreffen kann. In den folgenden Beispielen wird dagegen gezeigt, daß in unstetigen Strömungen tatsächlich unsymmetrische Spannungen auftreten können.

Es hat ein gewisses Interesse, die prinzipielle Möglichkeit solcher Spannungen festzustellen, denn auch Mattioli nimmt in seiner Theorie der Turbulenz[3]) an, daß der Spannungstensor bei turbulenter Strömung unsymmetrisch ist. Sollte sich dieser Ansatz bewähren, so wäre danach zu folgern, daß in den turbulenten Strömungen Unstetigkeiten des Geschwindigkeitsfeldes auftreten. Es ist in dieser Hinsicht bemerkenswert, daß überall dort, wo eine Strömung unstetig sein sollte, in Wirklichkeit immer Turbulenz eintritt.

2. Wir betrachten zunächst das Geschwindigkeitsfeld einer idealen Wirbelschicht, deren Auflösung noch nicht begonnen hat, und die in der x—z-Ebene der Fig. 1a liegen soll. Das Gas möge in dem unteren Gebiet I ruhen, während es in dem oberen Gebiet II die gleichförmige

---

[1]) E. Mohr, a) Sammelheft zum 113. Jahresber. d. Schles. Gesellsch. f. vaterl. Kultur, S. 85, 1940; b) Luftfahrtforschung **18**, 327, 1941, Lief. 9; c) ZS. f. Phys. **119**, 575, 1942; d) ebenda **121**, 301, 1943. — [2]) E. Fues, ZS. f. Phys. **118**, 409, 1941; **121**, 58, 1943. — [3]) G. D. Mattioli, Teoria dinamica dei regimi fluidi turbolenti. Padova, Cedam, 1937.

Strömungsgeschwindigkeit u_0 besitzt. Dann herrschen im Innern der beiden Gebiete entsprechend die Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilungen

$$f_{\mathrm{I}}(u,v,w) = \left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} e^{-hm(u^2+v^2+w^2)},$$

$$f_{\mathrm{II}}(u,v,w) = \left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} e^{-hm[(u-u_0)^2+v^2+w^2]}.$$

Hierbei sind u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten und m die Masse eines Moleküls. Die Dichte des Gases ϱ, also wegen $\varrho = Nm$

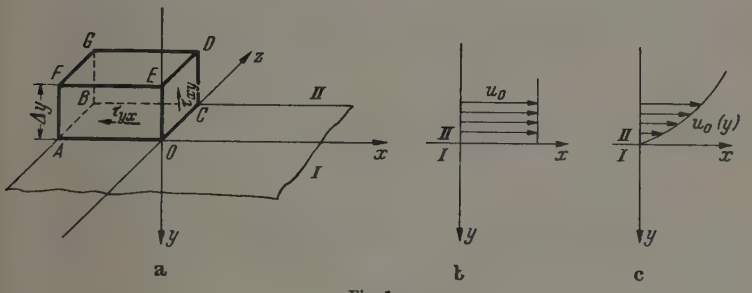


Fig. 1.

auch die Anzahl N der Moleküle in der Volumeneinheit, wird in beiden Gebieten dieselbe angenommen. Wir nehmen weiter an, daß auch der Druck p in beiden Gebieten derselbe ist, denn es ist bekanntlich[1])

$$p = \frac{\varrho}{2hm}.$$

Auf der Trennungsfläche selbst werden die Moleküle, welche diese von unten nach oben durchsetzen ($v < 0$), die Geschwindigkeitsverteilung f_{I} des unteren Gebietes aufweisen, während die Moleküle, welche von oben nach unten fliegen ($v > 0$), die Geschwindigkeitsverteilung f_{II} besitzen. Auf der Wirbelfläche gilt also die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion

$$f(u, v < 0, w) = f_{\mathrm{I}}(u,v,w); \quad f(u, v > 0, w) = f_{\mathrm{II}}(u,v,w). \qquad (1)$$

---

[1]) Vgl. z. B.: J. Jeans, The dynamical theory of gases. 4th edition, S. 112, Cambridge 1925.

Aus dieser erhält man für die Dichte und die Komponenten $\bar{u}$ und $\bar{v}$ der mittleren Geschwindigkeit auf der Wirbelfläche $y = 0$[1]):

$$\varrho\,(y=0) = N m \left(\frac{h m}{\pi}\right)^{3/2} \Big[\int_{v=-\infty}^{0} \iint e^{-h m (u^2+v^2+w^2)}\, du\, dv\, dw + \int_{v=0}^{\infty} \iint e^{-h m [(u-u_0)^2+v^2+w^2]}\, du\, dv\, dw \Big]$$

$$= N m \left(\frac{h m}{\pi}\right)^{3/2} \iiint e^{-h m (u^2+v^2+w^2)}\, du\, dv\, dw = N m = \varrho\,^2),$$

$$\bar{v}\,(y=0) = \left(\frac{h m}{\pi}\right)^{3/2} \int_{v=-\infty}^{0} \iint v\, e^{-h m (u^2+v^2+w^2)}\, du\, dv\, dw + \left(\frac{h m}{\pi}\right)^{3/2} \int_{v=0}^{\infty} \iint v\, e^{-h m [(u-u_0)^2+v^2+w^2]}\, du\, dv\, dw = 0,$$

$$\bar{u}\,(y=0) = \left(\frac{h m}{\pi}\right)^{3/2} \int_{v=-\infty}^{0} \iint u\, e^{-h m (u^2+v^2+w^2)}\, du\, dv\, dw + \left(\frac{h m}{\pi}\right)^{3/2} \int_{v=0}^{\infty} \iint u\, e^{-h m [(u-u_0)^2+v^2+w^2]}\, du\, dv\, dw$$

$$= u_0 \left(\frac{h m}{\pi}\right)^{3/2} \int_{v=0}^{\infty} \iint e^{-h m [(u-u_0)^2+v^2+w^2]}\, du\, dv\, dw = \frac{u_0}{2}.$$

Wir wollen jetzt die Spannungen berechnen, die auf das infinitesimale Parallelepiped $OABCDEFG$ wirken, welches im Gebiete II liegt, und an die Wirbelfläche Oxz angrenzt. Es sei τ_{yx} die x-Kom-

---

[1]) In allen Integralen soll stets nach den Variablen, für welche die Integrationsgrenzen nicht angegeben sind, von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert werden. — [2]) Die Integrationen dieser und der folgenden Gleichungen führen alle auf drei bekannte Integrale, die hier zusammengestellt seien:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-h m u^2}\, du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{h m}}; \qquad \int_{0}^{\infty} u^2 e^{-h m u^2}\, du = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{h^3 m^3}};$$

$$\int_{0}^{\infty} u\, e^{-h m u^2}\, du = \frac{1}{2 h m}.$$

ponente der Spannung t_y, welche auf der Fläche $OABC$ wirkt. Die Betrachtung des Impulstransports liefert bekanntlich[1])

$$\tau_{yx} = -\varrho \iiint u\, v\, f(u,v,w)\, du\, dv\, dw + \varrho\, \bar{u}\, \bar{v}. \tag{2}$$

Wegen der Unstetigkeit des Geschwindigkeitsfeldes muß aber beachtet werden, daß hierbei $f(u,v,w)$ die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion, und u, v, w die Komponenten der mittleren Geschwindigkeit auf der betreffenden Grenzfläche sind. Da $OABC$ auf der Wirbelfläche liegt, wird also $f(u,v,w)$ durch (1) gegeben, während $\bar{u} = \frac{u_0}{2}$ und $\bar{v} = 0$ ist. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
\tau_{yx}(y=0) &= -\varrho \left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} \int_{v=-\infty}^{0}\int\int u\, v\, e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}\, du\, dv\, dw - \\
&\qquad - \varrho \left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} \int_{v=0}^{\infty}\int\int u\, v\, e^{-hm[(u-u_0)^2+v^2+w^2]}\, du\, dv\, dw \\
&= -\varrho\, u_0 \left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} \int_{v=0}^{\infty}\int\int v\, e^{-hm[(u-u_0)^2+v^2+w^2]}\, du\, dv\, dw \\
&= -\varrho\, u_0 \sqrt{\frac{hm}{\pi}} \int_{v=0}^{\infty} v\, e^{-hm v^2}\, dv = -\frac{\varrho\, u_0}{2\sqrt{\pi\, hm}} = -\sqrt{\frac{p\varrho u_0^2}{2\pi}}.
\end{aligned}$$

Auf der Fläche $DEFG$, welche ganz im Innern des Gebietes II liegt, ist aber $f(u,v,w) = f_{II}$ und $\bar{u} = u_0$, $\bar{v} = 0$. Die Spannungskomponente τ_{yx} auf der Fläche $y = \Delta y$ ist deswegen

$$\tau_{yx}(y=\Delta y) = -\varrho \left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} \int_{v=-\infty}^{+\infty}\int\int u\, v\, e^{-hm[(u-u_0)^2+v^2+w^2]}\, du\, dv\, dw + \varrho\, \bar{u}\, \bar{v} = 0.$$

Man beachte, daß auf $OABCDEFG$ die Spannungskomponente $-\tau_{yx}(y=\Delta y)$ wirkt, da $DEFG$ als Grenzfläche von $OABCDEFG$ auf der Seite abnehmender y liegt.

Die y-Komponente τ^{II}_{xy} der Spannung t^{II}_x, welche auf die Fläche $OCDE$ wirkt, ist entsprechend:

$$\tau_{xy} = -\varrho \iiint u\, v\, f(u,v,w)\, du\, dv\, dw + \varrho\, \bar{u}\, \bar{v}. \tag{3}$$

---

[1]) Vgl. z. B. E. Fues, ZS. f. Phys. 118, 409, 1941, dort S. 412.

Da auch $OCDE$ im Innern des Gebietes II liegt, ist dort $f(u, v, w) = f_{II}$: $\bar{u} = u_0$, $\bar{v} = 0$ und daher

$$\tau_{xy}^{II} = -\varrho\left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} \int_{v=-\infty}^{+\infty}\iiint u\, v\, e^{-hm[(u-u_0)^2+v^2+w^2]}\, du\, dv\, dw = 0.$$

Auf der Wirbelfläche $y = 0$ ist also

$$\tau_{yx} \neq \tau_{xy}. \tag{4}$$

Die übrigen Spannungskomponenten auf $OABCDEFG$ berechnet man auf ähnliche Weise, indem man beachtet, daß auf allen Grenzflächen außer $OABC$ $\bar{u} = u_0$, $\bar{v} = 0$ und $f(u, v, w) = f_{II}$ gilt. Man findet

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0, \tag{5}$$

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -\frac{\varrho}{2hm} = -p. \tag{6}$$

Die Spannungen, die auf das Parallelepiped $OABCD'E'F'G'$ wirken, welches zu $OABCDEFG$ in bezug auf die Wirbelfläche Oxz spiegelsymmetrisch ist, findet man nach derselben Methode. Die Fläche $OABC$ liegt in diesem Falle auf der Seite abnehmender y-Koordinaten. Daher ist jetzt der Wert der x-Komponente der Spannung, die auf $OABC$ als Grenzfläche von $OABCD'E'F'G'$ wirkt,

$$-\tau_{yx}(y = 0) = \sqrt{\frac{p\varrho u_0^2}{2\pi}}.$$

Bei der Berechnung von $\tau_{yx}(y = -\Delta y)$ auf der Fläche $D'E'F'G'$ muß man beachten, daß auf derselben $f(u, v, w) = f_I$ und $\bar{u} = \bar{v} = 0$ ist. Aus (2) folgt wieder:

$$\tau_{yx}(y = -\Delta y) = -\varrho\left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} \iiint u\, v\, e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}\, du\, dv\, dw = 0.$$

Ebenso finden wir für die y-Komponente τ_{xy}^{I} der Spannung t_x^I, welche auf die Fläche $OCD'E'$ wirkt, wegen (3): $\tau_{xy}^{I} = 0$, und für die übrigen Spannungskomponenten die Werte (5) und (6). Alle Spannungskomponenten, außer τ_{yx}, sind also stetige Funktionen des Ortes. Aus (4) folgt aber, daß sie auf der Wirbelfläche unsymmetrisch sind.

3. Die Unsymmetrie des Spannungstensors tritt indessen nicht nur in den idealen Wirbelflächen auf, sondern auch bei unstetigen räumlichen Wirbelverteilungen, oder allgemeiner überall dort, wo Unstetigkeiten des Tensors der Deformationsgeschwindigkeiten auftreten.

Wir betrachten der Einfachheit halber eine Schichtenströmung, in der die Geschwindigkeit $u_0\,(y)$ nur von y abhängt. Im Gebiete I, unterhalb der Ebene Oxz, möge die Geschwindigkeit u_0 überall Null sein, während sie im Gebiete II ($y < 0$) stetig wie in der Fig. 1c verläuft. Es soll jedoch die Ableitung $\partial u_0/\partial y$ auf der Ebene Oxz unstetig sein, indem sie von Null auf einen Wert springt, den wir im folgenden kurz mit $(\partial u_0/\partial y)$ bezeichnen.

Wir wollen wieder die Spannungen in dem Augenblick berechnen, wo die Auflösung dieser Wirbelschicht noch nicht begonnen hat. Dann herrscht im unteren Gebiet I überall die Geschwindigkeitsverteilung f_{I}. In einem Punkt des Gebietes II hängt dagegen die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion von u_0 und den Komponenten des Tensors der Deformationsgeschwindigkeiten, hier also von $\partial u_0/\partial y$ ab. Die kinetische Gastheorie liefert in diesem Fall[1]):

$$f(u,v,w) = \left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} e^{-hm[(u-u_0)^2+v^2+w^2]}\left[1 + uv\frac{\partial u_0}{\partial y}\psi\left((u-u_0)^2+v^2+w^2\right)\right].$$

Hierbei ist $\psi\left((u-u_0)^2+v^2+w^2\right)$ eine Funktion, die von dem Gesetz der Kräfte zwischen den Molekülen abhängt. Es ist aber in erster Näherung, unabhängig von diesem Kraftgesetz[1])

$$\psi\left((u-u_0)^2+v^2+w^2\right) = -\mu\frac{\varrho}{p^2}, \tag{7}$$

wobei μ der Zähigkeitskoeffizient des Gases ist.

Auf der Unstetigkeitsfläche Oxz werden die Moleküle, welche diese von unten nach oben durchsetzen ($v < 0$), die Verteilung f_{I} aufweisen, während die Moleküle, welche von oben nach unten fliegen ($v > 0$), die Geschwindigkeitsverteilung besitzen:

$$f_{\mathrm{II}}(u,v,w) = \left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}\left[1 + uv\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\psi\left(u^2+v^2+w^2\right)\right]. \tag{8}$$

Hieraus erhalten wir für die Dichte und die Komponenten $\bar{u}$ und $\bar{v}$ der mittleren Geschwindigkeit auf der Unstetigkeitsfläche $y = 0$:

$$\varrho(y=0) = Nm\left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2}\int_{v=-\infty}^{0}\int\int e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}\,du\,dv\,dw +$$

$$+ Nm\left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2}\int_{v=0}^{\infty}\int\int e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}\left[1 + uv\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\psi(u^2+v^2+w^2)\right]du\,dv\,dw$$

$$= Nm = \varrho,$$

[1]) Vgl. D. Enskog, ZS. f. Phys. **54**, 501, 1929.

$$\bar{v}\,(y=0) = \left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} \iiint v\, e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}\,du\,dv\,dw +$$

$$+ \left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} \int_{v=0}^{\infty}\iiint u\,v^2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) \psi\,(u^2+v^2+w^2)\, e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}\,du\,dv\,dw = 0,$$

$$\bar{u}\,(y=0) = \left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} \iiint u\, e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}\,du\,dv\,dw +$$

$$+ \left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) \int_{v=0}^{\infty}\iiint u^2 v\,\psi\,(u^2+v^2+w^2)\, e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}\,du\,dv\,dw.$$

In der letzten Gleichung verschwindet wieder das erste Integral, während das zweite berechnet werden kann, wenn $\psi\,(u^2+v^2+w^2)$ gegeben ist.

In erster Näherung folgt aus (7):

$$\bar{u}(y=0) = -\frac{\mu\varrho}{p^2}\left(\frac{hm}{\pi}\right) \int_{v=0}^{\infty} v\, e^{-hmv^2}\,dv \int_{u=-\infty}^{+\infty} u^2\, e^{-hmu^2}\,du$$

$$= -\frac{\mu}{\sqrt{2\pi p\varrho}}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right). \tag{9}$$

Wir können jetzt die Spannungen berechnen, welche auf das infinitesimale Parallelepiped $OABCDEFG$ der Fig. 1a wirken. Auf der Grenzfläche $OABC$ ist $\bar{v} = 0$ und

$$f\,(u, v<0, w) = f_{\mathrm{I}}; \quad f\,(u, v>0, w) = f_{\mathrm{II}}. \tag{10}$$

Es ist also wegen (2):

$$\tau_{yx}\,(y=0) = -\varrho\left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} \int_{v=-\infty}^{0}\iiint u\,v\, e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}\,du\,dv\,dw -$$

$$-\varrho\left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} \int_{v=0}^{\infty}\iiint u\,v\, e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}\left[1+uv\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\psi\,(u^2+v^2+w^2)\right]du\,dv\,dw$$

$$= -\varrho\left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) \int_{v=0}^{\infty}\iiint u^2 v^2\,\psi\,(u^2+v^2+w^2)\, e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}\,du\,dv\,dw$$

$$= -\frac{1}{2}\varrho\left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) \int_{v=-\infty}^{+\infty}\iiint u^2 v^2\,\psi\,(u^2+v^2+w^2) \times$$

$$\times\, e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}\,du\,dv\,dw. \tag{11}$$

Auf der Grenzfläche $DEFG$ ist, wenn man infinitesimale Größen vernachlässigt, $f(u, v, w) = f_{II}$ und $\bar{u} = \bar{v} = 0$. Aus (2) folgt:

$$\tau_{yx}(y = \Delta y) = -\varrho\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} \int_{v=-\infty}^{+\infty}\iiint u^2 v^2 \psi(u^2 + v^2 + w^2) \times \\ \times e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}\,du\,dv\,dw. \quad (12)$$

$\tau_{yx}(y = \Delta y)$ ist offenbar gleich der gewöhnlichen Schubspannung, die in einer zähen Strömung auftritt, in welcher der Tensor der Deformationsgeschwindigkeit keine Unstetigkeiten aufweist, und gleich $(\partial u_0/\partial y)$ ist. Der Faktor von $\partial(u_0/\partial y)$ auf der rechten Seite von (12) ist also nicht nur für den Wert (7) von $\psi(u^2 + v^2 + w^2)$, sondern auch für den exakten Wert dieser Funktion, gleich dem Zähigkeitskoeffizienten μ des Gases. Statt (11) und (12) kann man daher schreiben:

$$\tau_{yx}(y = 0) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right); \quad \tau_{yx}(y = \Delta y) = \mu\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right).$$

Auf $OCDE$ ist ebenso wie auf allen Grenzflächen von $OABCDEFG$, außer $OABC$, $f(u, v, w) = f_{II}$ und $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$. Es ist daher:

$$\tau_{xy}^{II} = -\varrho\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} \int_{v=-\infty}^{+\infty}\iiint u^2 v^2 \psi(u^2+v^2+w^2)\, e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}\,du\,dv\,dw$$

$$= \mu\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0,$$

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -\frac{\varrho}{2hm} = -p.$$

Die Spannungen, welche auf das Parallelepiped $OABCDEFG$ wirken, sind also auch in dieser Strömung unstetig und unsymmetrisch, denn es ist auf der Unstetigkeitsfläche $y = 0$:

$$\tau_{yx}(0) = \tfrac{1}{2}\tau_{xy}^{II}.$$

Die Spannungen auf das infinitesimale Parallelepiped $OABCD'E'F'G'$ finden wir ganz ähnlich. Auf allen seinen Grenzflächen außer $OABC$ ist wieder $f(u, v, w) = f_I$, während auf $OABC$ (10) gilt. Es ist deshalb:

$$\tau_{yx}(y = 0) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right), \quad \tau_{yx}(y = -\Delta y) = 0,$$

$$\tau_{xy}^{I} = 0,$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0, \quad \tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -p.$$

In diesem Geschwindigkeitsfeld sind also auf der Unstetigkeitsfläche $y = 0$ die Spannungskomponenten τ_{yx} und τ_{xy} unstetig und verschieden. Es gilt aber offenbar:

$$\tfrac{1}{2}[\tau_{xy}^{\mathrm{I}} + \tau_{xy}^{\mathrm{II}}] = \tfrac{1}{2}[\tau_{yx}(\Delta y) + \tau_{yx}(-\Delta y)] = \tau_{yx}(0).$$

4. Aus den obigen Erörterungen kann man wohl schließen, daß in der Aerodynamik unsymmetrische Spannungen prinzipiell auftreten können. Um beurteilen zu können, ob diesen Spannungen irgendwelche Bedeutung zukommt, muß man untersuchen, ob sich die anfänglichen Unstetigkeiten der Geschwindigkeitsverteilungsfunktion im Gase fortpflanzen, oder ob sie sofort ausgeglichen werden. Diese Untersuchung ist aber außerordentlich schwierig, da man den Verlauf der Verteilungsfunktion aus der Boltzmannschen Integrodifferentialgleichung bei den gegebenen unstetigen Anfangsbedingungen bestimmen müßte. Obwohl ein sofortiger Ausgleich sehr wahrscheinlich ist, deutet doch im zweiten Beispiel das Auftreten der von Null verschiedenen Geschwindigkeit (9) darauf hin, daß dieser Ausgleich nicht sehr einfach verlaufen wird.

Zum Schluß möchten wir darauf hinweisen, daß die Verhältnisse des zweiten Beispiels höchstwahrscheinlich auch bei der Umströmung einer Kante auftreten, und zwar am Rande, wo die Grenzschicht, in welcher die Geschwindigkeit ungefähr wie in Fig. 1c verläuft, mit dem ruhenden Gase in Kontakt kommt. Es ist also nicht ausgeschlossen, daß die dort auftretende Unsymmetrie der Spannungen in der Turbulenz dieser Strömung eine gewisse Rolle spielt.

Beitrag zur Theorie explosiver Gasreaktionen.

Über den zeitlichen Ablauf isothermer Kettenexplosionen bei Kettenabbruchsreaktionen 1. und 2. Ordnung.

Von **L. von Müffling***).

Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 26. Januar 1944.)

In der vorliegenden Arbeit wird der zeitliche Ablauf chemischer Umsetzungen mit Kettenverzweigung behandelt, und zwar 1. für Kettenabbruchsreaktionen I. Ordnung, 2. für solche nach der II. Ordnung und 3. für I. und II. Ordnung gleichzeitig. Dabei wird im Gegensatz zu früheren Rechnungen die Änderung der Verzweigungswahrscheinlichkeit mit dem Verbrauch der Ausgangsstoffe berücksichtigt. Die Resultate führen in allen Fällen über das bisher Bekannte hinaus. (Zusammenfassung von W. Jost.)

Das Eintreten von Explosion bei exothermen Gasreaktionen, z. B. den Verbrennungsreaktionen, läßt sich außer durch Störung des Wärmegleichgewichts und Übergang in Wärmeexplosion bekanntlich auch, soweit es sich um Kettenreaktionen handelt, durch Kettenverzweigung erklären. Der Grundgedanke für diese, insbesondere von Semenoff[1]) ausgearbeitete Theorie, ist, daß bei solchen Vorgängen neben den kettenfortführenden Reaktionen, bei denen beim Umsatz der intermediär auftretenden aktiven Teilchen mit den Molekülen der Ausgangsstoffe für ein verschwindendes aktives Teilchen stets nur ein neues gebildet wird (z. B. bei der H_2-Br_2-Vereinigung Zwischenreaktionen der Art: $H + Br_2 = HBr + Br$, $Br + H_2 = HBr + H$), nun auch Reaktionen auftreten können, bei denen durch Umsatz eines Kettenträgers mit Molekülen der Ausgangssubstanz mehr aktive Teilchen gebildet als verbraucht werden, so daß in kurzer Zeit ein starkes Anwachsen der Konzentration der aktiven Teilchen und damit der Re-

---

*) Ludwig Freiherr v. Müffling, geboren am 25. September 1912, ist am 29. Juli 1943 durch ein tragisches Geschick tödlich verunglückt. Seine letzte Arbeit, die er — in Weiterführung seiner früheren Arbeiten mit Prof. Dr. W. Jost — selbständig verfaßt hat, wird hiermit veröffentlicht. Alle, die mit dem Verunglückten zusammen arbeiteten, bedauern aufrichtig den Tod dieses lieben, edlen Kameraden und ungewöhnlich begabten Forschers, dessen Wissen und Können zu den schönsten Hoffnungen berechtigte. M. Pier.

[1]) N. Semenoff, bes. Chemical Kinetics and Chain Reactions. Oxford 1935.

aktionsgeschwindigkeit eintritt; die am besten bekannten Zwischenreaktionen dieser Art sind etwa bei der H_2-O_2-Vereinigung: $H + O_2 = OH + O$, $O + H_2 = OH + H$. Betrachtet man die im Verlauf der Reaktion auftretende Konzentration n an aktiven Teilchen, so erhält man für die zeitliche Änderung der Konzentration nach dem bekannten Ansatz von Semenoff die Differentialgleichung:

$$\frac{dn}{dt} = n_0 + \alpha \cdot n - \beta \cdot n,$$

worin n_0 die Geschwindigkeit der primären Neubildung von aktiven Teilchen, also des ketteneinleitenden Vorgangs bedeutet, α die Wahrscheinlichkeit der Kettenverzweigung, β die des Kettenabbruchs; dabei ist die Geschwindigkeit der beiden letzteren Vorgänge der Konzentration der aktiven Teilchen direkt proportional, es sind damit also nur nach 1. Ordnung verlaufende Reaktionen erfaßt. Betrachtet man nun mit Semenoff den quasistationären Zustand, bei dem sich Bildung und Vernichtung der Kettenträger etwa kompensieren ($dn/dt = 0$), so erhält man für n die Gleichung

$$n = \frac{n_0}{\beta - \alpha},$$

woraus sich für das Eintreten von Explosion die Forderung ergibt, daß $\alpha = \beta$ und damit $n = \infty$ werden muß. Die Forderung des Unendlichwerdens der Reaktionsgeschwindigkeit als Explosionsbedingung führte dann insbesondere zu der Folgerung, daß kettenverzweigende und kettenabbrechende Reaktionen in bezug auf die aktiven Teilchen stets von gleicher, und damit vorzugsweise 1. Ordnung sein müssen, dagegen kettenabbrechende Reaktionen höherer, insbesondere 2. Ordnung, z. B. homogene Rekombinationsreaktionen der als Kettenträger auftretenden freien Atome und Radikale, von denen ja an sich bekannt ist, daß sie mit großer Geschwindigkeit verlaufen können, bei explosiven Reaktionen auszuschließen sind[1]). Man erhält nämlich bei Einführung derartiger Reaktionen aus der Gleichung:

$$\frac{dn}{dt} = n_0 + \alpha \cdot n - \beta \cdot n^2$$

---

[1]) N. Semenoff, s. Fußnote 1, S. 75f.; L. S. Kassel u. H. H. Storch, Journ. Amer. Chem. Soc. 57, 672, 1935; B. Lewis u. G. v. Elbe, ebenda 59, 656, 1937.

für n einen Ausdruck:

$$n = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4 n_0 \beta}}{2\beta},$$

der für endliche Werte von α, β und n_0 niemals unendlich werden kann.

Bereits bei früherer Gelegenheit wurde darauf hingewiesen[1]), daß diese Forderung des Unendlichwerdens der Reaktionsgeschwindigkeit zwar eine mathematisch einfache Formulierung der Explosionsbedingung ermöglicht, aber den tatsächlichen Verhältnissen insofern nicht entspricht, als ein stationärer Zustand mit der Reaktionsgeschwindigkeit unendlich ja nicht existieren kann. In dem obigen Ansatz wird vorausgesetzt, daß die Wahrscheinlichkeit der Kettenverzweigung konstant bleibt, während sie in Wirklichkeit im allgemeinen der Konzentration der Ausgangssubstanz proportional ist, wie z. B. die oben angegebenen Zwischenreaktionen der Knallgasreaktion zeigen. Die Verzweigungswahrscheinlichkeit als konstant anzusetzen, ist daher nur zulässig in den ersten Anfangsstadien der Umsetzung, bevor die Ausgangsstoffe merklich abzunehmen beginnen und wo die Werte der Reaktionsgeschwindigkeit noch weit vom Maximum entfernt sind. Will man den zeitlichen Ablauf der Reaktion über dies erste Anfangsstadium hinaus verfolgen, so muß man den Verbrauch der Ausgangssubstanz berücksichtigen. Man kann sich so schon qualitativ leicht überlegen, daß in Wirklichkeit die Reaktionsgeschwindigkeit niemals unendlich werden, sondern nur möglicherweise recht hohe endliche Werte erreichen kann, um dann im weiteren Verlauf der Umsetzung wieder auf 0 abzufallen. Wenn man also unter wirklichen Verhältnissen niemals eine unendlich hohe Reaktionsgeschwindigkeit erhalten kann, so besteht auch kein Grund, Kettenabbruchsreaktionen, die von höherer Ordnung als die kettenverzweigenden Reaktionen sind, deshalb auszuschließen, weil die damit erhaltenen Ausdrücke nicht formal den Wert ∞ ergeben können. Man muß vielmehr einmal den zeitlichen Ablauf der Reaktion unter Berücksichtigung des Verbrauchs der Ausgangssubstanz betrachten und prüfen, welche Werte für die Reaktionsgeschwindigkeit tatsächlich auftreten können.

Zu einer näheren mathematischen Untersuchung der Verhältnisse gehen wir von folgendem allgemeinen Ansatz aus:

In der Differentialgleichung für die zeitliche Änderung der Konzentration der Kettenträger wird die Geschwindigkeit der Kettenverzwei-

[1]) W. Jost u. L. v. Müffling, ZS. f. phys. Chem. (A) **183**, 43, 1938.

gung der Konzentration c der Ausgangssubstanz und der Konzentration n der Kettenträger proportional gesetzt, während die Geschwindigkeit des Kettenabbruchs eine Funktion $f(n)$ von n allein ist, also:

$$\frac{dn}{dt} = w_0^{*}) + k_\alpha \cdot c \cdot n - f(n); \qquad (1)$$

darin bedeutet k_α die Geschwindigkeitskonstante der kettenverzweigenden Reaktion. Die Konzentration der Ausgangssubstanz nimmt durch Reaktion mit den Kettenträgern ab mit einer Geschwindigkeit, die der jeweiligen Konzentration der Kettenträger und der der Ausgangssubstanz proportional ist; man erhält dementsprechend hierfür die simultane Differentialgleichung:

$$-\frac{dc}{dt} = k_1 \cdot c \cdot n, \qquad (1\,b)$$

worin k_1 die Geschwindigkeitskonstante der Reaktion der Kettenträger mit den Ausgangsstoffen bedeutet, die gleich k_α oder auch größer sein kann, da ja keineswegs bei jedem Reaktionsakt eines Kettenträgers mit einem Molekül der Ausgangssubstanz gleichzeitig auch Verzweigung aufzutreten braucht. Im folgenden wird das Gleichungssystem für Kettenabbruchsreaktionen nach 1. und 2. Ordnung sowie nach 1. und 2. Ordnung gleichzeitig, also für:

$$\begin{aligned} f(n) &= 1.)\ a \cdot n, \\ &= 2.)\ b \cdot n^2, \\ &= 3.)\ a \cdot n + b \cdot n^2 \end{aligned}$$

(a und b sind Konstanten) integriert. Es ergeben sich bei den Fällen 1. und 2. für den zeitlichen Ablauf der Umsetzung charakteristisch verschiedene Kurvenformen, die beide, insbesondere auch für den Kettenabbruch nach 2. Ordnung, aus experimentellen Untersuchungen bekannt sind; danach ergibt sich umgekehrt die Möglichkeit, aus der experimentell gefundenen Kurvenform auf die Ordnung der Kettenabbruchsreaktion

*) Da wir mit n die Konzentration der Kettenträger und daher mit n_0 die Konzentration für $t = 0$ bezeichnen, benutzen wir für die Geschwindigkeit der Neubildung im folgenden die Bezeichnung w_0. Dabei wird w_0 als konstant und insbesondere unabhängig von c angenommen. In Wirklichkeit ist der ketteneinleitende Vorgang häufig ein geringer spontaner Zerfall der Ausgangssubstanz unter Bildung von Atomen oder Radikalen, doch spielt die Neubildung von Kettenträgern bei Reaktionen mit Kettenverzweigung nur im Anfangsstadium der Umsetzung eine Rolle, bevor die Konzentration der Ausgangsstoffe merklich abzunehmen beginnt, so daß auch für solche Fälle die Annahme eines konstanten w_0 berechtigt ist.

zu schließen, was wichtige Hinweise für den Reaktionsmechanismus geben kann. Weiter wird an einem Beispiel gezeigt, daß die auftretenden Maximalwerte der Reaktionsgeschwindigkeit in beiden Fällen durchaus von gleicher Größe sein können. Mit der für den Fall 3. erhaltenen Lösung läßt sich z. B. unter bestimmten Annahmen über den Einfluß des Druckes auf die verschiedenen Kettenabbruchsvorgänge die für Kettenexplosionen typische Explosionsgrenzkurve mit unterer und oberer Druckgrenze berechnen. An Hand der gefundenen Gesetzmäßigkeiten wird der Begriff der Explosion diskutiert und festgestellt, daß als Explosion im normalen Sinne nur solche Vorgänge aufzufassen sind, bei denen eine Störung des Wärmegleichgewichts und damit Übergang in Wärmeexplosion auftritt; Ansätze für die Berechnung dieses Vorgangs werden angegeben.

1. Zeitlicher Ablauf bei Kettenabbruch nach 1. Ordnung.

Kettenabbruchsreaktionen nach 1. Ordnung liegen z. B. dann vor, wenn die Kettenträger durch Rekombination an der Wand vernichtet werden oder durch Reaktion mit einer kettenabbrechenden Substanz in der Gasphase. Zur Berechnung des zeitlichen Ablaufs der Reaktion haben wir das Gleichungssystem:

$$\frac{dn}{dt} = w_0 + k_\alpha \cdot c \cdot n - k_\beta \cdot n, \tag{1a}$$

$$-\frac{dc}{dt} = k_1 \cdot c \cdot n \tag{1b}$$

zu integrieren, worin jetzt k_β die Geschwindigkeitskonstante des nach 1. Ordnung verlaufenden Kettenabbruchs bedeutet. Die Integration läßt sich geschlossen unter der Voraussetzung durchführen, daß die Vermehrung der aktiven Teilchen durch Kettenverzweigung so stark ist, daß demgegenüber die Neubildung vernachlässigt werden kann, daß man also in der Gl. (1a) das Glied w_0 fortlassen kann. Daß die Reaktion überhaupt in Gang kommt, wird dann mathematisch dadurch zum Ausdruck gebracht, daß zu Beginn ($t = 0$) eine bestimmte Konzentration n_0 an aktiven Teilchen vorgegeben wird, ohne Berücksichtigung weiterer Neubildung. Unter dieser Voraussetzung erhält man durch Einsetzen von

$$n = -\frac{1}{k_1 c} \cdot \frac{dc}{dt} \tag{2}$$

aus Gl. (1b) in Gl. (1a) den Ausdruck:

$$dn = dc\left(\frac{k_\beta}{k_1 c} - \frac{k_\alpha}{k_1}\right), \tag{3}$$

und daraus durch Integration:

$$n = \frac{k_\beta}{k_1} \cdot \ln(c) - \frac{k_\alpha}{k_1} \cdot c + C. \tag{4}$$

Die Bestimmung der Integrationskonstanten C folgt aus der Anfangsbedingung, daß für $t = 0$ $c = c_0$ und $n = n_0$ ist. Man erhält schließlich:

$$n = \frac{k_\alpha}{k_1} \cdot (c_0 - c) - \frac{k_\beta}{k_1} \cdot \ln\left(\frac{c_0}{c}\right) + n_0 \tag{5}$$

und durch Einsetzen von (5) in (1b):

$$-\frac{dc}{dt} = k_1 \cdot c \left\{\frac{k_\alpha}{k_1}(c_0 - c) - \frac{k_\beta}{k_1} \cdot \ln\left(\frac{c_0}{c}\right) + n_0\right\}. \tag{6}$$

Im folgenden betrachten wir den Fall $k_\alpha = k_1$, daß also jeder Reaktionsakt, der zum Verbrauch eines Moleküls der Ausgangssubstanz führt, gleichzeitig eine Verdoppelung der Zahl der aktiven Teilchen bewirkt, wie es ja bei den eingangs erwähnten Zwischenreaktionen der Knallgasreaktionen der Fall ist. Trägt man entsprechend Gl. (6) die Reaktionsgeschwindigkeit als Funktion der Konzentration der reagierenden Stoffe bzw. des Umsatzes auf, so erhält man eine etwas unsymmetrische, parabelartige Kurve, wie sie in Fig. 1 wiedergegeben ist. Die eingezeichneten Punkte sind Meßpunkte von Kowalsky[1]) bei der Knallgasreaktion in der Nähe der unteren Explosionsgrenze. Die Messungen werden durch die theoretische Kurve gut wiedergegeben, insbesondere die etwas unsymmetrische Lage des Geschwindigkeitsmaximums bei etwa 43% der insgesamt umgesetzten Menge. Eine bei Semenoff[2]) angegebene Ableitung des zeitlichen Ablaufs bei Kettenabbruch nach 1. Ordnung ergab eine genau symmetrische Parabel, die die Messungen nicht so gut wiedergibt[3]). Eine streng symmetrische Kurve erhält man auch nur, wenn entweder überhaupt kein Kettenabbruch stattfindet ($k_\beta = 0$), wovon man sich an Hand der obigen Formeln leicht überzeugen kann, oder wenn auch die Geschwindigkeit des Kettenabbruchs

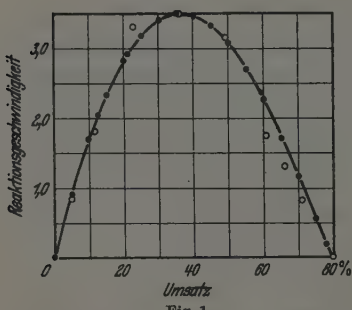


Fig. 1.

[1]) A. Kowalsky, Phys. ZS. d. Sowjetunion 4, 723, 1933 (entnommen dem Buch Semenoffs, l. c., S. 257). — [2]) N. Semenoff, l. c., S. 60ff. — [3]) N. Semenoff, l. c., S. 257.

mit Abnahme der Ausgangsstoffe abnimmt; die Gl. (1a) lautet in diesem Falle: $dn/dt = (k_\alpha - k_\beta) \cdot c \cdot n$ und man erhält durch Integration den Ausdruck: $-dc/dt = k_1 c \cdot \{((k_\alpha - k_\beta)/k_1) \cdot (c_0 - c) + n_0\}$, die Gleichung einer Parabel. Ein solcher Vorgang tritt aber offenbar nicht auf.

Um zur Darstellung des Reaktionsverlaufs in Abhängigkeit von der Zeit zu kommen, ist noch eine Integration der Gl. (6) erforderlich, die sich, da t in der Gleichung explizit nicht vorkommt, auf die Berechnung des Integrals:

$$\int_{c}^{c_0} \frac{dc}{k_1 c\left(c_0 - c - (k_\beta/k_1)\ln(c_0/c) + n_0\right)} = t \qquad (7)$$

beschränkt, die leicht numerisch oder graphisch durchzuführen ist. Da die Integration in dem Anfangsstadium, der Induktionsperiode, etwas umständlich ist, kann man für praktische Rechnungen mit genügender Genauigkeit so verfahren, daß man zunächst mit konstantem $c\,(= c_0)$ rechnet bis zu dem Zeitpunkt, in dem c eben merkbar abzunehmen beginnt, beispielsweise um 1%. Man erhält dann, da man nun (1a) unabhängig von (1b) integrieren kann, den bekannten exponentiellen Ansatz für die Zunahme der Konzentration der Kettenträger mit der Zeit; dabei kann man nun auch wieder die den tatsächlichen Verhältnissen meist mehr entsprechende laufende Neubildung von Kettenträgern einführen entsprechend der Größe w_0 in Gl. (1a) und der Anfangskonzentration $n_0 = 0$. Daraus ergibt sich die bekannte Semenoffsche Formel:

$$n = \frac{w_0}{k_\alpha c_0 - k_\beta}\left(e^{(k_\alpha c_0 - k_\beta)t} - 1\right). \qquad (8)$$

Entsprechend erhält man für c aus Gl. (1b):

$$c_t = c_0 \cdot e^{-k_1 \cdot \int_0^t n \cdot dt} \qquad (9)$$

oder nach Einsetzen von (8) in (9) und Ausführung der Integration:

$$c_t = c_0 \cdot e^{\left(-\frac{k_1 \cdot w_0}{(k_\alpha c_0 - k_\beta)^2} \cdot e^{(k_\alpha c_0 - k_\beta)t} + \frac{k_1 w_0}{k_\alpha c_0 - k_\beta} \cdot t + \frac{k_1 w_0}{(k_\alpha c_0 - k_\beta)^2}\right)}, \qquad (10)$$

dabei können die beiden letzten Summanden im Exponenten neben der Exponentialfunktion im allgemeinen vernachlässigt werden. Nach Gl. (10) berechnet man dann c als Funktion von t bis zu dem Punkt der Kurve, an dem sich eben eine Abnahme von c bemerkbar macht. Definiert man also als Induktionsperiode τ die Zeit, in der die Konzentration der Ausgangsstoffe vom Anfangswert c_0 auf den nur wenig

niedriger liegenden Wert c_τ abgenommen hat, so erhält man für die Induktionsperiode die Näherungsformel:

$$\tau = \frac{1}{k_\alpha c_0 - k_\beta} \cdot \ln\left(\frac{(k_\alpha c_0 - k_\beta)^2}{k_1 w_0} \cdot \ln\left(\frac{c_0}{c_\tau}\right)\right)^{1)}. \qquad (10\,a)$$

Von diesem Punkt ab rechnet man dann nach Gl. (7) weiter in der Form:

$$\int_{c_2}^{c_1} \frac{\mathrm{d}\,c}{k_1 c\,(c_0 - c - (k_\beta/k_1)\ln(c_0/c))} = t_2 - t_1. \qquad (7\,a)$$

Für verschiedene Werte von k_β unter sonst gleichen Bedingungen erhält man dabei Zeit-Umsatzkurven, wie sie in Fig. 2a wiedergegeben

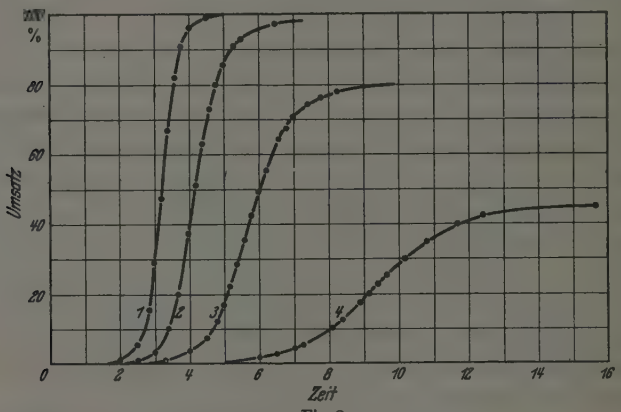


Fig. 2a.

[1]) Diese Näherungsformel darf, wie wir ausdrücklich betonen möchten, nicht zu der Annahme führen, man erhielte für $k_\alpha\ c_0 = k_\beta$ die Induktionsperiode ∞. In diesem Fall hat es überhaupt keinen Sinn, von einer Induktionsperiode zu sprechen, da die Reaktionsgeschwindigkeit, wie z. B. die Kurven der Fig. 3 zeigen, nicht beschleunigt, sondern anfänglich linear ansteigt mit einer Neigung, die durch den Wert von w_0 bestimmt wird. Mathematisch kommt dieser Sachverhalt darin zum Ausdruck, daß man nun in Gl. (10) die beiden letzten Summanden im Exponenten nicht mehr vernachlässigen darf; man erhält vielmehr eine Gleichung:

$$c_t = c_0 \cdot e^{-k_1 w_0 t^2/2},$$

also

$$\tau = \sqrt{\frac{2 \cdot \ln(c_0/c_\tau)}{k_1 w_0}};$$

dieser Wert entspricht aber nicht der eigentlichen Definition einer Induktionsperiode, da inzwischen $-\mathrm{d}^2c/\mathrm{d}t^2$ nicht zu-, sondern abgenommen hat. Eine Induktionsperiode ∞ erhält man nur, wenn $w_0 = 0$ wird, also überhaupt keine Kettenträger vorhanden sind und gebildet werden.

sind und die genau der von Kowalsky[1]) erhaltenen Kurvenschar entspricht; die zugehörigen Reaktionsgeschwindigkeit-Zeitkurven sind in Fig. 2b dargestellt. Alle diese Kurven stellen Kettenexplosionen im Sinne der Semenoffschen Explosionsbedingung dar, d. h. in jedem Falle ist die anfängliche Kettenverzweigungsgeschwindigkeit größer als die des Kettenabbruchs. Man erkennt, daß je nach dem Verhältnis von $k_1 c_0 : k_\beta$ die Reaktion nach einem größeren oder kleineren Umsatz zum Stillstand kommt. Die Konzentration c_e der Ausgangsstoffe,

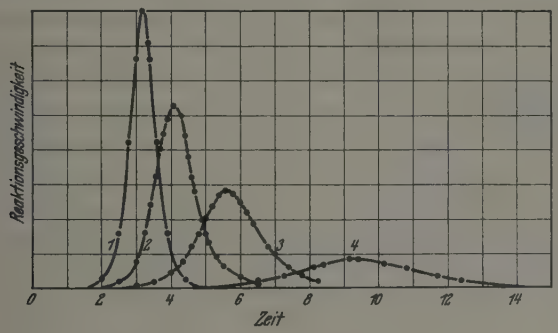


Fig. 2b.

bei der dieses Abstoppen der Reaktion eintritt, ergibt sich nach Gl. (7a) aus der Bedingung

$$c_0 - c_e - \frac{k_\beta}{k_1} \cdot \ln\left(\frac{c_0}{c_e}\right) = 0. \qquad (7b)$$

Man kann hiernach andererseits aus Anfangs- und Endkonzentration das Verhältnis k_β/k_1 berechnen (vorausgesetzt, daß die hier zugrunde liegende Annahme $k_\alpha = k_1$ zutrifft und die Reaktion wirklich nahezu isotherm verläuft). Man wird dieses Abstoppen der Reaktion, ehe die gesamte Ausgangssubstanz verbraucht ist, natürlich nur beobachten können, wenn der Vorgang nicht in Wärmeexplosion übergeht.

Kommt man zu höheren Kettenabbruchsgeschwindigkeiten in der Nähe der Semenoffschen Explosionsbedingung $k_\beta = k_1 c_0$, so ist die

[1]) A. Kowalsky, l. c.; die von Kowalsky erhaltenen Kurven sind ferner dargestellt in dem Buch von Semenoff, l. c., S. 223, bei W. Jost, Explosions- und Verbrennungsvorgänge in Gasen, S. 301, Berlin 1939, sowie in dem Artikel von R. G. W. Norrish u. E. J. Buckler, Handbuch der Katalyse, Bd. I, S. 397, Wien 1941.

Vernachlässigung von w_0 bei der Integration des Systems (1a) bis (1b) und Berücksichtigung nur zur Berechnung der Induktionsperiode nicht mehr zulässig. Diese Näherung ist nur solange statthaft, als am Ende der Induktionsperiode, wenn der Verbrauch der Ausgangsstoffe eben merkbar zu werden beginnt, die Konzentration der Kettenträger durch Kettenverzweigung bereits so stark angestiegen ist, daß daneben die laufende Neubildung vernachlässigt werden kann; eine Änderung von w_0 wirkt sich dann nur auf die Länge der Induktionsperiode aus, ist aber ohne Einfluß auf den weiteren Verlauf der Reaktion und insbesondere auf das erreichte Maximum der Reaktionsgeschwindigkeit.

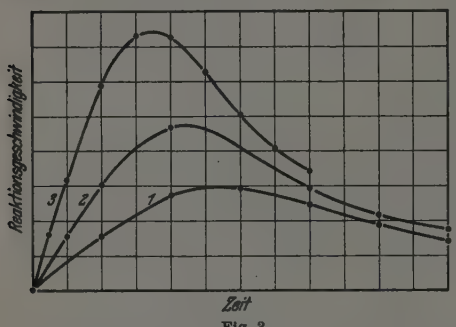


Fig. 3.

Ist diese Bedingung nicht mehr erfüllt, so muß das System (1a) bis (1b) unter Berücksichtigung von w_0 integriert werden, was sich nur numerisch durchführen läßt. Fig. 3 gibt drei derartig berechnete Kurven für den Fall $k_1 c_0 = k_\beta$ wieder; dabei haben k_1 und c_0 die gleichen Werte wie bei den Kurven der Fig. 2a und 2b, k_β infolgedessen den Wert 40 sec^{-1} und der Wert von w_0 beträgt bei Kurve 1 4, bei Kurve 2 8 und bei Kurve 3 $16 \cdot 10^{-6}$ Mol/Liter · sec. Wie zu erwarten, hat hier die Geschwindigkeit der Neubildung von aktiven Teilchen einen starken Einfluß auf den gesamten Verlauf der Umsetzung, insbesondere auch auf das erreichte Maximum der Reaktionsgeschwindigkeit. Es ist klar, daß unter Bedingungen, unter denen bereits bei derartigen Werten der Reaktionsgeschwindigkeit das Wärmegleichgewicht gestört wird, die Größe von w_0 einen entscheidenden Einfluß darauf hat, ob Explosion und zwar Wärmeexplosion, eintritt oder nicht. Dabei stellt nun der Fall $k_1 c_0 = k_\beta$ keinen irgendwie besonders gekennzeichneten Grenzfall dar. Wärmeexplosion kann im Prinzip bei jedem Wert der Reaktionsgeschwindigkeit auftreten. Zur Berechnung, wo der Grenzwert liegt, bei dem das Wärmegleichgewicht gestört wird, hat man in den Gl. (1a) und (1b) die Geschwindigkeitskonstanten als Temperaturfunktionen einzuführen und noch eine dritte simultane Differentialgleichung hinzuzufügen, die die zeitliche Änderung der Temperatur berücksichtigt,

wie sie aus der Theorie der Wärmeexplosion bekannt ist[1]) und die im vorliegenden Falle folgende Form erhält:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{Q}{c_0 \cdot \bar{c}_v} \cdot \left(-\frac{dc}{dt}\right) - \frac{A}{c_0 \cdot \bar{c}_v \cdot V} \cdot (T - T_0). \qquad (1c)$$

worin Q die Wärmetönung der Bruttoreaktion (cal/Mol), c_0 die Gesamtkonzentration (Mol/Liter), $\bar{c}_v$ die mittlere spezifische Wärme des Gasgemisches (cal/Mol · Grad), $-dc/dt$ die Geschwindigkeit des Verbrauchs der Ausgangssubstanz (Mol/Liter · sec), A eine Wärmeleitzahl (cal/Grad · sec), die von der Wärmeleitfähigkeit des Gasgemisches und der Größe und Form des Reaktionsgefäßes abhängt, V das gesamte Volumen (Liter), T_0 die (konstante) Wandtemperatur und T einen Mittelwert der innerhalb des Reaktionsgefäßes natürlich räumlich verschiedenen Temperatur des Reaktionsgemisches bedeutet. Das so erhaltene System läßt sich, wie ja schon der einfachste Fall einer monomolekularen Zerfallsreaktion[2]), nur numerisch integrieren.

Der Fall $k_1 c_0 = k_\beta$ nimmt also für den Übergang der Reaktion in Wärmeexplosion keine Grenzstellung ein. Aber auch bei rein isothermen Vorgängen vollzieht sich der Übergang von Werten $k_1 c_0 < k_\beta$ zu Werten $k_1 c_0 > k_\beta$ vollkommen stetig; zwar steigt die Reaktionsgeschwindigkeit im letzteren Falle zunächst beschleunigt an, aber die Reaktion kommt auch in diesem Gebiet unter Umständen schon nach wenigen Prozenten Umsatz wieder zum Stillstand [Gl. (7b)]. Unter einer Explosion versteht man normalerweise einen Vorgang, bei dem in sehr kurzer Zeit die gesamte vorhandene Substanz umgesetzt wird. Das ist natürlich beim Übergang in Wärmeexplosion immer der Fall, was ja auch der häufigste Vorgang sein wird. Bei streng oder doch nahezu isotherm verlaufenden Umsetzungen ist es wesentlich schwieriger, den Begriff der Explosion zu definieren; es ist zweifelhaft, ob man einen solchen Vorgang überhaupt als Explosion bezeichnen kann. Das Kriterium von Semenoff: $k_1 c_0 = k_\beta$ bedeutet in Wirklichkeit ja nur, daß $-d^2c/dt^2$ für $t = 0$ eine horizontale Tangente hat, daß also d^3c/dt^3 für $t = 0$ verschwindet [wie man durch Differentiation von Gl. (1b) leicht ableiten kann], womit über den zu erreichenden Umsatz oder die auftretenden Werte der Reaktionsgeschwindigkeit nichts ausgesagt ist. Verlangt man, daß ein möglichst weitgehender Umsatz erreicht wird, ehe die Reaktion abstoppt, so bedeutet das, daß $k_1 c_0$ ein Mehrfaches von k_β betragen

[1]) Z. B. W. Jost, Explosions- und Verbrennungsvorgänge, l. c., S. 11. — [2]) O. K. Rice, A. O. Allen u. H. C. Campbell, Journ. Amer. Chem. Soc. 57, 2212, 1935.

muß. Es entspricht z. B. in Fig. 2a Kurve 3, bei der die Reaktion bei 80 % Umsatz zum Stillstand kommt, einem Verhältnis $k_1 c_0 : k_\beta = 2:1$, Kurve 2 mit 98 % Umsatz einem Verhältnis von 4 : 1. Ein 100 %iger Umsatz kann bei isothermer Reaktion theoretisch überhaupt nur erreicht werden, wenn gar kein Kettenabbruch stattfindet, wie es bei Kurve 1 angenommen wurde. Man wird daher wohl vorziehen, von Explosion nur dann zu sprechen, wenn Übergang in Wärmeexplosion stattfindet.

2. Zeitlicher Ablauf bei Kettenabbruch nach 2. Ordnung.

Wie eingangs näher ausgeführt wurde, wurden Kettenabbruchsreaktionen, die in bezug auf die aktiven Teilchen von 2. Ordnung sind, aus den Reaktionsmechanismen explosiver Kettenreaktionen deswegen ausgeschlossen, weil man dann keine Ausdrücke für die Reaktionsgeschwindigkeit mehr erhalten kann, die für den stationären Zustand unter bestimmten Bedingungen formal den Wert unendlich annehmen können. Zwar konnte bereits bei früherer Gelegenheit an einem speziellen Schema der Knallgasverbrennung gezeigt werden, daß man in komplizierteren Systemen bei Berücksichtigung mehrerer Arten aktiver Teilchen auch bei Zulassung von Abbruchsreaktionen 2. Ordnung unter Umständen doch noch einen derartigen Ausdruck für die Reaktionsgeschwindigkeit erhalten kann[1]), wir möchten es aber auf Grund der vorangegangenen Diskussion über die Bedeutung eines solchen Grenzfalles überhaupt bezweifeln, ob die Betrachtung eines „stationären" Zustandes bei solchen nichtstationären Vorgängen sinnvoll ist. Man hat wohl vielmehr immer den gesamten Ablauf der Reaktion zu betrachten und zu untersuchen, ob die auftretenden Werte der Reaktionsgeschwindigkeit ausreichen, um den Vorgang als Explosion erscheinen zu lassen bzw. den Übergang in Wärmeexplosion zu ermöglichen.

Betrachten wir jetzt den zeitlichen Verlauf bei Kettenabbruchsreaktionen 2. Ordnung, so lautet für diesen Fall das Gleichungssystem:

$$\frac{dn}{dt} = w_0 + k_\alpha \cdot c \cdot n - k_\gamma n^2, \qquad (1a')$$

$$-\frac{dc}{dt} = k_1 \cdot c \cdot n, \qquad (1b)$$

worin k_γ jetzt die Geschwindigkeitskonstante einer nach 2. Ordnung verlaufenden Rekombination, also z. B. eine Dreierstoßkonstante bedeutet.

---

[1]) W. Jost u. L. v. Müffling, ZS. f. phys. Chem. (A) **183**, 43, 1938.

Die Integration dieses Systems, wieder unter Vernachlässigung von w_0, läßt sich folgendermaßen durchführen:

Differentiation von (1b) nach t ergibt:

$$-\frac{\mathrm{d}^2 c}{\mathrm{d}t^2} = k_1\left(c\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} + n\cdot\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\right). \tag{11}$$

Durch Einsetzen von:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -\frac{k_\alpha}{k_1}\cdot\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} - k_\gamma n^2 \quad \text{und} \quad n = -\frac{1}{k_1 c}\cdot\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}$$

erhält man daraus:

$$\frac{\mathrm{d}^2 c}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{c}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\right)^2\cdot\left(1+\frac{k_\gamma}{k_1}\right) + k_\alpha\cdot c\cdot\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}. \tag{12}$$

Da die unabhängige Variable t explizit nicht vorkommt, kann man die Ordnung der Gleichung reduzieren, indem man $\mathrm{d}c/\mathrm{d}t = u$ zur abhängigen, c zur unabhängigen Variablen macht. Man erhält dadurch:

$$u\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}c} = \frac{1}{c}\cdot u^2\left(1+\frac{k_\gamma}{k_1}\right) + k_\alpha\cdot c\cdot u \tag{13}$$

oder nach Division durch u:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}c} = \frac{u}{c}\cdot\left(1+\frac{k_\gamma}{k_1}\right) + k_\alpha\cdot c, \tag{14}$$

eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung von u, deren Lösung sich sofort hinschreiben läßt:

$$u = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = c^{1+k_\gamma/k_1}\left(C + \frac{k_\alpha c^{1-k_\gamma/k_1}}{1-k_\gamma/k_1}\right), \tag{15}$$

für den Spezialfall $k_\gamma = k_1$:

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = c^2\cdot(C' + k_\alpha \ln c). \tag{15a}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten bringt man die Gleichung auf die Form:

$$-\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = k_1 c\left(\frac{k_\alpha}{k_\gamma - k_1}c - \frac{C}{k_1}\cdot c^{k_\gamma/k_1}\right) \tag{16}$$

bzw.

$$-\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = k_1 c\left(-\frac{C'}{k_1}c - \frac{k_\alpha}{k_1}\cdot c\cdot\ln c\right). \tag{16a}$$

Aus dem Vergleich mit Gl. (1b) ergibt sich, daß der Ausdruck in der Klammer auf der rechten Seite von Gl. (16) bzw. (16a) gleich n ist; man kann dann C und C' durch Einsetzen der Anfangsbedingung ermitteln, indem man für $t = 0$, $c = c_0$ und n entweder $= n_0$ oder $= 0$

setzt, wobei man dann im letzteren Falle wieder w_0 zur Berechnung der Induktionsperiode einführt. Man erhält dann schließlich:

$$-\frac{dc}{dt} = k_1 c \left\{ \frac{k_\alpha}{k_\gamma - k_1} \left(c - c_0 \left(\frac{c}{c_0} \right)^{k_\gamma / k_1} \right) + \left[n_0 \left(\frac{c}{c_0} \right)^{k_\gamma / k_1} \text{ bzw. } 0 \right] \right\} \quad (17)$$

bzw.

$$-\frac{dc}{dt} = k_1 c \cdot \left(\frac{k_\alpha}{k_1} \cdot c \cdot \ln \left(\frac{c_0}{c} \right) \left[n_0 \cdot \frac{c}{c_0} \text{ bzw. } 0 \right] \right). \quad (17a)$$

Man erhält also wieder die Reaktionsgeschwindigkeit als Funktion der Konzentration der Ausgangssubstanz. Um zur Darstellung in Abhängigkeit von t zu kommen, ist nochmalige Integration von (17) bzw. (17a) erforderlich, die wieder, da t explizit nicht vorkommt, auf eine einfache Quadratur führt. Die Berechnung der Induktionsperiode erfolgt wieder wie beim Kettenabbruch nach 1. Ordnung angegeben, mit $c = c_0$, wobei man laufende Neubildung entsprechend Gl. (1a') berücksichtigen kann. Für n erhält man daraus den Ausdruck:

$$n = (a^2 - b^2) \cdot \frac{e^{2 k_\gamma a t} - 1}{a + b + (a - b) e^{2 k_\gamma a t}} \quad (18)$$

mit

$$a = \sqrt{\left(\frac{k_\alpha c_0}{2 k_\gamma} \right)^2 + \frac{w_0}{k_\gamma}}; \quad b = \frac{k_\alpha c_0}{2 k_\gamma},$$

woraus man nach Einsetzen in Gl. (9) in den Anfangsstadien c als Funktion von t erhält. Über die Grenzen der Anwendbarkeit dieser Rechnungsweise gilt natürlich genau das weiter oben Gesagte. Die Durchführung der Rechnung, wobei wieder $k_\alpha = k_1$ gesetzt wurde, für verschiedene Werte von k_γ, ergibt für die Zeit-Umsatzkurve eine in Fig. 4a dargestellte Kurvenschar während in Fig. 4b die entsprechenden Reaktionsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen sind. Derartige Kurven sind bei Oxydationsreaktionen der verschiedensten Art experimentell häufig beobachtet worden (z. B. Knallgas oberhalb der oberen Explosionsgrenze, siehe bei Jost, l. c., S. 309, Oxydation von Äthan und höheren Paraffinen sowie Äthylen siehe Semenoff, l. c., S. 310f.; Oxydation von Aromaten z. B. K. G. Fahlbusch, Öl und Kohle 38, 887, 965, 1942; Oxydation von H_2S siehe Semenoff, l. c., S. 293 usw.), doch fehlte bislang eine Erklärung für diese Kurvenform. Da wir sehen, daß sie auf einem Kettenabbruch 2. Ordnung beruht, ist nun kein Grund mehr vorhanden, derartige Reaktionen aus den Reaktionsmechanismen auszuschließen. Wir wollen zum Vergleich mit den Verhältnissen beim Kettenabbruch

nach 1. Ordnung noch abzuschätzen versuchen, welche Werte der Reaktionsgeschwindigkeit in praktischen Fällen auftreten können. Betrachtet man etwa die Knallgasreaktion. Die langsamste und damit geschwindigkeitsbestimmende Verzweigungsreaktion sei $H + O_2 = OH + O$; sie hat nach K. H. Geib[1]) eine Aktivierungsenergie von etwa 14 Kcal. Nehmen wir eine Temperatur von 700° K an, so erhält man mit einer Stoßzahl von 10^{10} eine Geschwindigkeitskonstante von etwa 10^5 Liter · Mol^{-1} · sec^{-1}; nimmt man als kettenabbrechende Reaktion die Dreierstoßrekombination von H-Atomen und betrachtet man einen Druck von 0,1 atm ($c_0 = 2 \cdot 10^{-3}$), so erhält man für k_γ einen Wert von etwa 10^6 Liter · Mol^{-1} sec^{-1}. Zum Vergleich wählen wir für k_β den Wert 10^2 sec^{-1}, so daß also $k_1 c_0 = 2\,k_\beta$ wird, was nach den obigen Rechnungen zu einem 80 %igen Umsatz führt. Das Ergebnis der Rechnung (mit $w_0 = 10^{-8}$ Mol pro Liter · sec) zeigen Fig. 5a und 5b, in denen Reaktionsgeschwindigkeiten und Umsätze in Abhängigkeit von t aufgetragen sind, dabei bezieht sich Kurve 1 auf den Abbruch nach 1., Kurve 2 auf den nach 2. Ordnung. Man erhält fast die gleichen Maximalgeschwindigkeiten, wobei auffällt, daß beim Abbruch nach 2. Ordnung eine wesentlich kürzere Induktionsperiode auftritt. Diese Erscheinung ebenso wie der Umstand, daß bei den in Fig. 4a und 4b dargestellten Kurven stets praktisch dieselbe Induktions-

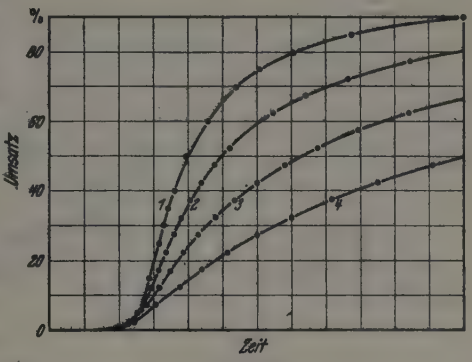


Fig. 4a.

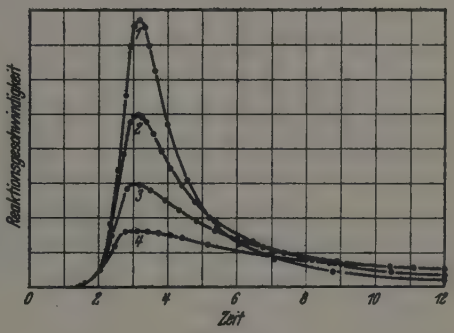


Fig. 4b.

[1]) K. H. Geib, Habilitationsschrift, Leipzig 1937.

periode auftritt, beruht natürlich darauf, daß bei diesem Mechanismus des Kettenabbruchs die Reaktion zunächst praktisch ungehemmt anläuft und der Kettenabbruch sich erst mit steigender Konzentration der Kettenträger allmählich bemerkbar macht, dann allerdings bald sehr rasch ein weiteres Steigen der Geschwindigkeit verhindert. Immer-

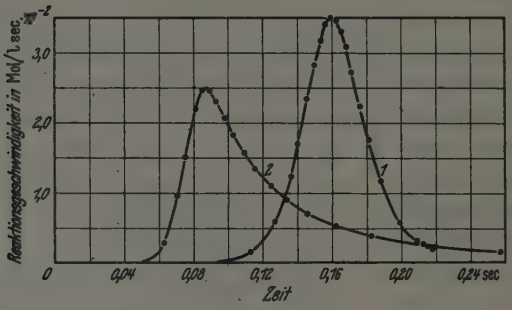


Fig. 5a.

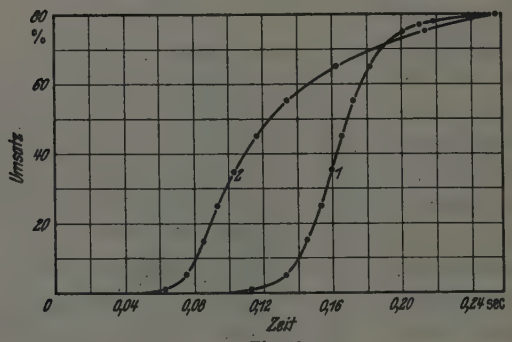


Fig. 5b.

hin sind die erreichten Werte hoch genug, um den Vorgang als Explosion zu kennzeichnen, besonders da auch an der oberen Explosionsgrenze, bei der dieser Kettenabbruchsvorgang wohl die Hauptrolle spielt, die Bedingungen für das Eintreten von Wärmeexplosion wohl stets günstig sind. Ein Unterschied in den Kurven für Kettenabbruch 1. und 2. Ordnung ist auch der, daß die Reaktion im letzteren Fall, auch wenn man weitere Neubildung von aktiven Teilchen ausschließt, niemals ganz zum Stillstand kommt, sondern immer, wenn auch unter Umständen mit sehr geringer Geschwindigkeit, bis zum

vollständigen Umsatz weiterläuft, so daß hier auch bei streng isothermem Verlauf die prinzipielle Schwierigkeit, wie beim Abbruch nach 1. Ordnung, nicht auftritt.

Betrachten wir schließlich noch den allgemeineren Fall, daß Ketten abbruch nach 1. und 2. Ordnung gleichzeitig stattfindet. Die Differential gleichungen lauten hierfür:

$$\frac{dn}{dt} = w_0 + k_\alpha c n - k_\beta n - k_\gamma n^2, \qquad (1a'')$$

$$-\frac{dc}{dt} = k_1 c n. \qquad (1b)$$

Die Lösung läßt sich ganz analog wie beim Abbruch nur nach 2. Ordnung durchführen und man erhält die Gleichungen:

$$-\frac{dc}{dt} = k_1 c \left\{ \frac{k_\alpha}{k_\gamma - k_1}\left(c - c_0\left(\frac{c}{c_0}\right)^{k_\gamma/k_1}\right) + \frac{k_\beta}{k_\gamma}\left(\left(\frac{c}{c_0}\right)^{k_\gamma/k_1} - 1\right) + \right.$$
$$\left. + \left[n_0 \left(\frac{c}{c_0}\right)^{k_\gamma/k_1} \text{ bzw. } 0 \right] \right\} \qquad (19)$$

und für den Fall $k_\gamma = k_1$:

$$-\frac{dc}{dt} = k_1 c \left(\frac{k_\alpha}{k_1} \cdot c \cdot \ln\left(\frac{c_0}{c}\right) + \frac{k_\beta}{k_1}\left(\frac{c}{c_0} - 1\right) + n_0 : \frac{c}{c_0} \text{ bzw } 0 \right). \qquad (19a)$$

Mit Hilfe der Gl. (19) bzw. (19a) kann man z. B. die typische Explosionsgrenzkurve in Abhängigkeit von Druck und Temperatur, wie sie bei Kettenreaktionen auftritt, auf folgende Weise erhalten. Nimmt man an, daß für einen bestimmten Wert der Reaktionsgeschwindigkeit die Reaktion in Wärmeexplosion übergeht, so werden an der Explosionsgrenze die Reaktionsgeschwindigkeitskurven so verlaufen müssen, daß im Maximum immer gerade dieser Wert erreicht wird. Nimmt man ferner an, wie es ja der allgemeinen Vorstellung entspricht, daß der Kettenabbruch 1. Ordnung an der unteren Grenze einer Wandrekombination zugeordnet ist und seine Geschwindigkeit daher umgekehrt proportional dem Druck ist, der Abbruch 2. Ordnung dagegen als Dreierstoßrekombination proportional mit dem Druck zunimmt und denkt sich den Druck durch Inertgaszugabe verändert ohne Änderung der Konzentration der reagierenden Stoffe, so muß man, wenn k_β und k_γ durch Druckänderung geändert werden, auch k_α bzw. k_1, die wir für die Rechnung wieder gleichsetzen, in dem Maße ändern, daß wieder das gleiche Geschwindigkeitsmaximum erhalten wird (dabei wird noch angenommen, daß sich die die Temperaturänderung beeinflussenden Größen gegenseitig etwa kompensieren). Da k_1 entsprechend der Akti-

vierungswärme der zugrunde liegenden Reaktion eine Temperaturfunktion ist (k_β und k_γ kann man als temperaturunabhängig betrachten), ergibt sich aus der Änderung von k_1 die der Druckänderung entsprechende Temperaturänderung an der Explosionsgrenze. Das Ergebnis einer derartigen Rechnung zeigt Fig. 6; man erkennt die für Kettenexplosionen typische Explosionsgrenzkurve mit unterer und oberer Druckgrenze, wobei der Ast rechts vom Minimum wesentlich flacher verläuft als der linke.

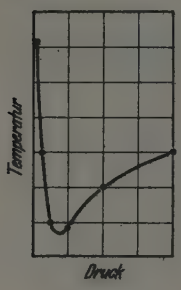


Fig. 6.

Was den zeitlichen Ablauf der Reaktion bei Kettenabbruch gleichzeitig nach 1. und 2. Ordnung betrifft, so ist klar, daß je nach dem Anteil, den die einzelnen Prozesse am gesamten Kettenabbruch haben, die Form der Kurven zwischen denen der beiden Grenzfälle variieren wird.

Ludwigshafen a. Rh., I. G. Farbenindustrie A.-G., Hochdruckversuche.

Anhang zur vorstehenden Arbeit von L. v. Müffling.

Die Theorie der Reaktionen mit Kettenverzweigung von N. Semanoff kann bei Explosionen zu grundsätzlichen Schwierigkeiten führen, wie in einer früheren Arbeit des Unterzeichneten mit L. von Müffling gezeigt wurde. Diese Schwierigkeiten sind der Ausgangspunkt für die vorstehende Untersuchung v. Müfflings gewesen, in welcher er den zeitlichen Ablauf solcher Reaktionen theoretisch untersucht, und zwar unter Verzicht auf die sonst übliche Annahme, daß die Änderung der Konzentration der Ausgangssubstanz ohne Einfluß auf die Verzweigung bliebe, aber unter der auch von Semenoff u. a. gemachten Voraussetzung eines Kettenabbruchs nach der ersten Ordnung. Hiermit ergeben sich bereits einige neue Erkenntnisse und ein verbesserter Anschluß an die Erfahrung.

Der Hauptwert von L. v. Müfflings letzter Publikation dürfte aber in ihrem zweiten Teil liegen, in welchem der zeitliche Ablauf einer Reaktion mit Kettenverzweigung bei Kettenabbruch nach der 2. Ord-

nung untersucht wird. Hier erhält man — ausgenommen in Spezialfällen, wie in der früheren Veröffentlichung angeführt — nach dem Semenoffschen Verfahren, welches das asymptotische Verfahren der Lösungen für $t \to \infty$ nach idealisierenden Annahmen betrachtet, grundsätzlich überhaupt keine Explosion. v. Müffling zeigt nun, daß auch in solchen Fällen in dem beobachtbaren Zeitintervall der Reaktionsablauf sich grundsätzlich kaum von dem bei Kettenabbruch 1. Ordnung mit Explosion unterscheidet. Da bei allen Atom- und Radikalreaktionen bei nicht zu niedrigen Drucken eine Kombination nach der 2. Ordnung den wahrscheinlichsten Kettenabbruch darstellt, ist dieses Resultat besonders befriedigend; denn bisher wurden bei Explosionen solche Abbruchsreaktionen aus rein formalen Gründen meist ausgeschlossen. Darüber hinaus ergibt sich für die Reaktionsgeschwindigkeit als Funktion der Zeit ein charakteristischer asymmetrischer Verlauf, wie er in zahlreichen Fällen beobachtet, aber bisher nicht theoretisch gedeutet worden war.

Mit diesem Kettenabbruch nach der 2. Ordnung folgt schließlich eine ganz ungezwungene Deutung des bekannten inselartigen Explosionsgebietes in seiner Abhängigkeit von Temperatur und Druck. Dieses Gebiet wird formal zwar seit langem im Anschluß an die Arbeiten von Hinshelwood und Semenoff gedeutet durch die Annahme, daß bei niederen Drucken ein Kettenabbruch von (-1)-ter Ordnung hinsichtlich des Druckes (Diffusion aktiver Teilchen an die Wand), bei hohen Drucken ein Abbruch von mindestens 1. Ordnung maßgebend ist. Während die Deutung für die untere Grenze sicher begründet ist, fehlt eigentlich bis heute meist eine Deutung für den Mechanismus des Kettenabbruchs an der oberen Grenze. Auch im Falle der Knallgasreaktion, wo die Resultate mit H_2 und mit D_2 einheitlich durch die Annahme beschrieben werden können, daß die Bildung eines Radikals HO_2 von ungewöhnlicher Stabilität in einer Dreierstoßreaktion der kettenabbrechende Vorgang sei, scheint trotz der sorgfältigen neueren Arbeiten von Lewis und v. Elbe, sowie von Oldenberg und Mitarbeitern noch keine widerspruchsfreie Deutung aller Versuche gelungen zu sein. Zudem ist die Annahme eines sehr wenig reaktiven Radikals HO_2 unwahrscheinlich.

Leider war es v. Müffling nicht mehr vergönnt, die Kinetik der Knallgasreaktion auf der Basis seiner Theorie eingehend zu diskutieren. Nachdem er den ersten Teil der Veröffentlichung endgültig überarbeitet hatte, wurde er das Opfer eines verhängnisvollen Unglücks. Der letzte

Teil erscheint daher in seiner ursprünglichen Fassung. Es sei hier nur eine sachliche Bemerkung nachgetragen. v. Müffling rechnet für die kettenverzweigende Reaktion $H + O_2 \rightarrow OH + O$ mit einer Aktivierungsenergie von 14 Kcal nach Geib, an Stelle des heute meist akzeptierten Wertes von ~ 26 Kcal, und man könnte denken, von dieser willkürlichen Annahme hänge der Erfolg der Rechnung ab. Demgegenüber sei erwähnt, daß nach J. B. Seldowitsch und N. Semenoff die Aktivierungsenergie dieser Reaktion nur 18 Kcal beträgt, während der Wert von 26 Kcal lediglich durch das Lewis-v. Elbe-Schema für die obere Explosionsgrenze gestützt wird[1]).

[1]) Journ. phys. Chem. (russ.) **10**, 1427—1440, 1940.

Marburg, Physikalisch-chemisches Institut der Universität.

W. Jost.

Autorenregister.

Ardenne, Manfred von und Bernhard, Fritz. Ein kernphysikalisches Verfahren zur Bestimmung geringer Kohlenstoffzusätze in Eisen. S. 740.

Bechmann, R. Elastische Eigenschwingungen eines rechtwinkligen Quarzparallelepipeds. S. 510.

— und Petržílka, V. Axiale Längsschwingungen eines geraden Stabes aus kristallinem Material. S. 589.

Becker, A. und Schaper, Ilsemarie. Über die Lichtdurchlässigkeit des amorphen Selens. S. 49.

Bernhard, Fritz s. Ardenne, Manfred von.

Blass, G. Materieerzeugung in einem homogenen, zeitlich veränderlichen elektrischen Feld. S. 163.

Bollert, Karl. Eine neue Methode zur Quantelung der freien Strahlung mit einem Beitrag zur Neutrinotheorie des Lichtes. S. 98.

Borgnis, F. Zum Resonanzverhalten elektromagnetisch erregter Hohlräume. S. 407.

Borries, B. v. Über günstige Entwicklungsverfahren und Grenzauflösungsvermögen photographischer Platten für übermikroskopische Aufnahmen. S. 539.

Bothe, W. Die räumliche Verteilung abgebremster Neutronen. S. 648.

— und Jensen, P. Die Absorption thermischer Neutronen in Kohlenstoff. S. 749.

— s. Fünfer, E.

Bruin, T. L. de, Klinkenberg, P. F. A. und Schuurmans, Ph. Die Struktur des Th II-Spektrums. S. 23.

Ewald, H. Die relativen Isotopenhäufigkeiten und die Atomgewichte von Kupfer und Ruthenium. S. 487.

Ewald, H. Photometrische Bestimmung seltener Isotope. Relative Isotopenhäufigkeiten und Atomgewicht von Nickel. S. 686.

— s. Mattauch, J.

Finke, W. Das Periodische System der Elemente nach Quantenzahlen in flächenhafter Darstellung. S. 230.

Finkelnburg, H. s. Schluge, H.

— s. Hahn, O. Th.

Fünfer, E. und Bothe, W. Die Wechselwirkung von Neutronen und γ-Strahlen mit Beryllium. S. 769.

Gombás, Paul. Störungsrechnung in der erweiterten statistischen Theorie des Atoms und ihre Anwendung zur Berechnung von Polarisierbarkeiten. S. 497.

Hahn, O. Th. und Finkelnburg, W. Kontinuierliche Brems- und Rekombinationsstrahlung der Elektronen im Gasentladungsplasma. S. 36.

Hachenberg, O. s. Knoll, M.

Jensen, Peter. Die relativen Ausbeuten einiger $(n, 2n)$-Prozesse. S. 387.

— Die Bremsung von Neutronen in Kohlenstoff, Wasser und schwerem Wasser. S. 756.

— s. Bothe, W.

Kinder, E. Das Jochlinsen-Kombinations-Übermikroskop für Durchstrahlungs- und Selbststrahlungsaufnahmen. S. 192.

Klinkenberg, P. F. A. s. Bruin, T. L. de und Schuurmans, Ph.

Klumb, H. und Schwarz, H. Über ein absolutes Manometer zur Messung niedrigster Gasdrucke. S. 418.

Knoll, M., Hachenberg, O. und Randmer, J. Zum Mechanismus der Sekundäremission im Inneren von Ionenkristallen. S. 137.

Koch, K. M. Große Barkhausen-Sprünge in tordierten, von Wechselstrom durchflossenen Drähten. S. 706.
Kopfermann, H. und Walcher, W. Trennung der Thalliumisotope. II. Optische Untersuchung verschiedener Thalliumgemische. S. 465.
Kranert, W., Leise, K. H. und Raether, H. Untersuchung elektrolytisch polierter Metallflächen mittels Elekroneninterferenzen. S. 248.
Kriesis, P. Über die Symmetrie des Spannungstensors in der Aerodynamik. S. 778.
Kunze, Paul. Die spektrale Energieverteilung der Hefnerlampe. S. 494.
Lauterjung, K. H. und Neuert, H. Über einen Nachwirkungseffekt an Zählrohren. S. 266.
Leise, K. H. s. Kranert, W. und Raether, H.
Magyar, F. Geschwindigkeitsverteilungen in allgemeiner Darstellung. S. 640.
Mahl, H. und Recknagel, A. Über den Öffnungsfehler von elektrostatischen Elektronenlinsen. S. 660.
Maier-Leibnitz, H. Koinzidenzmessungen an radioaktiven Natriumisotopen. S. 233.
Mattauch, J. und Ewald, H. Über eine neue Methode zur Messung relativer Häufigkeiten von Isotopen. Die Isotopenverteilung und das Atomgewicht von Hafnium. S. 314.
Mierdel, G. Ein neues Verfahren zur Untersuchung der Gasaufzehrung in der Glimmentladung. S. 614.
Müffling, L. von. Beitrag zur Theorie explosiver Gasreaktionen. Über den zeitlichen Ablauf isothermer Kettenexplosionen bei Kettenabbruchsreaktionen 1. und 2. Ordnung. S. 787.
Neuert, H. s. Lauterjung, K. H.
Neugebauer, Th. Berechnung von Form und Größe der Molekülschwärme in Flüssigkeiten aus den Daten der Lichtzerstreuung. S. 471.
Nissen, H. F. Zur Elektronenempfindlichkeit verschiedener photographischer Schichten. S. 573.
Ozorai, Z. Das zweite Maximum der Rossi-Kurve. S. 413.
Päsler, Max. Zur Theorie der thermischen Dämpfung in festen Körpern. S. 357.
Petržílka, V. s. Bechmann, R.
Pietrzyk, Joh. s. Suhrmann, R.
Pohl, R. W. und Stöckmann, F. Zur Behandlung der Stoffmenge als Grundgröße. S. 534.
— — Zur Anwendung des Gleichheitszeichens. S. 680.
Raether, H. s. Kranert, W.
Randmer, J. s. Knoll, M. und Hachenberg, O.
Recknagel, A. s. Mahl, H.
Riemann, W. Untersuchung der Elektronenlawine mit der Nebelkammer. S. 216.
— Bemerkung zur Ionisierungsdichte einer Elektronenbahn. S. 262.
Rössler, Fritz. Die kontinuierliche Strahlung der Quecksilberhochdruckentladung. S. 285.
Rompe, R., Thouret, W. und Weizel, W. Zur Frage der Stabilisierung frei brennender Lichtbögen. S. 1.
— und Weizel, W. Über das Toeplersche Funkengesetz. S. 636.
Sauter, A. und F. Die Erzeugung von möglichst homogenen Magnetfeldern durch Stromsysteme. S. 120.
Schaper, Ilsemarie s. Becker, A.
Schintlmeister, Josef. Über Beziehungen zwischen den Halbwertszeiten der radioaktiven γ-Strahler. S. 527.
Schluge, H. und Finkelnburg, W. Über das Zischen des Homogenkohlebogens. S. 714.
Schmellenmeier, Heinz. Messungen des Gradienten der positiven Säule von Edelgasniederdruckentladungen. S. 269.
Schulz, P. und Weizel, W. Über Ionisierung und Temperatur in Hochdruckbögen. S. 697.

Schwarz, Helmut. Gasaufzehrung und Gasaustausch bei der Messung niedrigster Drucke im Ionisationsmanometer. Eine kritische Untersuchung in H_2, N_2 und Ar. S. 437.

—, H. s. Klumb, H.

Seeliger, R. Bemerkung zur Theorie des Kathodenfalls. S. 209.

Stöckmann, F. s. Pohl, R. W.

Suhrmann, R. und Pietrzyk, Joh. Die Änderung der lichtelektrischen Elektronenemission beim Übergang reiner Zink-, Cadmium- und Aluminiumschichten aus dem ungeordneten in den geordneten Zustand und der Einfluß der Temperatur auf die Empfindlichkeit dieser Metalle. S. 600.

Thouret, W. s. Rompe, R. und Weizel, W.

Walcher, W. Über eine Ionenquelle für massenspektroskopische Isotopentrennung. S. 62.

— Trennung der Thalliumisotope. I. Massenspektroskopische Trennung. S. 401.

— s. Kopfermann, H.

Weizel, W. Über den Einfluß der Konvektion auf einen Lichtbogen. S. 620.

— s. Rompe, R.

— s. Schulz, P.

Wiebe, Werner. Das Problem der Fokussierung beim Zyklotron. S. 451.

Wunderlich, Walter. Zur Reflexion von Röntgenstrahlen an Kristallen. S. 86.

THE UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO
3 8198 318 811 500